LOGICA Y TEORIA DE LA CIENCIA

PRINCIPIA MATHEMATICA

hasta * 56

Whitehead y Russell

PARANINFO S.A

PRINCIPIA MATHEMATICA

ALFRED NORTH WHITEHEAD
y
BERTRAND RUSSELL, F.R.S.

PRINCIPIA MATHEMATICA

(HASTA EL *56)

Colección
LOGICA Y TEORIA DE LA CIENCIA

Director:
PASCUAL MARTINEZ FREIRE
Profesor agregado numerario de Lógica
Universidad Complutense de Madrid

1981

PARANINFO S.A.

MADRID

Traducido por
J. MANUEL DOMINGUEZ RODRIGUEZ
Profesor del Departamento de Lógica
de la Universidad Complutense.

© Cambridge University Press
© de la edición española,
Paraninfo, S.A. Madrid, España
© de la traducción española,
Paraninfo, S.A. Madrid, España

Título original:
PRINCIPIA MATHEMATICA

Reservados los derechos de edición,
reproducción y adaptación

IMPRESO EN ESPAÑA
PRINTED IN SPAIN

ISBN: 0-521-09187-X (edición inglesa)
ISBN: 84-283-1144-7 (edición española)

Depósito Legal: M-32102-1981

PARANINFO S.A. Magallanes, 25 - MADRID (15) (3-2786)

ALCO, artes gráficas. Jaspe, 34 - Madrid-26

CONTENIDO

Págs.

PREFACIO 7

LISTA ALFABETICA DE PROPOSICIONES RELACIONADAS POR NOMBRES 13

INTRODUCCION A LA SEGUNDA EDICION 15

INTRODUCCION 54

Capítulo I. Explicaciones preliminares de ideas y notaciones 57

Capítulo II. La teoría de tipos lógicos 93

Capítulo III. Símbolos incompletos 124

PARTE I. LOGICA MATEMATICA 145

Sumario de la Parte I 147

Sección A. La teoría de la deducción 150

*1. Ideas y proposiciones primitivas 151
*2. Consecuencias inmediatas de las proposiciones primitivas 158
*3. El producto lógico de dos proposiciones 170
*4. La equivalencia y las reglas formales 176
*5. Miscelánea de proposiciones 184

Sección B. Teoría de las variables aparentes 188

*9. Ampliación de la teoría de la deducción desde los tipos más bajos de proposiciones hasta los más altos 188
*10. Teoría de las proposiciones que contienen una variable aparente .. 199
*11. Teoría de las dos variables aparentes 212
*12. La jerarquía de tipos y el axioma de la reducibilidad 222
*13. La identidad 230
*14. Las descripciones 235

Sección C. Clases y relaciones 249

*20. Teoría general de clases 249
*21. Teoría general de relaciones 263
*22. Cálculo de clases 269

Págs.

*23. Cálculo de relaciones 277
*24. La clase universal, la clase nula y la existencia de clases 280
*25. La relación universal, la relación nula y la existencia de relaciones. 291

Sección D. Lógica de relaciones 294

*30. Funciones descriptivas 295
*31. Conversas de relaciones 301
*32. Relacionantes y relacionados de un término dado con respecto a una relación dada 305
*33. Dominios, dominios conversos, y campos de relaciones 310
*34. El producto relativo de dos relaciones 319
*35. Relaciones con dominios limitados y dominios conversos 328
*36. Relaciones con campos limitados 340
*37. Funciones descriptivas plurales 342
*38. Relaciones y clases derivadas de una función descriptiva doble ... 358
Nota a la Sección D 361

Sección E. Productos y sumas de clases 364

*40. Productos y sumas de clases de clases 366
*41. El producto y suma de una clase de relaciones 377
*42. Miscelánea de proposiciones 382
*43. Las relaciones de un producto relativo con sus factores 386

PARTE II. PROLEGOMENOS AL CARDINAL ARITMETICO 389

Sumario de la Parte II, Sección A 391

Sección A. Clases unitarias y pares 392

*50. La identidad y la diversidad como relaciones 394
*51. Clases unitarias 401
*52. El número cardinal 1 408
*53. Miscelánea de proposiciones en las que intervienen clases unitarias. 413
*54. Pares cardinales 420
*55. Pares ordinales 426
*56. El número ordinal 2_r 437

APENDICE A 445

*8. La teoría de la deducción para proposiciones que contienen variables aparentes 445

APENDICE C 461

Funciones de verdad y otras 461

LISTA DE DEFINICIONES 470

PREFACIO

El tratamiento matemático de los fundamentos de las Matemáticas –que es lo que constituye el objeto de este libro– ha procedido del engarce de dos estudios distintos, ambos, en lo fundamental, muy modernos. Por un lado, contamos con los trabajos de los analistas y geómetras encaminados a formular y sistematizar sus axiomas, así como con las obras de Cantor y de otros autores sobre materias tales como la teoría de conjuntos. Por otra parte, tenemos la lógica simbólica que ahora, tras un necesario período de maduración, ha adquirido –gracias a Peano y a sus seguidores– la adaptabilidad técnica y la comprensión lógica que son esenciales a un instrumento matemático para ocuparse de lo que, hasta este momento, han sido los comienzos de la matemática. De la combinación de ambos estudios se derivan estas dos consecuencias: (1) que los que antiguamente se consideraron –tácita o explícitamente– como axiomas son o bien innecesarios o bien demostrables; (2) que los mismos métodos por los que se demuestran los supuestos axiomas producirán resultados dignos de tenerse en cuenta en ciertas regiones –tales como la del número infinito– que anteriormente se habían considerado como inaccesibles al conocimiento humano. De aquí resulta que el campo de acción de la matemática se agranda, tanto por la inclusión de nuevas materias como por crecimiento, al ocuparse de cuestiones que hasta ahora estaban reservadas a la Filosofía.

Nuestra intención inicial fue la de incluir este libro en *Los Principios de la Matemática,* de forma que constituyese un segundo volumen de la obra. Teniendo presente dicho objetivo, comenzamos a escribirlo en el año 1900. A medida que avanzábamos, se hacía cada vez más evidente que este trabajo era de una envergadura mucho mayor de lo que habíamos supuesto; por otra parte, acerca de muchas cuestiones fundamentales, que en la obra anterior se habían abandonado por oscuras y dudosas, ahora hemos llegado a unas soluciones que creemos que son satisfactorias. Por este motivo se hizo preciso realizar nuestro libro con independencia de *Los Principios de la Matemática.* Sin embargo, hemos rehusado tanto la polémica como la filosofía general, de modo que presentamos nuestras exposiciones de una forma dogmática. La justificación de este proceder es que la principal razón en favor de cualquier teoría acerca de los principios de la matemática debe ser siempre inductiva, es decir, debe apoyarse en el hecho de que dicha teoría nos permita deducir la matemática ordinaria. Es normal en matemáticas que el mayor grado de autoevidencia no se encuentre de manera cabal al comienzo, sino en un momento posterior; por eso, las primeras deducciones, en tanto no se llegue a ese momento, ofrecen más bien razones para creer en las premisas, (puesto que de ellas

se siguen consecuencias verdaderas), que para creer en las consecuencias (dado que ellas resultan de las premisas).

Al elaborar un sistema deductivo, tal como el que se contiene en esta obra, han de realizarse simultáneamente dos tareas contrapuestas. Por una parte, contamos con el modo de analizar, propio de las matemáticas, con miras a averiguar qué premisas se emplean, si éstas son coherentes entre sí, y si pueden reducirse a otras más fundamentales. Por otro lado, una vez tomada decisión por nuestras premisas, tenemos que estructurar de nuevo, en la medida en que lo creamos conveniente, los datos que anteriormente ya habían sido analizados, y cuantas otras consecuencias sean de suficiente interés general como para que merezcan exponerse. La labor previa de análisis no aparece en la presentación definitiva, la cual simplemente expone el resultado del análisis de ciertas ideas no definidas y de proposiciones no demostradas. No pretendemos afirmar que dicho análisis no se pudo haber llevado más lejos; no tenemos razón alguna para suponer que sea imposible encontrar ideas y axiomas más simples, mediante los cuales aquellas de las que hemos partido pudieran ser definidas y demostradas. Todo lo que se afirma es que las ideas y los axiomas de los que partimos son suficientes, pero no que sean necesarios.

Al efectuar deducciones partiendo de nuestras premisas, hemos considerado esencial extenderlas hasta el punto en donde hemos probado que resulta verdadero aquello que de ordinario se da por supuesto. Pero pensamos que tampoco es deseable constreñirnos demasiado estrictamente a esta tarea. Es habitual considerar sólo casos particulares, incluso cuando, con nuestro aparato, resulta igual de sencillo tratar el caso general. Así, por ejemplo, la aritmética cardinal se suele concebir relacionada con los números *finitos;* sin embargo, sus leyes generales sirven igualmente para los números infinitos, e incluso se prueban más fácilmente haciendo caso omiso a la distinción entre finito e infinito. De igual modo, muchas de las propiedades que generalmente se aplican asociándolas a las series son válidas, también, para ordenaciones que no son estrictamente seriales, sino que sólo gozan de alguna de las propiedades que caracterizan a este tipo de ordenaciones. En tales casos, resulta un defecto de tipo lógico hacer la comprobación para una clase particular de combinaciones, cuando perfectamente podría hacerse con mayor generalidad. Un proceso análogo de generalización se inserta, en mayor o menor grado, a lo largo de nuestra obra. Siempre hemos procurado encontrar la hipótesis simple, más razonablemente general, a partir de la cual pueda alcanzarse alguna conclusión dada. Por esta razón, especialmente en las partes últimas del libro, la importancia de una proposición suele radicar en su hipótesis. La conclusión será algo que frecuentemente, en ciertos tipos de casos, resulta familiar; pero la hipótesis será, en la medida de lo posible, lo suficientemente amplia como para admitir muchos otros casos, además de aquellos para los que la conclusión sea familiar.

Consideramos necesario ofrecer las pruebas de manera completa puesto que, de otra forma, apenas es posible ver qué hipótesis se necesitan realmente, o si nuestros resultados se siguen de nuestras premisas explícitas. (Recordamos, de nuevo, que nosotros no afirmamos simplemente que tales y cuales proposiciones son verdade-

ras, sino también que los axiomas que ofrecemos son suficientes para probarlas). Al propio tiempo, si bien son necesarias pruebas íntegras para evitar errores y para convencer a aquellos que pueden albergar dudas por lo que respecta a nuestra corrección, con todo, las pruebas de las proposiciones puede normalmente omitirlas el lector que no esté especialmente interesado por un asunto determinado y que no sienta duda de nuestra exactitud sustancial en dicha materia. Al lector que esté de una manera especial interesado en una determinada parte del libro, probablemente le sea suficiente —por lo que se refiere a las partes primeras— leer los resúmenes de las partes previas, secciones y apartados, ya que éstos ofrecen explicaciones de las ideas que tienen relación con ellas, y los enunciados de las principales proposiciones probadas. Las pruebas que se dan en la Parte I, Sección A, son, sin embargo, necesarias, ya que en el curso de las mismas se explica la manera de hacer el planteamiento de dichas pruebas. Las pruebas de las primeras proposiciones se dan sin omitir ningún paso; pero, conforme avanza la obra, las pruebas se van reduciendo gradualmente, manteniendo sin embargo el suficiente detalle para permitir al lector, mediante la ayuda de referencias, a recomponer las pruebas de forma que no se omita ningún paso.

El orden adoptado es, hasta cierto punto, opcional. Por ejemplo, hemos tratado la aritmética cardinal y la de las relaciones de tipo aritmético antes que las series; pero pudimos haber estudiado en primer lugar las series. No obstante, en gran parte, el orden viene impuesto por las necesidades lógicas.

Una gran parte del esfuerzo que supuso escribir el presente trabajo se ha invertido en tratar las contradicciones y paradojas que han inficcionado la lógica y la teoría de conjuntos. Hemos examinado un gran número de hipótesis en relación con estas contradicciones; muchas de tales hipótesis fueron anticipadas por otros, así como otras muchas han sido inventadas por nosotros mismos. A veces nos ha costado varios meses de trabajo llegar al convencimiento de que una hipótesis era insostenible. En el curso de tan prolongado estudio hemos sido llevados, como era de esperar, a cambiar de vez en cuando nuestro punto de vista; pero gradualmente se nos fue haciendo evidente que, para evitar las contradicciones debería adoptarse alguna forma de teoría de tipos. La forma particular de la teoría de tipos que se propugna en este trabajo no es, bajo el punto de vista lógico, algo indispensable; existen otras varias formas que son igualmente compatibles con la verdad de nuestras deducciones. Nosotros hemos particularizado porque la forma de la teoría de tipos que propugnamos nos parece lo más probable, y porque creímos necesario ofrecer, al menos, una teoría perfectamente definida que evitase las contradicciones. Pero, aunque se adoptase una forma diferente de teoría de tipos, difícilmente se cambiaría nada de nuestro libro. De hecho podemos ir más allá y decir que, aún suponiendo que exista alguna otra forma de evitar las contradicciones, sólo una pequeña parte de nuestro libro —sin contar la que explícitamente trate de tipos— depende, en alguna manera, de la teoría de tipos que se adopte, una vez que se ha visto (como nosotros pretendemos haber mostrado) que es *posible* construir una lógica matemática que no lleve contradicciones. Debe observarse que el efecto

global de la teoría de tipos es negativo: impide ciertas inferencias que de otra manera serían válidas y, sin embargo, no tolera ninguna que sin ella fuese inválida. Por eso, podemos razonablemente confiar en que las inferencias que permita la teoría de tipos sigan siendo válidas aún cuando se hubiese encontrado que tal teoría no fuese válida.

Nuestro sistema lógico se contiene íntegramente en las proposiciones numeradas, que son independientes de la Introducción y de los Sumarios. Tanto la Introducción como los Sumarios son explicativos en sí mismos, y no forman parte de la cadena de deducciones. La explicación de la jerarquía de tipos que se da en la Introducción difiere ligeramente de la dada en el apartado *12. Esta última explicación es la más estricta, y es la que se adopta a lo largo del resto del libro.

La forma simbólica del trabajo nos ha venido impuesta por la necesidad: sin su ayuda hubiésemos sido incapaces de realizar el razonamiento preciso. Se ha desarrollado como consecuencia de una práctica efectiva, y en modo alguno es un añadido introducido por un mero interés expositivo. El método general que guía nuestro empleo de los símbolos lógicos es el debido a Peano. Su gran mérito consiste, no tanto en sus descubrimientos lógicos –bien definidos– ni en los detalles de sus notaciones (ambas cosas son excelentes) cuanto en el hecho de que fue el primero que mostró cómo había que liberar a la lógica simbólica de su indebida obsesión por las formas del álgebra ordinaria; de este modo, logró que fuese un instrumento apto para la investigación. Llevados por nuestro estudio de sus métodos, hemos hecho uso de una gran libertad al construir, o reconstruir, un simbolismo que fuese adecuado para tratar sobre todas las cuestiones que son de nuestro interés. No se han introducido símbolos que no estuviesen apoyados en su utilidad práctica para los objetivos inmediatos de nuestro razonamiento.

En las notas y explicaciones se ofrecerán un cierto número de referencias dadas por anticipado. Aunque, en cada caso, hemos tomado una razonable precaución para cerciorarnos de la exactitud de estas referencias "en avance", no podemos, desde luego, garantizar su exactitud con la misma confianza que tendríamos si se tratase del caso de que fuesen referencias a expresiones ya expuestas con anterioridad.

No nos es posible una manifestación detallada de gratitud a escritores anteriores, ya que hemos tenido que transformar cuanto hemos tomado, a fin de adaptarlo a nuestro sistema y notación. Nuestros principales reconocimientos serán obvios para todos los lectores familiarizados con la literatura sobre esta temática. En cuanto a la notación, hemos seguido en la medida de lo posible a Peano, completándola, cuando fue necesario, con la de Frege o la de Schröder. Sin embargo, gran parte del simbolismo ha tenido que ser nuevo, no tanto debido a la insatisfacción con el simbolismo de otros, cuanto por el hecho de que nos ocupamos de ideas que no habían sido simbolizadas con anterioridad. En todas las cuestiones de análisis lógico, nuestra principal deuda es con Frege. En donde diferimos de él se debe, en gran parte, al hecho de que las contradicciones han mostrado que él –al igual que

ha ocurrido con otros lógicos antiguos y modernos– había permitido deslizar algún error entre sus premisas; de no haber sido por esas contradicciones, hubiese sido imposible detectar tales errores. En cuanto a la Aritmética y a la teoría de series, todo nuestro trabajo está basado sobre el Georg Cantor. Por lo que respecta a la Geometría, hemos tenido continuamente presentes los escritos de V. Staudt, Pasch, Pieri y Veblen.

A. N. W.
B. R.

CAMBRIDGE,
Noviembre de 1910.

NOTA

Todas las referencias cruzadas que aparecen en el texto, incluyendo referencias a definiciones y proposiciones, pertenecen a la segunda edición (1927) y no necesariamente pueden encontrarse en esta edición abreviada.

LISTA ALFABETICA DE PROPOSICIONES, RELACIONADAS POR NOMBRES

Nombre	Número	
Abs	✱2·01.	$\vdash : p \supset \sim p . \supset . \sim p$
Add	✱1·3.	$\vdash : q . \supset . p \vee q$
Ass	✱3·35.	$\vdash : p . p \supset q . \supset . q$
Assoc	✱1·5.	$\vdash : p \vee (q \vee r) . \supset . q \vee (p \vee r)$
Comm	✱2·04.	$\vdash :. p . \supset . q \supset r : \supset : q . \supset . p \supset r$
Comp	✱3·43.	$\vdash :. p \supset q . p \supset r . \supset : p . \supset . q . r$
Exp	✱3·3.	$\vdash :. p . q . \supset . r : \supset : p . \supset . q \supset r$
Fact	✱3·45.	$\vdash :. p \supset q . \supset : p . r . \supset . q . r$
Id	✱2·08.	$\vdash . p \supset p$
Imp	✱3·31.	$\vdash :. p . \supset . q \supset r : \supset : p . q . \supset . r$
Perm	✱1·4.	$\vdash : p \vee q . \supset . q \vee p$
Simp	✱2·02.	$\vdash : q . \supset . p \supset q$
„	✱3·26.	$\vdash : p . q . \supset . p$
„	✱3·27.	$\vdash : p . q . \supset . q$
Sum	✱1·6.	$\vdash :. q \supset r . \supset : p \vee q . \supset . p \vee r$
Syll	✱2·05.	$\vdash :. q \supset r . \supset : p \supset q . \supset . p \supset r$
„	✱2·06.	$\vdash :. p \supset q . \supset : q \supset r . \supset . p \supset r$
„	✱3·33.	$\vdash : p \supset q . q \supset r . \supset . p \supset r$
„	✱3·34.	$\vdash : q \supset r . p \supset q . \supset . p \supset r$
Taut	✱1·2.	$\vdash : p \vee p . \supset . p$
Transp	✱2·03.	$\vdash : p \supset \sim q . \supset . q \supset \sim p$
„	✱2·15.	$\vdash : \sim p \supset q . \supset . \sim q \supset p$
„	✱2·16.	$\vdash : p \supset q . \supset . \sim q \supset \sim p$
„	✱2·17.	$\vdash : \sim q \supset \sim p . \supset . p \supset q$
„	✱3·37.	$\vdash :. p . q . \supset . r : \supset : p . \sim r . \supset . \sim q$
„	✱4·1.	$\vdash : p \supset q . \equiv . \sim q \supset \sim p$
„	✱4·11.	$\vdash : p \equiv q . \equiv . \sim p \equiv \sim q$

INTRODUCCION A LA SEGUNDA EDICION (1)

Al preparar esta nueva edición de los *Principia Mathematica,* los autores hemos pensado que lo mejor sería dejar el texto intacto (salvo en lo que se refiere a erratas de imprenta y a pequeños defectos (2)), aunque éramos conscientes de que había posibilidad de mejoras. El principal motivo por el que se ha tomado esta decisión es que cualquier alteración en las proposiciones traería consigo cambios en las referencias, lo cual supondría un considerable trabajo. Por ello, hemos preferido exponer, en una introducción, las principales mejoras que parecen deseables. Algunas de ellas apenas están abiertas a la discusión; otras son, por ahora, materia opinable.

El más rotundo perfeccionamiento alcanzado en materia de lógica matemática durante los últimos catorce años es la sustitución, en la Parte I, Sección A, del indefinible "p y q son incompatibles" (o, de otro modo, "p y q son ambos falsos") en lugar de los dos indefinibles "no-p" y "p o q". Esto se ha debido al Dr. H. M. Sheffer (3). Consecuentemente, M. Jean Nicod (4) mostró que una sola proposición primitiva podía sustituir a las cinco proposiciones primitivas $*1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}4{\cdot}5{\cdot}6$.

De esto se sigue una gran simplificación en la composición de proposiciones y matrices moleculares; el capítulo *9 queda sustituido por uno nuevo –el *8–, que se ofrece en el Apéndice A de este volumen.

Otro punto acerca del que no cabe duda alguna es que no hay necesidad de distinguir entre variables reales y aparentes; tampoco resulta necesaria la idea primitiva de "aserción de una función proposicional". En todos los casos donde, en los *Principia Mathematica,* aparezcan proposiciones aseveradas de la forma "$\vdash . fx$" o "$\vdash . fp$" debe considerarse que tienen, respectivamente, la significación "$\vdash . (x) . fx$" o "$\vdash . (p) . fp$". Por consiguiente, la proposición primitiva $*1{\cdot}11$ ya no es necesaria. Lo que sí es preciso, a fin de adaptar las proposiciones según este cambio de notación, es establecer el convenio de que, cuando el alcance de una variable aparente sea la totalidad de la proposición aseverada en la que tiene lugar, este hecho no se indicará explícitamente, a no ser que contenga "algún" en lugar de

---

(1) En cuanto a esta introducción, así como a los Apéndices, los autores están muy agradecidos a Mr. F. P. Ramsey, del King's College de Cambridge, que ha leido todo el manuscrito y contribuido con valiosas críticas y sugerencias.

(2) Con respecto a éstos, estamos en deuda con muchos lectores, pero especialmente con los Drs. Behmann y Boscovitch, de Gottinga.

(3) *Trans. Amer. Math. Soc.* Vol. XIV. pp. 481-488.

(4) "Una reducción en el número de proposiciones primitivas de la Lógica". *Proc. Camb. Phil. Soc.* Vol. XIX.

"todo". Es decir, "$\vdash . \phi x$" significa "$\vdash . (x)\,\phi x$; pero en el caso de "$\vdash . (\exists x) . \phi x$" resulta necesario indicar explícitamente el hecho de que interviene "algún" x (y no "todo" x).

Es posible indicar más claramente de lo que se hizo con anterioridad cuáles son las innovaciones introducidas en la Parte I, Sección B, al compararlas con la Sección A. Son tres estas novedades: dos de carácter esencialmente lógico, y la tercera, meramente notacional.

(1) Sustituimos la "p" que aparece en la Sección A por "ϕx", de tal manera que en lugar de "$\vdash . (p) . fp$" tenemos "$\vdash . (\phi,x) . f(\phi x)$". Del mismo modo, si tenemos "$\vdash . f(p, q, r, \ldots)$", podemos hacer la sustitución $\phi x, \phi y, \phi z, \ldots$ en lugar de $p, q, r, \ldots$, o $\phi x, \phi y$ en vez de $p, q,$ y $\phi z, \ldots$ en lugar de $r, \ldots$; y así sucesivamente. De esta manera, obtenemos una porción de nuevas proposiciones generales diferentes de las que aparecen en la Sección A.

(2) En la Sección B introducimos la nueva idea primitiva "$(\exists x) . \phi x$", es decir, proposiciones existenciales que no aparecen en la Sección A. En virtud de la abolición de la variable real, las proposiciones generales de la forma "$(p) . fp$" se encuentran en la Sección A, pero no las de la forma "$(\exists p) . fp$".

(3) Por medio de definiciones, introducimos en la Sección B proposiciones generales que son constitutivos moleculares de otras proposiciones; de este modo, "$(x) . \phi x . \mathrm{v} . p$" significa "$(x) . \phi x \,\mathrm{v}\, p$".

Estas tres innovaciones son las que hacen distinguir la Sección B de la A.

Un punto en el que claramente es deseable su perfeccionamiento es el axioma de la reducibilidad (*12·1·11). Este axioma tiene una justificación puramente pragmática: conduce a los resultados deseados y no a otros. No obstante, no es la clase de axioma con la que podamos quedar satisfechos. Pero tampoco puede decirse que, hasta ahora, se haya conseguido una solución satisfactoria. El Dr. León Chwistech (5) tomó la decisión heróica de prescindir de dicho axioma sin sustituirlo por ningún otro; de su trabajo resulta claro que ese camino nos obliga a tener que sacrificar gran parte de la matemática ordinaria. Existe otra vía que, por razones filosóficas, fue recomendada por Wittgenstein (6). Es la que supone que las funciones de proposiciones son siempre funciones de verdad, y que una función sólo puede darse en una proposición a través de sus valores. Adoptar este punto de vista presenta sus dificultades, pero quizás no sean insuperables (7). Este trae consigo la consecuencia de que todas las funciones de funciones son extensionales. Ello nos exige sostener que "A cree p" no es una función de p. De qué modo sea esto posible es algo que se muestra en el *Tractatus Logico-Philosophicus* (*loc. cit.* y pp. 19-21). No estamos preparados para asegurar que esta teoría sea ciertamente correcta, pero ha merecido la pena el trabajo hecho en las páginas siguientes. Parece

(5) En su "Theory of Constructive Types". Véanse referencias al final de esta Introducción.

(6) *"Tractatus Logico-Philosophicus"*, *5·54 ss.

(7) Véase Apéndice C.

que todo el contenido del Volumen I resulta verdadero (aunque con frecuencia sean necesarias comprobaciones nuevas); la teoría de los cardinales y ordinales inductivos se mantiene; por otro lado, parece que tanto la teoría del infinito de Dedekin como la de las series bien-ordenadas fracasan en buena parte, de tal manera que ya no pueden ser tratados adecuadamente los números irracionales ni, en forma general, los reales. También la prueba de Cantor, en la que $2^n > n$, se desmorona, a no ser que n sea finito. Quizás algún axioma posterior, que ofrezca menos objeciones que el de la reducibilidad, podría dar estos resultados; pero no hemos conseguido encontrarlo.

Debe declararse que el Dr. H. M. Sheffer ha inventado un nuevo y poderoso método en Lógica matemática. Este método, sin embargo, exigiría escribir de nuevo, de una manera total, los *Principia Mathematica.* Recomendamos esta tarea al Dr. Sheffer, puesto que lo publicado hasta ahora por él apenas permite a otros emprender la necesaria reconstrucción.

A continuación procedemos al desarrollo detallado del boceto general expuesto.

I. PROPOSICIONES ATOMICAS Y MOLECULARES

Nuestro sistema se inicia con las "proposiciones atómicas". Estas las aceptamos como algo dado, puesto que los problemas que suscitan por sí mismas pertenecen a la parte filosófica de la Lógica, y no encajan (al menos, por el momento) en un tratamiento matemático.

Las proposiciones atómicas pueden definirse negativamente diciendo que son aquellas proposiciones cuyas partes no son proposiciones, y que, además, no contienen las nociones "todo" ni "algún". Así, por ejemplo, "esto es rojo" y "esto es anterior a aquello" son proposiciones atómicas.

Las proposiciones atómicas también pueden definirse positivamente –y esta es la mejor manera– diciendo que son aquellas proposiciones de las siguientes clases:

$R_1(x)$, que significa "x tiene como predicado a R_1";

$R_2(x, y)$ [o xR_2y], que significa "x tiene la relación R_2 (en intensión) con respecto a y";

$R_3(x, y, z)$, que significa "x, y, z están en la relación triádiça R_3 (en intensión)";

$R_4(x, y, z, w)$, con la significación "x, y, z, w están en la relación tetrádica R_4 (en intensión)";

y así sucesivamente *ad infinitum* o, en todo caso, hasta donde sea posible. La Lógica no sabe si hay, de hecho, relaciones n-ádicas (en intensión); ésta es una cuestión empírica. Conocemos, como un hecho empírico, que hay por lo menos relaciones diádicas (en intensión), puesto que sin ellas las series serían imposibles. Pero la Lógica no se interesa por esta cuestión; a ella le incumbe solamente la

hipótesis sobre la existencia de proposiciones que sean de una forma "tal y tal". En ciertos casos, esta hipótesis es en sí misma de la forma en cuestión, o bien contiene una parte que es de dicha forma; en estos casos, el hecho de que la hipótesis pueda estructurarse demuestra que es verdadera. Pero, incluso cuando una hipótesis se presenta en Lógica, el hecho de que pueda estructurarse es algo que por sí mismo no pertenece a la Lógica.

Dadas todas las proposiciones atómicas verdaderas, juntamente con el hecho de que constituyen la totalidad, cualquier otra proposición verdadera puede deducirse teóricamente por métodos lógicos. Es decir, todo el material bruto requerido para las pruebas puede quedar reducido a proposiciones atómicas verdaderas, juntamente con el hecho de que toda proposición atómica verdadera sea una de las siguientes: (aquí vendría la lista). Este método, de emplearse, acarrearía, según cabe sospechar, una enumeración infinita, ya que parece natural suponer que el número de proposiciones atómicas verdaderas es infinita, si bien esto no debe considerarse como cierto. En la práctica, la generalización no se obtiene por el método de la enumeración completa, debido a que exigiría un conocimiento mayor del que poseemos.

Debemos pasar ahora a las proposiciones moleculares. Para empezar, simbolicemos las proposiciones atómicas por *p, q, r, s, t.* Introducimos la idea primitiva

$$p \mid q$$

que puede leerse "*p* es incompatible con *q*" (8), que será verdadera siempre que una o ambas proposiciones sean falsas. Por ello, también puede leerse así: "*p* es falso o *q* es falso"; o, de otra manera, "*p* implica no-*q*". Pero, como vamos a definir la disyunción, implicación y negación en términos de $p|q$, es preferible, de momento, evitar estos modos de leer $p|q$. El símbolo "$p|q$" se lee "*p* trazo *q*". Ahora establecemos:

$$\begin{aligned} \sim p &. = . p \mid p && \text{Df,} \\ p \supset q &. = . p \mid \sim q && \text{Df,} \\ p \vee q &. = . \sim p \mid \sim q && \text{Df,} \\ p \cdot q &. = . \sim(p \mid q) && \text{Df.} \end{aligned}$$

De este modo, todas las funciones de verdad usuales pueden construirse por medio del trazo.

Obsérvese que, en virtud de lo anterior,

$$p \supset q . = . p \mid (q \mid q) \quad \text{Df.}$$

Encontramos que

$$p . \supset . q . r . \equiv . p \mid (q \mid r).$$

Así, $p \supset q$ es un caso que asume a una función de *tres* proposiciones.

---

(8) Para cuanto sigue, véase Nicod: "A reduction in the number of the primitive propositions of logic", Proc. Camb. Soc. Vol. XIX. pp. 32-41.

Podemos construir nuevas proposiciones, indefinidamente, por medio del trazo; por ejemplo, $(p|q)|r$, $p|(q|r)$, $(p|q)|(r|s)$, y así sucesivamente. Obsérvese que el trazo cumple la ley conmutativa $(p|q) \equiv (q|p)$ pero no la ley asociativa $(p|q)|r \equiv p|(q|r)$. (Por supuesto, estos son resultados que se probarán más adelante). Adviértase también que, cuando construimos una nueva proposición por medio del trazo, no podemos saber si es verdadera o falsa, a no ser que ocurra una de estas dos cosas: (*a*) que conozcamos la verdad o falsedad de alguno de sus componentes, o (*b*) que por lo menos uno de sus componentes aparezca varias veces de un modo adecuado. El caso (*a*) eleva el interés lógico de la *regla de inferencia*, que es:

Dados p y $p|(q|r)$, podemos inferir r.

Esta, u otra variante, debe considerarse como una proposición primitiva. De momento, lo aplicamos sólo cuando p, q, r sean proposiciones atómicas, aunque, más adelante, le daremos una amplitud mayor. Consideremos (*b*) por un momento.

Al construir nuevas proposiciones por medio del trazo, suponemos que éste puede tener en cada uno de sus lados cualquier proposición construida en la forma dicha, y no necesitamos tener una proposición atómica a cada lado. Así, pues, dadas tres proposiciones atómicas, p, q, r, podemos formar primero $p|q$ y $q|r$, y, por tanto, $(p|q)|r$ y $p|(q|r)$. Dadas cuatro, p, q, r, s, podemos formar

$$\{(p|q)|r\}|s,\ (p|q)|(r|s),\ p|\{q|(r|s)\}$$

y, desde luego, otras muchas, permutando p, q, r y s.

Las tres proposiciones de arriba son sustancialmente diferentes. De hecho, tenemos:

$$\{(p|q)|r\}|s \,.\equiv :.\sim p \vee \sim q \,.\, r : \vee : \sim s,$$
$$(p|q)|(r|s) \,.\equiv : p \,.\, q \,.\vee.\, r \,.\, s,$$
$$p|\{q|(r|s)\} \,.\equiv :.\sim p : \vee : q \,.\sim r \vee \sim s.$$

Todas las proposiciones obtenidas por este método resultan de una regla: en "$p|q$" sustituir la p o la q, o ambas, por proposiciones construidas con anterioridad mediante el trazo. Esta regla da lugar a un conjunto bien determinado de nuevas proposiciones, independientes del conjunto de proposiciones atómicas. Todas las proposiciones generadas por este procedimiento (exceptuando las proposiciones atómicas originales) se llamarán "proposiciones moleculares". Las proposiciones moleculares son todas. pues, de la forma $p|q$; pero con la salvedad de que ahora p y q pueden ser ellas mismas proposiciones moleculares. Si p es $p_1|p_2$, p_1 y p_2 pueden ser moleculares; supongamos ahora $p_1 = p_{11}|p_{12}$. La proposición p_{11} puede ser de la forma $p_{111}|p_{112}$; y así sucesivamente. Pero, tras un número finito de pasos de este tipo, llegaríamos a alcanzar los constituyentes atómicos. En una proposición $p|q$, el trazo entre p y q se llama trazo "principal"; si $p = p_1|p_2$, el trazo entre p_1 y p_2 es un trazo secundario; del mismo tipo es el trazo entre q_1 y q_2 si $q = q_1|q_2$. Pero si $p_1 = p_{11}|p_{12}$, el trazo entre p_{11} y p_{12} es un trazo terciario; y así sucesivamente.

Las proposiciones atómicas y moleculares juntas constituyen las "proposiciones elementales". Por tanto, las proposiciones elementales son las proposiciones atómicas juntamente con todas las que pueden generarse de ellas, por medio del trazo aplicado un número finito de veces. Forman un conjunto definido de proposiciones. Por ahora –y hasta nuevo aviso– emplearemos las letras *p, q, r, s* y *t* para designar proposiciones elementales, y no necesariamente proposiciones atómicas. La regla de inferencia expuesta más arriba sigue siendo válida; es decir:

Si *p, q* y *r* son proposiciones elementales, dados *p* y $p|(q|r)$, podemos inferir *r*.

Esta es una proposición primitiva.

Podemos ocuparnos ahora del punto (*b*) mencionado antes. Cuando una proposición molecular contiene a una proposición constituyente, repetida varias veces de una manera adecuada, puede admitirse como verdadera, aunque no tengamos conocimiento de la verdad o falsedad de las proposiciones constituyentes. El ejemplo más sencillo es

$$p \mid (p \mid p),$$

que siempre es verdadero. Significa "*p* es incompatible con la incompatibilidad de *p* consigo mismo", lo cual es obvio. De nuevo, consideremos "$p \,.\, q \,.\supset.\, p$". Esta expresión equivale a

$$\{(p \mid q) \mid (p \mid q)\} \mid (p \mid p).$$

Tomemos ahora "$\sim p \,.\supset.\, \sim p \vee \sim q$". Se convierte en

$$(p \mid p) \mid \{(p \mid q) \mid (p \mid q)\}.$$

Del mismo modo "$p \,.\supset.\, p \vee q$", de otra forma es

$$p \mid [\{(p \mid p) \mid (q \mid q)\} \mid \{(p \mid p) \mid (q \mid q)\}].$$

Todas estas expresiones resultan verdaderas para cualquier elección de *p* y *q*. Lo cierto es que podemos componer verdades invariables de esta clase que formen proposiciones moleculares importantes en Lógica. La Lógica no aporta nada a las proposiciones atómicas, porque sus verdades o falsedades sólo pueden ser conocidas empíricamente. Sin embargo, la verdad de las proposiciones moleculares, cuya forma sea adecuada puede conocerse universalmente sin necesidad de evidencia empírica.

Las leyes de la Lógica, en tanto que relacionadas con proposiciones elementales, son todas aserciones por el hecho de que, cualesquiera que sean las proposiciones elementales *p, q, r,* ..., una determinada función

$$F(p, q, r, \ldots),$$

cuyos valores sean proposiciones moleculares construidas por medio del trazo, es siempre verdadera. La proposición "$F(p)$ es verdadera cualquiera que sea la proposición elemental *p*" se representa así:

$$(p) \cdot F(p).$$

Análogamente, la proposición "$F(p, q, r, \ldots)$ es verdadera, cualesquiera que puedan ser las proposiciones elementales $p, q, r, \ldots$" se expresa por

$$(p, q, r, \ldots) \cdot F(p, q, r, \ldots).$$

Cuando se *asevere* una proposición de este tipo, omitiremos "(p, q, r)", que figura al principio de la expresión. De este modo,

$$\text{"} \vdash . F(p, q, r, \ldots) \text{"}$$

significa la afirmación (como opuesta a la hipótesis) de que $F(p, q, r)$ es verdadera, cualesquiera que sean las proposiciones elementales $p, q, r, \ldots$

(La distinción entre variables reales y aparentes, tal como se encuentra en Frege y en los *Principia Mathematica,* es innecesaria. Cuanto aparezca como una variable real en los *Principia Mathematica* puede considerarse como una variable aparente cuyo alcance sea la totalidad de la proposición aseverada en la que se encuentra.)

La regla de inferencia, en la forma dada más arriba, nunca se requiere en Lógica, sino sólo cuando se trate de Lógica aplicada. Dentro de la Lógica, la regla requerida es diferente. En la Lógica de proposiciones, que es la que nos concierne ahora, la regla que se usa es:

Cualesquiera que sean las proposiciones elementales $p, q, r, \ldots$, dadas "$\vdash . F(p, q, r, \ldots)$" y "$\vdash . F(p, q, r, \ldots) \mid \{G(p, q, r, \ldots) \mid H(p, q, r, \ldots)\}$," podemos inferir "$\vdash . H(p, q, r, \ldots)$."

Más adelante nos encontraremos con otras formas de inferencia. Por el momento, usaremos la forma que acaba de indicarse.

Nicod ha mostrado que, con la ayuda de la regla de inferencia, la Lógica de proposiciones (*1–*5) puede deducirse a partir de las dos proposiciones primitivas siguientes:

$$\vdash . p \mid (p \mid p)$$

y

$$\vdash : p \supset q . \supset . s \mid q \supset p \mid s.$$

La primera puede interpretarse como "p es incompatible con no-p", o como "p o no-p", o como "no (p y no-p)", o como "p implica p". La segunda puede interpretarse como:

$$p \supset q . \supset : q \supset \sim s . \supset . p \supset \sim s,$$

que es una forma del principio del silogismo. Escribiéndola toda en términos de trazo, el principio se convierte en

$$\{p \mid (q \mid q)\} \mid [\{(s \mid q) \mid ((p \mid s) \mid (p \mid s))\} \mid \{(s \mid q) \mid ((p \mid s) \mid (p \mid s))\}].$$

Posteriormente, Nicod ha señalado que ambos principios pueden condensarse en uno sólo. Escrito totalmente en términos de trazo, este único principio es

$$\{p \mid (q \mid r)\} \mid [\{t \mid (t \mid t)\} \mid \{(s \mid q) \mid ((p \mid s) \mid (p \mid s))\}].$$

Puede apreciarse que, escrito de esta forma, el principio resulta menos complejo que el segundo de los principios de arriba, escrito solamente en términos de trazo. Interpretado en lenguaje de implicación, este único principio de Nicod viene a ser

$$p \,.\supset.\, q \,.\, r :\supset.\, t \supset t \,.\, s \mid q \supset p \mid s.$$

En esta forma, parece más complicada que

$$p \supset q \,.\supset.\, s \mid q \supset p \mid s,$$

aunque, considerada en sí misma, es menos compleja.

A partir de la proposición primitiva antes indicada y de la regla de inferencia, puede probarse todo cuanto la Lógica pueda indagar acerca de proposiciones elementales, con tal que añadamos una nueva proposición primitiva, a saber: dada una proposición $(p, q, r, \ldots) \,.\, F(p, q, r, \ldots)$, podemos sustituir $p, q, r, \ldots$ por funciones de la forma

$$f_1(p, q, r, \ldots), \quad f_2(p, q, r, \ldots), \quad f_3(p, q, r, \ldots)$$

y aseverar

$$(p, q, r, \ldots) \,.\, F\{f_1(p, q, r, \ldots), f_2(p, q, r, \ldots), f_3(p, q, r, \ldots), \ldots\},$$

en donde $f_1, f_2, f_3, \ldots$ son funciones construidas por medio del trazo. Puesto que la aserción presentada en primer lugar es aplicable a todas las proposiciones elementales, mientras que la última se aplica sólo a alguna, es obvio que la primera implica la segunda.

Más adelante, nos referiremos a una forma más general de este principio.

II. FUNCIONES ELEMENTALES DE TERMINOS INDIVIDUALES

1. Definición de "individual"

Hemos visto que las proposiciones atómicas son de alguna de las formas de la serie:

$$R_1(x), \; R_2(x, y), \; R_3(x, y, z), \; R_4(x, y, z, w), \; \ldots .$$

Aquí, $R_1, R_2, R_3, R_4, \ldots$ son características de la forma especial en que se encuentran; es decir, R_n no puede darse en una proposición atómica $R_m(x_1 \; x_2, \ldots x_m)$, a no ser que $n = m$, y, en ese caso, sólo puede presentarse como se presenta R_m y no como se presentan $x_1, x_2, \ldots x_m$. Por otra parte, cualquier término que intervenga como una x en $R_n(x_1, x_2, \ldots x_n)$ puede igualmente intervenir como una de las x's en $R_m(x_1, x_2, \ldots x_m)$ aunque m no sea igual a n. Los términos que pueden presentarse en una forma cualquiera de proposición atómica se llaman "individua-

les" o "particulares"; los términos que se presentan tal como se presentan las R se llaman "universales".

Podríamos resumir nuestra definición diciendo: un "individual" es todo cuanto puede ser sujeto de una proposición atómica.

Dada una proposición atómica $R_n\ (x_1, x_2, \ldots x_n)$, a cada una de las x la llamaremos "constituyente" de la proposición, y a R_n "componente" de la proposición (9). Lo mismo diremos respecto de cualquier proposición molecular en la que se presente $R_n\ (x_1, x_2, \ldots x_n)$. Dada una proposición elemental $p|q$, (en donde p y q pueden ser atómicas o moleculares), a p y a q los denominaremos "partes" de $p|q$; a su vez, cada una de las partes de p o q se llamarán partes de $p|q$, y así sucesivamente hasta que lleguemos a las partes atómicas de $p|q$. De este modo, es lo mismo decir que una proposición r "interviene en" $p|q$, que decir que r es una "parte" de $p|q$.

2. Definición de una función elemental de un individual

Dada una proposición elemental cualquiera que contenga una parte de la cual es constituyente un término individual a, pueden obtenerse otras proposiciones sustituyendo a, de manera sucesiva, por otros individuales. De este modo, obtenemos un determinado conjunto de proposiciones elementales. Podemos llamar ϕa a la proposición original, y, por tanto, la función proposicional que se obtenga poniendo una variable x en lugar de la a se llamará ϕx. Así, pues, ϕx es una función cuyo argumento es x cuyos valores son proposiciones elementales. La utilidad esencial de "ϕx" es que abarca en sí un conjunto determinado de proposiciones, a saber, todas aquellas que tienen sus valores con diferentes argumentos.

Ya hemos visto varias funciones especiales de proposiciones. Si p es una parte de alguna proposición molecular, podemos considerar el conjunto de proposiciones que resulten de sustituir p por otras proposiciones. Si llamamos f_p a la proposición molecular original, el resultado al hacer la sustitución por q se llama f_q.

Cuando un individual o una proposición aparece dos veces en una proposición, pueden obtenerse tres funciones según se cambie sólo uno, sólo el otro, o ambos. Por ejemplo, $p|p$ es un valor de una de las tres funciones $p|q$, $q|p$, $q|q$, en donde q es el argumento. Pueden aplicarse consideraciones similares en el caso de que un argumento aparezca más de dos veces. Así, $p|(p|p)$ es un valor de $q|(r|r)$, o de $q|(r|q)$, o de $q|(q|r)$, o de $q|(r|r)$, o de $q|(q|q)$. Cuando aseveremos una proposición "$\vdash . (p) . Fp$", la p debe cambiarse dondequiera que se encuentre. De igual manera, podemos aseverar una proposición de la forma "$(x) . \phi x$", que significa que "todas las proposiciones de la constitución indicada por ϕx son verdaderas"; aquí también, cada vez que intervenga x debe cambiarse.

---

(9) Esta terminología se toma de Wittgenstein.

3. "Siempre verdadero" y "algunas veces verdadero"

Dada una función, puede ocurrir que todos sus valores sean verdaderos; o también puede ser que por lo menos uno de sus valores sea verdadero. La proposición en la que todos los valores de una función $\phi(x, y, z, \ldots)$ sean verdaderos se expresa simbólicamente así:

$$"(x, y, z, \ldots) \cdot \phi(x, y, z, \ldots)"$$

a no ser que deseemos aseverarla, en cuyo caso la aserción se escribe:

$$"\vdash \cdot \phi(x, y, z, \ldots)."$$

Ya hemos visto aserciones de esta clase, en donde las variables eran proposiciones elementales. Ahora precisamos considerar el caso en el que las variables sean individuales y la función sea elemental, es decir, en la que todos sus valores sean proposiciones elementales. Ya no queremos constreñirnos al caso en que se *afirme* que todos los valores de $\phi(x, y, z, \ldots)$ sean verdaderos; lo que deseamos es poder hacer la proposición

$$(x, y, z, \ldots) \cdot \phi(x, y, z, \ldots)$$

parte de una función trazo. Sin embargo, de momento, dejaremos de lado este desiderátum, del que nos ocuparemos en la Sección III de esta Introducción.

Además de la proposición en la que una función ϕx es "siempre verdadera" —esto es, $(x) \cdot \phi x$— necesitamos, asimismo, la proposición en la que ϕx sea "algunas veces verdadera", es decir, verdadera para, al menos, un valor de x. Esto se designa mediante la expresión

$$"(\exists x) \cdot \phi x."$$

De manera similar, la proposición en la que $\phi(x, y, z, \ldots)$ sea "algunas veces verdadero" se simboliza así:

$$"(\exists x, y, z, \ldots) \cdot \phi(x, y, z, \ldots)."$$

Además de $(x, y, z, \ldots) \cdot \phi(x, y, z, \ldots)$ y de $(\exists x, y, z, \ldots) \cdot \phi(x, y, z, \ldots)$, necesitamos otras varias proposiciones de clase análoga. Consideremos primero una función de dos variables. Podemos formar

$$(\exists x) : (y) \cdot \phi(x, y), (x) : (\exists y) \cdot \phi(x, y), (\exists y) : (x) \cdot \phi(x, y), (y) : (\exists x) \cdot \phi(x, y).$$

Estas son sustancialmente proposiciones distintas, entre las que no hay dos que sean equivalentes. Parecería natural, al ir formando estas proposiciones, considerar a la función $\phi(x, y)$ como construida en dos etapas. Dada $\phi(a, b)$, en donde a y b representan constantes, podemos formar, en primer lugar, una función $\phi(a, y)$ que contenga una variable y; así, podemos dar lugar a:

$$(y) \cdot \phi(a, y) \quad \text{y} \quad (\exists y) \cdot \phi(a, y).$$

A continuación, podemos variar la *a,* obteniendo, otra vez, una función de una variable, y conduciéndonos a las cuatro proposiciones siguientes:

$$(x) : (y) . \phi (x, y), (\exists x) : (y) . \phi (x, y), (x) : (\exists y) . \phi (x, y), (\exists x) : (\exists y) . \phi (x, y).$$

Pero también pudimos haber procedido de otra manera, yendo desde $f(a, b)$ a $\phi (x, b)$; desde aquí a $(x) . \phi (x, b)$ y a $(\exists x) . \phi (x, b)$; y desde aquí a:

$$(y) : (x) . \phi (x, y), (\exists y) : (x) . \phi (x, y), (y) : (\exists x) . \phi (x, y), (\exists y) : (\exists x) . \phi (x, y).$$

A todas éstas las llamaremos "proposiciones generales"; así, pues, a partir de la función $\phi (x, y)$ pueden derivarse ocho proposiciones generales. Tenemos que:

$$(x) : (y) . \phi (x, y) : \equiv : (y) : (x) . \phi (x, y),$$
$$(\exists x) : (\exists y) . \phi (x, y) : \equiv : (\exists y) : (\exists x) . \phi (x, y).$$

Pero no existen otras equivalencias en las que se dé la misma particularidad. Por ejemplo, la diferencia que hay entre "$(x) : (\exists y) . \phi (x, y)$" y "$(\exists y) : (x) . \phi (x, y)$" es la misma que, en análisis, hay entre "Para cada ϵ, por pequeña que sea, existe una δ tal que..." y "Existe una δ tal que, para cada ϵ, por pequeña que sea, ..."

Aunque, en vista de las consideraciones indicadas anteriormente, pudiera parecer más sencillo estimar cada función de varias variables como obtenida mediante etapas sucesivas, en cada una de las cuales sólo se afecta a una función de una variable, existen, sin embargo, motivos poderosos para considerarlas bajo otro punto de vista. Hay dos razones en favor del método de "paso a paso"; primero, que sólo las funciones de *una* variable necesitan ser consideradas como ideas primitivas; en segundo lugar, que definiciones tales como las mencionadas parecen apoyarse en *otras* en las que variásemos primero la *x,* manteniendo la *y* constante, *o bien* que variásemos primero la *y,* manteniendo la *x* constante. Lo primero parece ocurrir en los casos en que "(y)" o "$(\exists y)$" están a la izquierda de "(x)" o "$(\exists x)$"; lo segundo, en el caso inverso. Las razones que hay en contra del método de paso-a-paso son: primero, que se interfiere con el método de las matrices, el cual proporciona un orden en lo que se refiere a la formación sucesiva de tipos de proposiciones y de funciones que maneja la teoría de tipos; y, segundo, que nos exige, desde el primer momento, operar con proposiciones tales como $(y) . \phi (a, y)$, que no son elementales. Tómese, por ejemplo, la proposición "$\vdash : q . \supset p \vee q$". Esta será:

$$\vdash :. (p) :. (q) : q . \supset . p \vee q,$$

o

$$\vdash :. (q) :. (p) : q . \supset . p \vee q,$$

y, por tanto, implicará todos los valores, o bien de

$(q) : q . \supset . p \vee q$ considerada como una función de p,

o de $(p) : q . \supset . p \vee q$ considerada como una función de q.

Esto hace imposible comenzar nuestra lógica con proposiciones elementales, como deseamos hacer. Resultaría vano ampliar la definición de proposiciones elementales, puesto que ello sólo haría agrandar los valores de q o p en las funciones indicadas anteriormente. Por lo tanto, parece necesario partir de una función elemental

$$\phi(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n),$$

antes de que pongamos, en lugar de cada x_r, "(x_r)" o "$(\exists x_r)$", las variables de este proceso tomadas en el orden que queramos. Aquí, $\phi(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)$ se llama "matriz", y a lo que le precede se llama "prefijo". Así, por ejemplo, en

$$(\exists x) : (y) . \phi(x, y)$$

"$\phi(x, y)$" es la matriz y "$(\exists x) : (y)$" es el prefijo. Por tanto, se ve claro que una matriz que contenga n variables da origen a $n!\ 2^n$ proposiciones, si ordenamos sus variables de todas las maneras posibles, y distinguiendo, en cada caso, entre "(x_r)" y "$(\exists x_r)$". (Algunas de ellas, sin embargo, resultarán equivalentes). El proceso de obtención de tales proposiciones a partir de una matriz se llamará "generalización", tanto si tomamos "todos los valores" como si "algún valor"; las proposiciones que resulten se llamarán "proposiciones generales".

Más adelante tendremos ocasión de considerar matrices que contengan variables que no sean individuales; podemos, por lo tanto, decir:

Una "matriz" es una función de un cierto número de variables (que pueden, o no, ser individuales) que tiene proposiciones elementales como valores suyos, y que se emplea con objeto de generalizar.

Una "proposición general" es una proposición derivada de una matriz mediante una generalización. Añadamos ahora una definición adicional:

Una "proposición de primer orden" es la que se deriva, por generalización, de una matriz en la cual todas las variables son individuales.

4. Métodos de comprobación de las proposiciones generales

Hay dos métodos fundamentales de comprobación de proposiciones generales: una para proposiciones universales, y la otra para proposiciones tales como las aserciones de existencia. El método para la comprobación de proposiciones universales es como sigue. Dada una proposición

$$\text{"}\vdash . F(p, q, r, \ldots),\text{"}$$

en donde F está construido mediante el trazo, y $p, q, r, \ldots$ son proposiciones elementales, podemos sustituirlas por funciones elementales de individuales, en la forma que deseemos, haciendo

$$p = f_1(x_1, x_2, \ldots x_n),$$
$$q = f_2(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

y así sucesivamente, y, a continuación, aseverar el resultado para todos los valores de $x_1, x_2, \ldots x_n$. Lo que de este modo aseveramos es menos que lo que se afirma en la aserción original, puesto que $p, q, r, \ldots$ podrían originalmente tomar valores que fuesen todos proposiciones elementales, mientras que ahora sólo pueden tomar aquellos que sean valores de $f_1, f_2, f_3, \ldots$ (Dos o más de las $f_1, f_2, f_3, \ldots$ pueden ser idénticas).

Para probar teoremas de existencia contamos con dos proposiciones primitivas, a saber

*8·1. $\vdash . (\exists x, y) . \phi a \mid (\phi x \mid \phi y)$ y

*8·11. $\vdash . (\exists x) . \phi x \mid (\phi a \mid \phi b)$

Aplicando las definiciones, con el fin de expresarlas de una forma más breve, éstas aseveran, respectivamente

$$\phi a . \supset . (\exists x) . \phi x$$

y

$$(x) . \phi x . \supset . \phi a . \phi b.$$

Estas dos proposiciones primitivas se suponen no sólo para una variable sino para un número cualquiera de ellas. De este modo, podemos poner

$$\phi (a_1, a_2, \ldots a_n) . \supset . (\exists x_1, x_2, \ldots x_n) . \phi (x_1, x_2, \ldots x_n),$$
$$(x_1, x_2, \ldots x_n) . \phi (x_1, x_2, \ldots x_n) . \supset . \phi (a_1, a_2, \ldots a_n) . \phi (b_1, b_2, \ldots b_n).$$

La proposición $(x) . \phi x . \supset . \phi a . \phi b$, en esta forma, no parece adecuada para comprobar teoremas de existencia. Pero puede escribirse

$$(\exists x) . \sim \phi x . \vee . \phi a . \phi b$$

o

$$\sim \phi a \vee \sim \phi b . \supset . (\exists x) . \sim \phi x,$$

forma que es idéntica a la *9·11, sin más que cambiar la ϕ por $\sim \phi$. De este modo, nuestras dos proposiciones primitivas son las mismas que las *9·1 y *9·11.

Para efectos de inferencia, todavía suponemos que a partir de $(x) . \phi x$ y de $(x) . \phi x \supset \psi x$ podemos inferir $(x) . \psi x$, y que, a partir de p y de $p \supset q$ podemos inferir q, aún cuando las funciones o proposiciones en cuestión no sean elementales.

Muy a menudo los teoremas de existencia se obtienen de las anteriores proposiciones primitivas de la siguiente manera. Supongamos conocida una proposición

$$\vdash . f(x, x).$$

Dado que $\phi x . \supset . (\exists y) . \phi y$, podemos inferir

$$\vdash . (\exists y) . f(x, y),$$

es decir $\vdash : (x) : (\exists y) . f(x, y).$

De manera semejante, $\vdash : (y) : (\exists x) . f(x, y).$

De nuevo, ya que $\phi(x, y) . \supset . (\exists z, w) . \phi(z, w)$, podemos inferir

$$\vdash . (\exists x, y) . f(x, y)$$

y

$$\vdash . (\exists y, x) . f(x, y).$$

Tanto la prueba universal como las de las proposiciones de existencia podemos ilustrarlas mediante un sencillo ejemplo. Tengamos

$$\vdash . (p) . p \supset p.$$

De aquí, haciendo la sustitución ϕx en lugar de p:

$$\vdash . (x) . \phi x \supset \phi x.$$

A partir de aquí, como en el caso de $f(x, x)$ antes mencionado,

$$\vdash : (x) : (\exists y) . \phi x \supset \phi y,$$
$$\vdash : (y) : (\exists x) . \phi x \supset \phi y,$$
$$\vdash . (\exists x, y) . \phi x \supset \phi y.$$

Aparte de los axiomas especiales que aseveran los teoremas de existencia (tales como el axioma de la reducibilidad, el axioma multiplicativo y el axioma del infinito), las dos proposiciones primitivas antes indicadas proporcionan el único método de probar en lógica los teoremas de existencia. De hecho, ellos siempre se derivan a partir de proposiciones generales de la forma $(x) . f(x, x)$ o $(x) . f(x, x, x)$ o ..., sustituyendo otras variables por alguna de las x que intervienen.

III. PROPOSICIONES GENERALES DE ALCANCE LIMITADO

En virtud de una proposición primitiva, dados $x . \phi(x)$ y $(x) . \phi x \supset \psi x$, podemos inferir $(x) . \psi x$. Sin embargo, hasta ahora, no hemos introducido una notación que nos permitiese establecer la correspondiente *implicación* (como opuesto a *inferencia*). De nuevo, $(\exists x) . \phi x$ y $(x, y) . \phi x \supset \psi y$ nos permiten inferir $(y) . \psi y$; aquí, otra vez, deseamos ser capaces de establecer la correspondiente implicación. De momento, sólo hemos definido las intervenciones de las proposiciones generales como proposiciones aseveradas de una manera total. Teóricamente, éste es el único uso, y no es preciso definir ningún otro. Pero, en la práctica, resulta muy conveniente ser capaces de tratarlas como partes de funciones-trazo. Esto no es más que una cuestión de definición. Introduciendo definiciones adecuadas, las proposiciones de primer orden pueden exponerse de forma que satisfagan todas las proposiciones de *1—*5. Por ello, empleando las proposiciones *1—*5, no será necesario suponer que $p, q, r, \ldots$ sean elementales.

Las definiciones fundamentales se dan más adelante.

Cuando una proposición general se presenta como parte de otra, se dice que tiene un alcance limitado. Si contiene una variable aparente x, el alcance de x se dice que está limitado por dicha proposición general. Así, en $p|\{(x) . \phi x\}$, el alcance de x se limita a $(x) . \phi x$, mientras que en $(x) . p|\phi x$ el alcance de x se extiende a la proposición entera. El alcance se indica por medio de puntos.

El nuevo capítulo *8 (que se da en el Apéndice A) debe reemplazar al *9 en los *Principia Mathematica*. No obstante, su procedimiento general se explicará ahora.

El hecho de que una proposición general aparezca como parte de una función-trazo queda determinado por medio de las siguientes definiciones:

$$\{(x) \cdot \phi x\} \mid q \cdot = \cdot (\exists x) \cdot \phi x \mid q \quad \text{Df},$$
$$\{(\exists x) \cdot \phi x\} \mid q \cdot = \cdot (x) \cdot \phi x \mid q \quad \text{Df},$$
$$p \mid \{(y) \cdot \psi y\} \cdot = \cdot (\exists y) \cdot p \mid \psi y \quad \text{Df},$$
$$p \mid \{(\exists y) \cdot \psi y\} \cdot = \cdot (y) \cdot p \mid \psi y \quad \text{Df}.$$

Estas determinan, en primer lugar, sólo lo que se expresa mediante el trazo cuando éste se encuentra entre dos proposiciones, una de las cuales es elemental, en tanto que la otra es de primer orden. Cuando el trazo se encuentra entre dos proposiciones que sean de primer orden, adoptaremos el siguiente convenio: primero, debe eliminarse la que se encuentre a la izquierda, considerando la de la derecha como si fuese elemental; después, debe eliminarse la de la derecha, de acuerdo, en cada caso, con las definiciones mencionadas antes. Así, pues:

$$\{(x) \cdot \phi x\} \mid \{(y) \cdot \psi y\} \cdot = : (\exists x) : \phi x \mid \{(y) \cdot \psi y\} :$$
$$= : (\exists x) : (\exists y) \cdot \phi x \mid \psi y,$$
$$\{(x) \cdot \phi x\} \mid \{(\exists y) \cdot \psi y\} \cdot = : (\exists x) : \phi x \mid \{(\exists y) \cdot \psi y\} :$$
$$= : (\exists x) : (y) \cdot \phi x \mid \psi y,$$
$$\{(\exists x) \cdot \phi x\} \mid \{(y) \cdot \psi y\} \cdot = : (x) : (\exists y) \cdot \phi x \mid \psi y.$$

La regla acerca del orden de realizar la eliminación se necesita sólo para dar exactitud, ya que ambas maneras dan resultados equivalentes. Por ejemplo, en la última fórmula de arriba, si hubiésemos eliminado primero la y obtendríamos

$$(\exists y) : (x) \cdot \phi x \mid \psi y,$$

lo cual requiere o bien $(x) \cdot \sim \phi x$ o bien $(\exists y) \cdot \sim \psi y$, y entonces es verdadero.

Y

$$(x) : (\exists y) \cdot \phi x \mid \psi y$$

es verdadero en las mismas circunstancias. Esta posibilidad de cambiar el orden de las variables en el prefijo se debe sólo a la forma en que ocurre, es decir, al hecho de que x sólo se presente en un lado del trazo e y sólo en el otro. El orden de las variables en el prefijo es indiferente, siempre que una de ellas aparezca en un lado determinado del trazo, en tanto que las veces que aparezca la otra lo sea sólo en el otro lado. En general, no tenemos

$$(\exists x) : (y) \cdot \chi(x, y) : \equiv : (y) : (\exists x) \cdot \chi(x, y);$$

aquí, el lado de la derecha es más frecuentemente verdadero que el del lado izquierdo. Pero tenemos

$$(\exists x) : (y) \cdot \phi x \mid \psi y : \equiv : (y) : (\exists x) \cdot \phi x \mid \psi y.$$

La posibilidad de cambiar el orden de las variables en el prefijo cuando están separadas por un trazo es una proposición primitiva. En general, resulta conveniente situar a la izquierda aquellas variables en las que intervengan el "todos", y a la derecha las que tengan el "algunos", una vez que haya tenido lugar la eliminación, y suponiendo siempre que las variables se presenten de manera que sea aplicable nuestra proposición primitiva.

Por lo que respecta a la proposición primitiva indicada anteriormente, no es preciso que el trazo que separa la x y la y deba ser el trazo principal; por ejemplo

$$p \mid [\{(\exists x) \cdot \phi x\} \mid \{(y) \cdot \psi y\}] \cdot = \cdot p \mid [(x) : (\exists y) \cdot \phi x \mid \psi y] \cdot$$
$$= : (\exists x) : (y) \cdot p \mid (\phi x \mid \psi y) :$$
$$\equiv : (y) : (\exists x) \cdot p \mid (\phi x \mid \psi y).$$

Todo lo que sí es necesario es que haya *algún* trazo que separe la x de la y. Cuando éste no sea el caso, el orden, en general, no puede cambiarse. Consideremos, por ejemplo, la matriz

$$\phi x \vee \psi y \cdot \sim \phi x \vee \sim \psi y.$$

Esta puede escribirse $(\phi x \supset \psi y) \mid (\psi y \supset \phi x)$

o $\{\phi x \mid (\psi y \mid \psi y)\} \mid \{\psi y \mid (\phi x \mid \phi x)\}.$

Aquí no hay un trazo que separe todas las x que aparecen en la expresión de todas las y; de hecho, las dos proposiciones

$$(y) : (\exists x) \cdot \phi x \vee \psi y \cdot \sim \phi x \vee \sim \psi y$$

y

$$(\exists x) : (y) \cdot \phi x \vee \psi y \cdot \sim \phi x \vee \sim \psi y$$

no son equivalentes, salvo para valores especiales de ϕ y de ψ.

Mediante las definiciones dadas anteriormente, somos capaces de derivar todas las proposiciones, de cualquier orden, a partir de una matriz de proposiciones elementales combinadas por medio del trazo. Dada una matriz tal que contenga una parte p, podemos sustituir la p por ϕx, o $\phi(x, y)$, o etc., y proceder a añadir el prefijo (x), o $(\exists x)$, o (x, y), o $(x) : (\exists y)$, o $(y) : (\exists x)$, etc. Si figurasen tanto p como q, podemos sustituir la p por ϕx y la q por ψy, o podemos reemplazar ambas por ϕx, o una por ϕx y la otra por alguna función-trazo de ϕx.

En el caso de una proposición tal como

$$p \mid \{(x) : (\exists y) \cdot \psi(x, y)\}$$

debemos considerarla como un caso de $p \mid \{(x) \cdot \phi x\}$, y primero eliminar la x. Así, pues,

$$p \mid \{(x) : (\exists y) \cdot \psi(x, y)\} \cdot = : (\exists x) : (y) \cdot p \mid \psi(x, y).$$

Es decir, las definiciones de $\{(x) \cdot \phi x)\} \mid q$, etc., deben aplicarse de forma inalterable cuando ϕx no sea una función elemental.

Las definiciones de $\sim p$, $p \vee q$, $p \,.\, q$, $p \supset q$ deben emplearse sin cambio. Por tanto

$$\begin{aligned}
\sim\{(x) \,.\, \phi x\} \,.\, &= : \{(x) \,.\, \phi x\} \mid \{(x) \,.\, \phi x\} : \\
&= : (\exists x) : \phi x \mid \{(x) \,.\, \phi x\} : \\
&= : (\exists x) : (\exists y) \,.\, (\phi x \mid \phi y), \\
\sim\{(\exists x) \,.\, \phi x\} \,.\, &= : (x) : (y) \,.\, (\phi x \mid \phi y), \\
p \,.\supset.\, (x) \,.\, \phi x : &= : p \mid [\{(x) \,.\, \phi x\} \mid \{(x) \,.\, \phi x\}] : \\
&= : p \mid \{(\exists x) : (\exists y) \,.\, (\phi x \mid \phi y)\} : \\
&= : (x) : (y) \,.\, p \mid (\phi x \mid \phi y), \\
(x) \,.\, \phi x \,.\supset.\, p : &= : \{(x) \,.\, \phi x\} \mid (p \mid p) : \\
&= : (\exists x) \,.\, \phi x \mid (p \mid p) : = : (\exists x) \,.\, \phi x \supset p, \\
(x) \,.\, \phi x \,.\vee.\, p : &= : [\sim\{(x) \,.\, \phi x\}] \mid \sim p : \\
&= : \{(\exists x) : (\exists y) \,.\, (\phi x \mid \phi y)\} \mid (p \mid p) : \\
&= : (x) \,.\, \{(\exists y) \,.\, (\phi x \mid \phi y)\} \mid (p \mid p) : \\
&= : (x) : (y) \,.\, (\phi x \mid \phi y) \mid (p \mid p), \\
p \,.\vee.\, (x) \,.\, \phi x : &= : (x) : (y) \,.\, (p \mid p) \mid (\phi x \mid \phi y).
\end{aligned}$$

Debe observarse que en estas expresiones aparecen dos variables, cuando se esperaba que sólo hubiese una. Más adelante, encontraremos que dos variables pueden reducirse a una; es decir, tendremos:

$$\begin{aligned}
(\exists x) : (\exists y) \,.\, \phi x \mid \phi y : &\equiv . (\exists x) \,.\, \phi x \mid \phi x, \\
(x) : (y) \,.\, \phi x \mid \phi y : &\equiv . (x) \,.\, \phi x \mid \phi x.
\end{aligned}$$

Esto nos lleva a

$$\begin{aligned}
\sim\{(x) \,.\, \phi x\} \,.\, &\equiv . (\exists x) \,.\sim \phi x, \\
\sim\{(\exists x) \,.\, \phi x\} \,.\, &\equiv . (x) \,.\sim \phi x.
\end{aligned}$$

Pero no podemos probar estas proposiciones en este momento; y, aunque pudiésemos, no nos serían de gran utilidad, puesto que todavía no sabemos que, cuando dos proposiciones generales son equivalentes, una puede sustituirse por la otra como parte de una función-trazo sin que cambie el valor de verdad.

En consecuencia, supongamos ahora que tenemos una función-trazo en la que p aparece varias veces, —digamos $p|(p|p)$— y que deseamos sustituir la p por $(x) \,.\, \phi x$; tendremos que cambiar la segunda p por "$(y) \,.\, \phi y$", y la tercera por "$(z) \,.\, \phi z$". De este modo, la proposición resultante contendrá tantas variables distintas cuantas sean las p que intervengan.

Las proposiciones primitivas que se requieren, y que ya fueron mencionadas con anterioridad, son las cuatro siguientes:

(1) $\vdash . (\exists x, y) \,.\, \phi a \mid (\phi x \mid \phi y)$, *i.e.* $\vdash : \phi a \,.\supset.\, (\exists x) \,.\, \phi x$.

(2) $\vdash . (\exists x) \,.\, \phi x \mid (\phi a \mid \phi b)$, *i.e.* $\vdash : (x) \,.\, \phi x \,.\supset.\, \phi a \,.\, \phi b$.

(3) La regla de inferencia, ampliada; esto es: a partir de $(x) \,.\, \phi x$ y de $(x) \,.\, \phi x \supset \psi x$, podemos inferir $(x) \,.\, \psi x$, aunque ϕ y ψ no sean elementales.

(4) Si todas las x que aparecen se separan de todas las y por medio de un determinado trazo, el orden de las x y de las y pueden cambiarse en el prefijo; esto es:

En lugar de $(\exists x) : (y) \,.\, \phi x | \psi y$ podemos poner $(y) : (\exists x) \,.\, \phi x | \psi y$, y *viceversa,* aunque esto sólo sea una parte de la proposición total aseverada.

Las proposiciones primitivas mencionadas antes son aplicables, no sólo en el caso de una variable, sino para cualquier número.

Por medio de las proposiciones primitivas anteriormente indicadas, puede probarse que todas las proposiciones del *1 al *5 se aplican igualmente en el caso de que una o varias de las proposiciones *p, q, r,* ... que intervengan no sean elementales. Para ello, utilizamos el trabajo de Nicod, quien comprobó que todas las proposiciones primitivas del *1 pueden deducirse de

$$\vdash . p \supset p$$

y de

$$\vdash . p \supset q \,.\, \supset \,.\, s \,|\, q \supset p \,|\, s$$

junto con la regla de inferencia: "Dados p y $p|(q|r)$ podemos inferir r".

Por tanto, cuanto hacemos es mostrar que las proposiciones expresadas antes siguen siendo verdaderas cuando *p, q, s,* o algunas de ellas, no sean elementales. Esto se hace en el *8 del Apéndice A.

IV. LAS FUNCIONES COMO VARIABLES

El uso esencial de una variable es elegir un cierto conjunto de proposiciones elementales, y capacitarnos para afirmar que todos los miembros de esa estructura son verdaderos, o que, al menos, un miembro es verdadero. Ya hemos empleado funciones de individuales, mediante la sustitución de ϕx en lugar de p en las proposiciones de los *1—*5, así como por las proposiciones primitivas del *8. Pero, hasta ahora, siempre hemos supuesto que la función se mantiene constante mientras se varía la proposición individual, y no hemos considerado los casos en donde tengamos "$\exists\phi$", o donde el alcance de "ϕ" sea menor que toda la proposición aseverada. Es necesario, ahora, considerar tales casos.

Supongamos que a es una constante. Entonces, "ϕa" significará, para los diversos valores de ϕ, todas las diferentes proposiciones elementales de las cuales a sea un constituyente. Esta es una estructura de proposiciones elementales diferente de cualquier otra que pueda obtenerse variando las proposiciones individuales; consecuentemente, esto da origen a nuevas proposiciones generales. Los valores de la función son todavía proposiciones elementales, igual que cuando el argumento es un individual; pero hay nuevas estructuras de proposiciones elementales, diferentes de las anteriores.

Como más adelante tendremos ocasión de considerar funciones cuyos valores no son proposiciones elementales, queremos distinguir las que tienen por valores proposiciones elementales mediante un signo de admiración colocado entre la letra que simboliza la función y la letra que expresa al argumento. Así, por ejemplo, "$\phi\,!\,x$" es una función de dos variables, x y $\phi\,!\,\hat{z}$. Esta es una matriz, ya que no contiene variable aparente y tiene como valores a proposiciones elementales. En lo sucesivo escribiremos "$\phi\,!\,x$" donde, hasta ahora, habíamos puesto ϕx.

Si sustituimos la x por una constante a, podemos formar proposiciones tales como

$$(\phi)\,.\,\phi\,!\,a,\ (\exists\phi)\,.\,\phi\,!\,a.$$

Estas no son proposiciones elementales y, por consiguiente, no son de la forma $\phi\,!\,a$. La aserción de tales proposiciones se deriva de las matrices mediante el método expuesto en el *8. Las proposiciones primitivas del *8 se aplicarán cuando las variables, o algunas de ellas, sean funciones elementales, o también cuando todas ellas sean individuales.

Una función puede aparecer en una matriz solamente a través de sus valores (10). Para obtener una matriz procédase, como se hizo anteriormente, poniendo $\phi\,!\,x$, $\psi\,!\,y$, $\chi\,!\,z$, ... en lugar de p, q, r, ... en alguna proposición molecular construida por medio del trazo. Entonces podemos aplicar las reglas del *8 a ϕ, ψ, χ, ... así como a x, y, z, ... La diferencia entre una función de un individual y una función de una función elemental de individuales es que, en la primera, el paso de un valor a otro se realiza haciendo la misma expresión sobre un individual diferente, mientras que en la segunda se lleva a cabo haciendo una expresión diferente acerca del mismo individual. Así, el paso de "Sócrates es mortal" a "Platón es mortal" es un paso desde $f\,!\,x$ a $f\,!\,y$; pero el paso de "Sócrates es mortal" a "Sócrates es sabio" es un paso desde $\phi\,!\,a$ a $\psi\,!\,a$. Una variación funcional está implícita en una proposición tal como: "Napoleón tenía las características de un gran general".

Tomando la colección de proposiciones elementales, cada matriz tiene valores, todas las cuales pertenecen a dicha colección. Cada una de las proposiciones generales se origina de alguna matriz por generalización (11). Intrínsecamente, cada matriz determina a una cierta clasificación de proposiciones elementales que, a su vez, determina el alcance de la generalización de tal matriz. Así, pues, "x ama a Sócrates" engloba una cierta colección de proposiciones, generalizadas en las formas "$(x)\,.\,x$ ama a Sócrates" y "$(\exists x)\,.\,x$ ama a Sócrates". Pero "$\phi\,!$ Sócrates" recoge, de entre las proposiciones elementales, aquellas que mencionan a Sócrates. Las

(10) Este supuesto es fundamental en la teoría siguiente. Presenta dificultades que, de momento, pasaremos por alto. Sustituye (no de una manera completamente adecuada) al axioma de la reducibilidad. Esto se discute en el Apéndice C.

(11) En una proposición de la Lógica todas las variables de la matriz deben estar generalizadas. En otras proposiciones generales, tales como "todos los hombres son mortales", *algunas* de las variables de la matriz se sustituyen por constantes.

generalizaciones "$(\phi)\,.\,\phi\,!$ Sócrates" y "$(\exists\phi)\,.\,\phi\,!$ Sócrates" constituyen una clase de proposiciones elementales que no pueden obtenerse de una variable individual. Pero cualquier valor de "$\phi\,!$ Sócrates" es una proposición elemental ordinaria; la novedad introducida por la variable ϕ es una novedad de clasificación, no de material clasificado. Por otra parte, $(x)\,.\,x$ ama a Sócrates, $(\phi)\,.\,\phi\,!$ Sócrates, etc., son nuevas proposiciones no contenidas dentro de las proposiciones elementales. Esta es la cuestión del *8 que muestra que estas proposiciones obedecen a las mismas reglas que las proposiciones elementales. El método de prueba no considera lo que las variables sean, siempre que todas las funciones que intervengan tengan valores que sean proposiciones elementales. Las variables pueden por sí mismas ser proposiciones elementales, como ocurre en las *1—*5.

Una función variable que tiene valores que no son proposiciones elementales inicia un nuevo conjunto. Pero las variables de esta clase parecen innecesarias. Cada proposición elemental es un valor de $\phi\,!\,\hat{x}$; por lo tanto

$$(p)\,.\,fp\,.\equiv.\,(\phi,x)\,.\,f(\phi\,!\,x):(\exists p)\,.\,fp\,.\equiv.\,(\exists\phi,x)\,.\,f(\phi\,!\,x).$$

Por consiguiente, todas las proposiciones de segundo orden, en las que la variable es una proposición elemental, pueden derivarse de matrices elementales. La cuestión acerca de otras proposiciones de segundo orden se tratará en la sección siguiente. Una función de dos variables —digamos $\phi\,(x, y)$— abarca una cierta clase de clases de proposiciones. Tendremos la clase $\phi\,(a, y)$ para una a dada y una variable y; después la clase de todas las clases $\phi\,(a, y)$ según varíe a. El considerar a nuestra función como dando origen a la clase $\phi\,(a, y)$ o a la $\phi\,(x, b)$ depende del orden de generalización que se haya adoptado. Así, pues, "$(\exists x):(y)$" abarca a $\phi\,(a, y)$, pero "$(y):(\exists x)$" abarca a $\phi\,(x, b)$.

Consideremos, ahora, la matriz $\phi\,!\,x$ como una función de dos variables. Si primero variamos la x, dejando fija la ϕ (lo que parece ser el orden más natural), formamos una clase de proposiciones $\phi\,!\,x$, $\phi\,!\,y$, $\phi\,!\,z$, ... que difieren únicamente en la sustitución de una proposición individual por otra. Habiendo realizado una de dichas clases, podemos hacer otra, y así sucesivamente, hasta que hayamos efectuado todos los cambios posibles. Pero supongamos ahora que variamos primero la ϕ, manteniendo fija la x, e igual a a. En este caso, constituimos la clase de todas las proposiciones de la forma $\phi\,!\,a$, es decir, todas las proposiciones elementales de las que a es un constituyente; a continuación, formamos $\phi\,!\,b$; y así sucesivamente. El conjunto de las proposiciones que son valores de $\phi\,!\,a$ es un conjunto que no puede obtenerse variando las proposiciones individuales, es decir, no es de la forma fx [por cuanto f es constante y x una variable]. Esto es lo que hace a ϕ una nueva clase de variable, diferente de x. Esto también ocurre porque una generalización de la forma $(\phi)\,.\,F\,!\,(\phi\,!\,\hat{z}, x)$ no da lugar a una función de la forma $f\,!\,x$ [debido a que la f es constante]. Obsérvese también que, mientras a es un constituyente de $f\,!\,a$, f no lo es; por ello, la matriz $\phi\,!\,x$ presenta la particularidad de que, cuando se asigna un valor a x, este valor es un constituyente del resultado; pero, cuando se asigna un valor a ϕ, este valor se absorbe en la proposición resultante y desaparece

por completo. Podemos definir una función $\phi ! \hat{x}$ como la clase de semejanza que existe entre proposiciones cuando un resultado procede del otro mediante la sustitución de una proposición individual por otra.

Hemos visto que hay matrices que contienen, como variables, funciones de individuales. Podemos simbolizar una matriz de este tipo así:

$$f!(\phi ! \hat{z}, \psi ! \hat{z}, \chi ! \hat{z}, \ldots x, y, z, \ldots).$$

Dado que una función sólo puede tener lugar a través de sus valores, $\phi ! \hat{z}$ (p. ej.) sólo puede ocurrir en la matriz anterior por la presencia de $\phi ! x$, $\phi ! y$, $\phi ! z$, ... o de $\phi ! a$, $\phi ! b$, $\phi ! c$, ..., en donde a, b, c son constantes. Las constantes no se presentan en la Lógica; es decir, las a, b, c, que hemos supuesto que son constantes, se consideran obtenidas mediante una asignación extralógica de valores a las variables. Ellas pueden, por tanto, estar absorbidas por las x, y, z, ... Ahora, las propias x, y, z sólo se presentarán en la Lógica como argumentos para las funciones variables. Por lo tanto, cualquier matriz que contenga las variables $\phi ! \hat{z}$, $\psi ! \hat{z}$, $\chi ! \hat{z}, x, y, z$, y no otras, si es de la clase que puede presentarse explícitamente en Lógica, resultará de la sustitución de $\phi ! x$, $\phi ! y$, $\phi ! z$, $\psi ! x$, $\psi ! y$, $\psi ! z$, $\chi ! x$, $\chi ! y$, $\chi ! z$, o algunas de ellas, en lugar de las proposiciones elementales que se encuentran en alguna función-trazo.

Es preciso explicar ahora lo que se entiende cuando hablamos de una "matriz que puede presentarse explícitamente en Lógica", o –como podemos denominarla– una "matriz lógica". Una matriz lógica es la que no contiene constantes. Así, pues, $p|q$ es una matriz lógica; también lo es $\phi ! x$, en donde tanto la ϕ como la x son variables. Tomando una proposición elemental cualquiera, obtendremos una matriz lógica si sustituimos todos sus componentes y constituyentes por variables. De las matrices lógicas resultan otras matrices mediante la asignación de valores a algunas de sus variables. Hay, sin embargo, varios modos de analizar una proposición; y, por tanto, de una proposición dada pueden derivarse varias matrices lógicas. De este modo, una proposición que sea un valor de $p|q$ también será un valor de $(\phi ! x)|(\psi ! y)$ y de $\chi ! (x, y)$. Según sean los objetivos, se requieren formas diferentes; pero todas las formas de las matrices requeridas explícitamente en Lógica son matrices lógicas (según la definición dada). Esto no es nada más que una muestra del hecho de que la Lógica aspira siempre a la generalización completa. La prueba de una matriz lógica es la que puede expresarse sin introducir otros símbolos que los de la Lógica; por ejemplo, no debemos necesitar del símbolo "Sócrates". Consideremos la expresión

$$f!(\phi ! \hat{z}, \psi ! \hat{z}, \chi ! \hat{z}, \ldots x, y, z).$$

Cuando se asigna un valor a f, esto representa una matriz que contiene las variables $\phi, \psi, \chi, \ldots x, y, z, \ldots$ Pero, mientras f permanezca sin asignación, es una matriz de una nueva clase que contiene la nueva variable f. A f la denominamos "función de segundo orden" porque cuenta con funciones entre sus argumentos. Cuando se

asignan valores no sólo a f, sino también a ϕ, ψ, χ, ... x, y, z, ..., obtenemos una proposición elemental; pero cuando se asigna un valor sólo a f, obtenemos una matriz que contiene como variables sólo funciones de primer orden e individuales. Esto es semejante a lo que sucede cuando consideramos la matriz $\phi ! x$. Si damos valores a ϕ y a x, obtenemos una proposición elemental; si damos un valor sólo a la ϕ, obtenemos una matriz que contiene sólo un individual como variable.

No existe una matriz lógica de la forma $f ! (\phi ! \hat{z})$. Las únicas matrices en las que $\phi ! \hat{z}$ es el único argumento son aquellas que contienen $\phi ! a$, $\phi ! b$, $\phi ! c$, ..., en donde a, b, c, ... son constantes; pero éstas, derivadas de la matriz lógica $\phi ! x$, no son matrices lógicas. Ya que ϕ sólo puede presentarse a través de sus valores, debe aparecer, en una matriz lógica, con uno o más argumentos variables. Las funciones lógicas más simples con sólo ϕ son $(x) . \phi ! x$ y $(\exists x) . \phi ! x$, pero éstas no son matrices. Una matriz lógica

$$f ! (\phi ! \hat{z}, x_1, x_2, \ldots x_n)$$

siempre se deriva de una función-trazo

$$F(p_1, p_2, p_3, \ldots p_n)$$

sustituyendo $\phi ! x_1$, $\phi ! x_2$, ... $\phi ! x_n$ en lugar de p_1, p_2, ... p_n. Este es el único método de construir tales matrices. (Podemos, no obstante, tener $x_r = x_s$ como algunos valores de r y s).

Las funciones de segundo orden gozan de dos propiedades conexionadas que las de primer orden no tienen. La primera de éstas es que, cuando a f se le asigna un valor, el resultado puede ser una matriz lógica; la segunda es que pueden asignarse ciertos valores constantes a f sin salirse de la Lógica.

Comencemos por el primer punto: $f ! (\phi ! \hat{z}, x)$, por ejemplo, es una matriz que contiene tres variables, f, ϕ, y x. Las siguientes matrices lógicas (entre un número infinito) resultan de la de arriba signando valores a f: $\phi ! x$, $(\phi ! x) | (\phi ! x)$, $\phi ! x \supset \phi ! x$, etc. Similarmente $\phi ! x \supset \phi ! y$, que es una matriz lógica, resulta de asignar un valor a f en $f ! (\phi ! \hat{z}, x, y)$. En todos estos casos, el valor constante asignado a f es uno que puede expresarse sólo en símbolos lógicos (lo cual era la segunda propiedad de f). Este no es el caso de $\phi ! x$: a fin de asignar un valor a ϕ, debemos introducir lo que podemos llamar "constantes empíricas", tales como "Sócrates", "mortalidad" y "ser griego". Las funciones de x que pueden formarse sin salir de la Lógica deben contener una función como variable generalizada; serán (en el caso más sencillo) de las formas $(\phi) . \phi ! x$ y $(\exists \phi) . \phi ! x$.

Sin embargo, la peculiariedad anterior de funciones de segundo y de órdenes superiores es arbitraria. Pudimos haber adoptado, en Lógica, los símbolos

$$R_1(x), R_2(x, y), R_3(x, y, z), \ldots,$$

en donde R_1 representa un predicado variable, R_2 una relación diádica va-

riable (en intensión), y así sucesivamente. Cada uno de los símbolos $R_1(x), R_2(x, y), R_3(x, y, z)$, ... es una matriz lógica, de forma que, si la usamos, tendríamos matrices lógicas que no contienen funciones variables. Quizás merezca la pena que recordemos el significado de "$\phi ! a$", siendo a una constante. El significado es el siguiente. Consideremos un número finito de proposiciones de diversas formas $R_1(x), R_2(x, y)$, ..., y combinémoslas por medio del trazo en la forma que deseemos, permitiendo que cualquiera de ellas pueda repetirse un número finito de veces. Si, por lo menos una de ellas, tiene una a como constituyente, esto es, es de la forma

$$R_n(a, b_1, b_2, \ldots b_{n-1}),$$

entonces, la proposición molecular que construyamos es de la forma $\phi ! a$, es decir, es un valor de "$\phi ! a$" con una ϕ adecuada. Desde luego, esto también es válido para la propia proposición $R_n(a, b_1, b_2, \ldots b_{n-1})$. No cabe duda de que la Lógica de proposiciones, y, más aún, de las proposiciones generales relativas a un argumento dado, sería intolerablemente complicada si nos abstuviésemos del empleo de funciones variables; pero tampoco puede decirse que ello fuese imposible. En cuanto a la cuestión de las matrices, pudimos formar una matriz $f ! (R_1, x)$, de la cual $R_1(x)$ fuese un valor. Es decir, las propiedades de las matrices de segundo orden, que hemos discutido, también deben pertenecer a las matrices que contengan universales variables. No pueden pertenecer a matrices que contengan sólo individuales variables.

Asignando $\phi ! \hat{z}$ y x en $f ! (\phi ! \hat{z}, x)$, mientras se deja la f como variable, obtenemos un conjunto de proposiciones elementales que no pueden obtenerse por medio de variables que representen a individuales y a funciones de primer orden. Esto es el por qué la nueva variable f es útil.

Podemos proceder de igual manera con las matrices

$$F ! \{f ! (\hat{\phi} ! \hat{z}, \hat{x}), g ! (\hat{\phi} ! \hat{z}, \hat{x}), \ldots \psi ! \hat{z}, \chi ! \hat{z}, \ldots x, y, \ldots\}$$

y así sucesivamente, de forma indefinida. Esto no representa más que nuevos modos de agrupar proposiciones elementales, llevando a nuevas formas de generalización.

V. FUNCIONES QUE NO SON MATRICES

Cuando una matriz contiene varias variables, pueden obtenerse funciones de algunas de ellas cambiando las otras en variables aparentes. Las funciones que se obtienen de esta manera no son matrices, y sus valores no son proposiciones elementales. Los ejemplos más sencillos son

$$(y) . \phi ! (x, y) \quad \text{y} \quad (\exists y) . \phi ! (x, y).$$

Cuando tenemos una proposición general $(\phi) . F \{\phi ! \hat{z}, x, y, \ldots\}$, los únicos valo-

res que puede tomar ϕ son matrices, de forma que no se incluyen funciones que contengan variables aparentes. Podemos, si es nuestro gusto, introducir una nueva variable, para denotar no sólo funciones tales como $\phi\,!\,\hat{x}$, sino también como

$$(y)\,.\,\phi\,!\,(\hat{x}, y),\ (y, z)\,.\,\phi\,!\,(\hat{x}, y, z),\ \ldots\ (\exists y)\,.\,\phi\,!\,(\hat{x}, y),\ \ldots;$$

en una palabra, todas aquellas funciones de una variable que puedan derivarse, por generalización, de matrices que contengan sólo variables individuales. Denotemos cualquiera de dichas funciones mediante $\phi_1 x$, o $\psi_1 x$, o $\chi_1 x$, etc. En estos casos, el sufijo 1 se coloca para indicar que los valores de las funciones pueden ser las proposiciones de primer orden que resulten de la generalización de los individuales. En virtud del *8, ningún inconveniente puede surgir por incluir funciones de tal tipo junto con las matrices como valores de variables únicas.

Teóricamente, no es necesario introducir variables tales como ϕ_1, porque pueden sustituirse por una conjunción o disyunción infinitas. Así, p. ej.

$$(\phi_1)\,.\,\phi_1 x\,.\equiv :(\phi)\,.\,\phi\,!\,x : (\phi, y)\,.\,\phi\,!\,(x, y) : (\phi) : (\exists y)\,.\,\phi\,!\,(x, y) : \text{etc.},$$
$$(\exists\phi_1)\,.\,\phi_1 x\,.\equiv :(\exists\phi)\,.\,\phi\,!\,x : \mathbf{v} : (\exists\phi) : (y)\,.\,\phi\,!\,(x, y) : \mathbf{v} : (\exists\phi, y)\,.\,\phi\,!\,(x, y) : \mathbf{v} : \text{etc.},$$

y, en general, dada una matriz $f\,!\,(\phi\,!\,\hat{z}, x)$, tendremos el siguiente proceso para interpretar $(\phi_1)\,.\,f\,!\,(\phi_1\,\hat{z}, x)$ y $(\exists\phi_1)\,.\,f\,!\,(\phi_1\,\hat{z}, x)$. Pongamos

$$(\phi^1)\,.\,f\,!\,(\phi^1\hat{z}, x)\,.=:(\phi)\,.\,f\,!\,\{(y)\,.\,\phi\,!\,(\hat{z}, y), x\} : (\phi)\,.\,f\,!\,\{(\exists y)\,.\,\phi\,!\,(\hat{z}, y), x\},$$

en donde $f\,!\,\{(y)\,.\,\phi\,!\,(\hat{z}, y), x\}$ se construye así: dondequiera que, en $f\,!\,\{\phi\,!\,\hat{z}, x\}$, se presente un valor de ϕ —tal que $\phi\,!\,a$— efectuar el cambio $(y)\,.\,\phi\,!\,(a, y)$, y desarrollarlo por medio de las definiciones expuestas al principio del *8. De manera semejante se construye $f\,!\,\{(\exists y)\,.\,\phi\,!\,(\hat{z}, y), x\}$. Similarmente, pongamos

$$(\phi^2)\,.\,f\,!\,(\phi^2\,!\,\hat{z}, x)\,.=:(\phi)\,.\,f\,!\,\{(y, w)\,.\,\phi\,!\,(\hat{z}, y, w), x\} :$$
$$(\phi)\,.\,f\,!\,\{(y) : (\exists w)\,.\,\phi\,!\,(\hat{z}, y, w), x\} : \text{etc.},$$

en donde el "etc." abarca los prefijos $(\exists y) : (w)\,.$, $(\ y,\ w)\,.$, $(w) : (\exists y)$. Definimos ϕ^3, ϕ^4, ..., de forma similar. Entonces

$$(\phi_1)\,.\,f\,!\,(\phi_1\hat{z}, x)\,.=:(\phi^1)\,.\,f\,!\,(\phi^1\,\hat{z}, x) : (\phi^2)\,.\,f\,!\,(\phi^2\,\hat{z}, x) : \text{etc.}$$

Este proceso se basa en el hecho de que $f\,!\,(\phi\,!\,\hat{z}, x)$, para cada valor de ϕ y de x, es una proposición construida de las proposiciones elementales por medio del trazo, y que el *8 nos capacita para sustituir cualquiera de ellas por una proposición que no sea elemental. $(\exists\phi_1)\,.\,f\,!\,(\phi_1\hat{z}, x)$ se define por una *disyunción* exactamente análoga.

Está claro que, en la práctica, una conjunción o una disyunción infinitas, tales como las señaladas anteriormente, no pueden manejarse sin unas suposiciones *ad hoc*. Para algún sector de la conjunción o de la disyunción infinitas podemos llegar a resultados, y "ver" que estos resultados son válidos a lo largo de ellas. Sin embargo, esto no puede probarse, porque no es aplicable la inducción matemática. Por ello,

adoptamos ciertas proposiciones primitivas que aseguran solamente que lo que podemos probar en cada caso se mantiene de manera generalizada. Por medio de estas adopciones se hace posible manejar variables tales como ϕ_1.

De igual manera, podemos introducir $f_1\ (\phi_1\hat{z}, \hat{x})$, en donde un número cualquiera de individuales y de funciones $\psi_1, \chi_1, \ldots$ pueden presentarse como variables aparentes.

Ninguna dificultad esencial surge en este proceso, con tal que las variables aparentes que intervengan en una función no sean de un orden superior al del argumento de la función. Por ejemplo, $x \in \mathrm{D}'R$, que es $(\exists y) . xRy$, puede manejarse con tranquilidad, como si fuese de la forma $\phi ! x$. En virtud del *8, $\phi_1 x$ puede sustituirse por $\phi ! x$ sin influir en la verdad de cualquier proposición lógica, en la que $\phi ! x$ sea una parte. Análogamente, cualquier proposición lógica que sea válida cuando esté referida a $f ! (\phi_1\hat{z}, x)$ también lo será cuando esté referida a $f_1\ (\phi_1\hat{z}, x)$.

Pero cuando la variable aparente es de un orden superior al del argumento, se presenta una nueva situación. Los casos más simples son

$$(\phi) . f ! (\phi ! \hat{z}, x), \quad (\exists\phi) . f ! (\phi ! \hat{z}, x).$$

Estas son funciones de x, pero es obvio que no están incluidas entre los valores de $\phi ! x$ (en donde ϕ es el argumento). Si adoptásemos una nueva variable ϕ_2, que incluya funciones en las que $\phi ! \hat{z}$ puede ser una variable aparente, obtendremos otras nuevas funciones

$$(\phi_2) . f ! (\phi_2\hat{z}, x), \quad (\exists\phi_2) . f ! (\phi_2\hat{z}, x),$$

que tampoco se encuentran entre los valores de $\phi_2 x$ (en donde $\phi_2 x$ es el argumento), porque la totalidad de los valores de $\phi_2\hat{z}$, de la que nos ocupamos ahora, es diferente de la totalidad de los valores de $\phi ! \hat{z}$, que fue la considerada anteriormente. Sin embargo, por mucho que podamos ampliar la significación de ϕ, una función de x en la que intervenga ϕ como variable aparente tiene un correspondiente significado extendido, de manera que, como quiera que se defina ϕ,

$$(\phi) . f ! (\phi\hat{z}, x) \quad \text{y} \quad (\exists\phi) . f ! (\phi\hat{z}, x)$$

nunca pueden ser valores de ϕx. Intentar hacerlo sería como intentar atrapar la propia sombra. Es imposible conseguir una variable que abarque entre sus valores todas las funciones posibles de individuales.

Representamos por $\phi_2 x$ una función de x en la que ϕ_1 es una variable aparente, salvo que no haya una variable de orden superior. De manera similar, $\phi_3 x$ contendrá a ϕ_2 como variable aparente, y así sucesivamente.

La cuestión principal es que una variable puede presentarse a lo largo de una totalidad de valores, bien definida, siempre que todos esos valores sean tales que cada uno pueda sustituir significativamente a otro en cualquier contexto. Al

construir ϕx, la única totalidad que interviene es la de los individuales, como ya se presupuso. Pero cuando admitimos que ϕ pueda ser una variable aparente en una función de x, ampliamos la totalidad de las funciones de x, cualquiera que sea la forma en que se haya definido ϕ. Por lo tanto, siempre es necesario especificar de qué clase de ϕ se trata, dondequiera que ϕ aparezca como una variable aparente.

La otra condición, la de la significación, viene dada de una forma total por las definiciones del *8, junto con el principio de que una función solamente puede darse a través de sus valores. En virtud de este principio, una función de función es una función-trazo de valores de la función. Y, en virtud de las definiciones del *8, un valor de una función cualquiera puede sustituir a alguna proposición en una función-trazo, porque las proposiciones que contienen un número de variables aparentes siempre pueden sustituirse por proposiciones elementales en una función-trazo. Lo que es necesario, a efectos de significación, es que cada proposición aseverada totalmente debe derivarse de una matriz mediante generalización, y que, en la matriz, la sustitución de valores constantes por variables siempre daría lugar, en última instancia, a una función-trazo de proposiciones atómicas. Decimos "en última instancia" porque, cuando se admiten variables tales como $\phi_2\hat{z}$, la sustitución de un valor en lugar de ϕ_2 puede producir una proposición que todavía contenga variables aparentes, y en esta proposición las variables aparentes deben reemplazarse por constantes antes de que lleguemos a una función-trazo de proposiciones atómicas. Podemos introducir variables que requieran varias de dichas etapas, pero el resultado final siempre será el mismo: una función-trazo de proposiciones atómicas.

Parece, sin embargo, (aunque pueda ser difícil probarlo formalmente), que las funciones ϕ_1, f_1 no introducen proposiciones que no puedan expresarse sin ellas. Veamos, en primer lugar, un ejemplo muy sencillo. Consideremos la proposición

$$(\exists\phi_1) \,.\, \phi_1 x \,.\, \phi_1 a, \text{ a la que llamaremos } f(x, a)$$

Ya que ϕ_1 incluye todos los posibles valores de $\phi\,!$, así como muchos otros valores de su rango, $f(x, a)$ puede parecer que se hace una aserción menor que la que se haría por

$$(\exists\phi) \,.\, \phi\,!\, x \,.\, \phi\,!\, a, \text{ a la que llamaremos } f_0\,(x, a).$$

Pero, de hecho, $f(x, a) \,.\supset.\, f_0\,(x, a)$. Esto puede verse de la siguiente manera: $\phi_1 x$ tiene uno de los varios juegos de formas:

$$(y) \,.\, \phi\,!\,(x, y),\ (y, z) \,.\, \phi\,!\,(x, y, z),\ \ldots,$$
$$(\exists y) \,.\, \phi\,!\,(x, y),\ (\exists y, z) \,.\, \phi\,!\,(x, y, z),\ \ldots,$$
$$(y) : (\exists z) \,.\, \phi\,!\,(x, y, z),\ (\exists y) : (z) \,.\, \phi\,!\,(x, y, z),\ \ldots.$$

Supóngase primero que $\phi_1 x \,.=.\, (y) \,.\, \phi\,!\,(x, y)$. Entonces

$$\phi_1 x \,.\, \phi_1 a \,.\equiv: (y) \,.\, \phi\,!\,(x, y) : (y) \,.\, \phi\,!\,(a, y) :$$
$$\supset : \phi\,!\,(x, b) \,.\, \phi\,!\,(a, b) :$$
$$\supset : (\exists\phi) \,.\, \phi\,!\, x \,.\, \phi\,!\, a.$$

A continuación, supongamos $\phi_1 x \,.=.\, (\exists y) \,.\, \phi\,!\,(x, y)$. Entonces

$$\begin{aligned}\phi_1 x \,.\, \phi_1 a \,.\equiv:{} & (\exists y) \,.\, \phi\,!\,(x, y) : (\exists z) \,.\, \phi\,!\,(a, z) : \\ & \supset : (\exists y, z) : \phi\,!\,(x, y) \vee \phi\,!\,(x, z) \,.\, \phi\,!\,(a, y) \vee \phi\,!\,(a, z) : \\ & \supset : (\exists \phi) \,.\, \phi\,!\,x \,.\, \phi\,!\,a,\end{aligned}$$

porque $\phi\,!\,(x, y) \vee \phi\,!\,(x, z)$ es de la forma $\phi\,!\,x$, cuando la y y la z son fijas. Es obvio que este método de prueba es aplicable a los otros casos mencionados anteriormente. Por tanto

$$(\exists \phi_1) \,.\, \phi_1 x \,.\, \phi_1 a \,.\equiv.\, (\exists \phi) \,.\, \phi\,!\,x \,.\, \phi\,!\,a.$$

Puede satisfacernos que el mismo resultado tenga validez en la forma general

$$(\exists \phi_1) \,.\, f\,!\,(\phi_1 \hat{z}, x) \,.\equiv.\, (\exists \phi) \,.\, f\,!\,(\phi\,!\,\hat{z}, x)$$

mediante un argumento similar. Sabemos que $f\,!\,(\phi\,!\,\hat{z}, x)$ se deriva de la misma función-trazo

$$F(p, q, r, \ldots)$$

mediante la sustitución de $\phi\,!\,x$, $\phi\,!\,a$, $\phi\,!\,b$, ... (donde $a, b, \ldots$ son constantes) por alguna de las proposiciones $p, q, r, \ldots$ y de $g_1\,!\,x$, $g_2\,!\,x$, $g_3\,!\,x$, ... (donde $g_1, g_2, g_3, \ldots$ son constantes) por otras de $p, q, r, \ldots$, mientras se sustituyen algunas proposiciones $p, q, r, \ldots$, que permanecen, por proposiciones constantes. Tomemos un caso típico; supongamos

$$f\,!\,(\phi\,!\,\hat{z}, x) \,.=.\, (\phi\,!\,a) \mid \{(\phi\,!\,x) \mid (\phi\,!\,b)\}.$$

Entonces hemos de probar

$$\phi_1 a \mid (\phi_1 x \mid \phi_1 b) \,.\supset.\, (\exists \phi) \,.\, \phi\,!\,a \mid (\phi\,!\,x \mid \phi\,!\,b),$$

en donde $\phi_1 x$ puede adoptar cualquiera de las formas enumeradas antes.

Supóngase primero que $\phi_1 x \,.=.\, (y) \,.\, \phi\,!\,(x, y)$. Entonces

$$\begin{aligned}\phi_1 a \mid (\phi_1 x \mid \phi_1 b) \,.=:{} & (\exists y) : (z, w) \,.\, \phi\,!\,(a, y) \mid \{\phi\,!\,(x, z) \mid \phi\,!\,(b, w)\} : \\ & \supset : (\exists y) \,.\, \phi\,!\,(a, y) \mid \{\phi\,!\,(x, y) \mid \phi\,!\,(b, y)\} : \\ & \supset : (\exists \phi) \,.\, \phi\,!\,a \mid (\phi\,!\,x \mid \phi\,!\,b)\end{aligned}$$

porque, para una y dada, $\phi\,!\,(x, y)$ es de la forma $\phi\,!\,x$.

Supongamos, seguidamente, que $\phi_1 x \,.=.\, (\exists y) \,.\, \phi\,!\,(x, y)$. Entonces

$$\begin{aligned}\phi_1 a \mid (\phi_1 x \mid \phi_1 b) \,.=:{} & (y) : (\exists z, w) \,.\, \phi\,!\,(a, y) \mid \{\phi\,!\,(x, z) \mid \phi\,!\,(b, w)\} : \\ & \supset : (\exists \psi) \,.\, \psi\,!\,a \mid (\psi\,!\,x \mid \psi\,!\,b),\end{aligned}$$

poniendo $\psi\,!\,x \,.=.\, \phi\,!\,(x, z) \vee \phi\,!\,(x, w)$. De manera semejante se pueden tratar los otros casos. Por lo tanto, se sigue el resultado.

Considérese, a continuación, la proposición correlativa

$$(\phi_1) \,.\, f\,!\,(\phi_1 \hat{z}, x) \,.\equiv.\, (\phi) \,.\, f\,!\,(\phi\,!\,\hat{z}, x).$$

Aquí se presenta la implicación conversa que es preciso probar; es decir:

$$(\phi) . f!(\phi!\hat{z}, x) . \supset . (\phi_1) . f!(\phi_1\hat{z}, x).$$

Esto resulta del caso anterior por transposición. También puede verse independientemente de la siguiente manera. Supongamos, como antes, que

$$f!(\phi_1\hat{z}, x) . = . (\phi_1 a) \mid (\phi_1 x \mid \phi_1 b),$$

y pongamos primero $\quad \phi_1 x . = . (y) . \phi!(x, y).$

Entonces $\quad (\phi_1 a) \mid (\phi_1 x \mid \phi_1 b) . = : (\exists y) : (z, w) . \phi!(a, y) \mid \{\phi!(x, z) \mid \phi!(b, w)\}.$

Así, pues, requerimos que, dado

$$(\psi) . (\psi!a) \mid (\psi!x \mid \psi!b),$$

tendremos $\quad (\exists y) : (z, w) . \phi!(a, y) \mid \{\phi!(x, z) \mid \phi!(b, w)\}.$

Ahora

$$(\psi) . \psi!a \mid (\psi!x \mid \psi!b) . \supset :. \phi!(a, z) . \supset . \phi!(x, z) . \phi!(b, z) :$$
$$\phi!(a, w) . \supset . \phi!(x, w) . \phi!(b, w) :.$$
$$\supset :. \phi!(a, z) . \phi!(a, w) . \supset . \phi!(x, z) . \phi!(b, w) :.$$
$$\supset :. \phi!(a, w) . \supset : \phi!(a, z) . \supset . \phi!(x, z) . \phi!(b, w) \quad (1)$$

También $\quad \sim\phi!(a, w) . \supset : \phi!(a, w) . \supset . \phi!(x, z) . \phi!(b, w) \quad (2)$

$$(1) . (2) . \supset :. (\psi) . \psi!a \mid (\psi!x \mid \psi!b) : \supset :. (\exists y) : \phi!(a, y) . \supset . \phi!(x, z) . \phi!(b, w)$$

que era lo que había que probar.

Pongamos ahora $\quad \phi_1 x . = . (\exists y) . \phi!(x, y).$

Entonces $\quad (\phi_1 a) \mid (\phi_1 x \mid \phi_1 b) . = : (y) : (\exists z, w) . \phi!(a, y) \mid \{\phi!(x, z) \mid \phi!(b, w)\}.$

En este caso pondremos solamente $z = w = y$, y se seguirá el resultado.

En cualquier otro caso, el método será el mismo. Por tanto, en forma general

$$(\phi_1) . f!(\phi_1\hat{z}, x) . \equiv . (\phi) . f!(\phi!\hat{z}, x).$$

Aunque los argumentos anteriores no llegan a ser pruebas formales, bastan para aclarar que, de hecho, cualquier proposición general en conexión con $\phi!\hat{z}$ también es verdadera en conexión con $\phi_1\hat{z}$. Esto nos proporciona, en la medida en que le atañen tales funciones, todo lo que se podría haber conseguido del axioma de la reducibilidad.

Dado que la prueba solamente puede efectuarse por casos separados, es necesario introducir una proposición primitiva que asegure que el resultado es válido en todo caso. Esta proposición primitiva es

$$\vdash : (\phi) . f!(\phi!\hat{z}, x) . \supset . f!(\phi_1\hat{z}, x) \quad \text{Pp.}$$

A guisa de ejemplo: suponiendo que hemos de probar alguna propiedad de todas las clases definidas por funciones de la forma $\phi!\hat{z}$, la proposición primitiva indicada

nos capacita para sustituir la clase $D'R$, en donde R es la relación definida por $\phi\,!\,(\hat{x}, \hat{y})$, o por $(\exists z)\,.\,\phi\,!\,(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, o por otras análogas. Siempre que una clase o relación se defina por una función que no contenga variables aparentes –excepto las individuales– dicha proposición primitiva nos capacita para tratarla como si hubiese sido definida por una matriz.

Hemos de considerar, ahora, funciones de la forma $\phi_2 x$, donde

$$\phi_2 x \,.=.\, (\phi)\,.\,f\,!\,(\phi\,!\,\hat{z}, x) \text{ or } \phi_2 x \,.=.\, (\exists\phi)\,.\,f\,!\,(\phi\,!\,\hat{z}, x).$$

Deseamos descubrir si, o bajo qué circunstancias, tenemos

$$(\phi)\,.\,g\,!\,(\phi\,!\,\hat{z}, x)\,.\supset.\,g\,!\,(\phi_2\hat{z}, x). \qquad \text{(A)}$$

Comencemos con un importante caso particular. Supongamos

$$g\,!\,(\phi\,!\,\hat{z}, x)\,.=.\,\phi\,!\,a \supset \phi\,!\,x.$$

Entonces, de acuerdo con el $*13{\cdot}1$, $(\phi)\,.\,g\,!\,(\phi\,!\,\hat{z}, x)\,.=.\,x = a$.

Deseamos probar

$$(\phi)\,.\,\phi\,!\,a \supset \phi\,!\,x\,.\supset.\,\phi_2 a \supset \phi_2 x,$$

esto es

$$(\phi)\,.\,\phi\,!\,a \supset \phi\,!\,x\,.\supset:(\phi)\,.\,f\,!\,(\phi\,!\,\hat{z}, a)\,.\supset.\,(\phi)\,.\,f\,!\,(\phi\,!\,\hat{z}, x):$$
$$(\exists\phi)\,.\,f\,!\,(\phi\,!\,\hat{z}, a)\,.\supset.\,(\exists\phi)\,.\,f\,!\,(\phi\,!\,\hat{z}, x).$$

Ahora, $f\,!\,(\phi\,!\,\hat{z}, x)$ debe derivarse de alguna función-trazo

$$F(p, q, r, \ldots)$$

sustituyendo en lugar de las $p, q, r, \ldots$ los valores $\phi\,!\,x$, $\phi\,!\,b$, $\phi\,!\,c$, ..., en donde $b, c, \ldots$ son constantes. Tan pronto como se asigne ϕ, ésta es de la forma $\psi\,!\,x$. Por tanto,

$$(\phi)\,.\,\phi\,!\,a \supset \phi\,!\,x\,.\supset:(\phi):f\,!\,(\phi\,!\,\hat{z}, a)\,.\supset.f\,!\,(\phi\,!\,\hat{z}, x):$$
$$\supset:(\phi)\,.\,f\,!\,(\phi\,!\,\hat{z}, a)\,.\supset.\,(\phi)\,.\,f\,!\,(\phi\,!\,\hat{z}, x):$$
$$(\exists\phi)\,.\,f\,!\,(\phi\,!\,\hat{z}, a)\,.\supset.\,(\exists\phi)\,.\,f\,!\,(\phi\,!\,\hat{z}, x).$$

Así, pues, generalmente $(\phi)\,.\,\phi\,!\,a \supset \phi\,!\,x\,.\supset.\,(\phi_2)\,.\,\phi_2 a \supset \phi_2 x$, sin necesidad de ningún axioma de reducibilidad.

Sin embargo, no debe suponerse que (A) sea siempre verdadera. El procedimiento es el siguiente: $f\,!\,(\phi\,!\,\hat{z}, x)$ resulta de alguna función-trazo

$$F(p, q, r, \ldots)$$

después de sustituir alguna de las letras $p, q, r, \ldots$ por los valores $\phi\,!\,x$, $\phi\,!\,a$, $\phi\,!\,b$, ... (siendo constantes $a, b, \ldots$). Supongamos, p. ej.,

$$\phi_2 x \,.=.\, (\phi)\,.\,f\,!\,(\phi\,!\,\hat{z}, x).$$

De este modo

$$\phi_2 x \,.=.\, (\phi)\,.\,F(\phi\,!\,x, \phi\,!\,a, \phi\,!\,b, \ldots). \qquad \text{(B)}$$

Lo que deseamos descubrir es si

$$(\phi) . g ! (\phi ! \hat{z}, x) . \supset . g ! (\phi_2 \hat{z}, x).$$

Ahora $g!\ (\phi !\ \hat{z}, x)$ se derivará de la función-trazo

$$G (p, q, r, \ldots)$$

mediante la sustitución de $\phi ! x$, $\phi ! a'$, $\phi ! b'$, ... en lugar de alguna de las $p, q, r, \ldots$ Para obtener $g ! (\phi_2 \hat{z}, x)$, tenemos que poner $\phi_2 x$, $\phi_2 a'$, $\phi_2 b'$, ... en $G (p, q, r, \ldots)$, en vez de $\phi ! x$, $\phi ! a'$, $\phi ! b'$, ... Así obtendremos una nueva matriz.

Si se sabe que $(\phi) . g ! (\phi ! \hat{z}, x)$ es verdadera porque $G (p, q, r, \ldots)$ es siempre verdadera, entonces $g ! (\phi_2 \hat{z}, x)$ es verdadera en virtud del *8, dado que se obtiene de $G (p, q, r, \ldots)$ mediante la sustitución de alguna de las letras $p, q, r, \ldots$ por las proposiciones $\phi_2 x$, $\phi_2 a'$, $\phi_2 b'$, ... que contienen variables aparentes. Así, pues, en este caso, se garantiza una inferencia.

De este modo, tenemos esta importante proposición:

Siempre que se sepa que $(\phi) . g !\ (\phi !\ \hat{z}, x)$ es verdadera porque $g !\ (\phi !\ \hat{z}, x)$ es siempre un valor de la función-trazo

$$G (p, q, r, \ldots),$$

que es verdadera para todos los valores de $p, q, r, \ldots$, entonces $g ! (\phi_2 \hat{z}, x)$ es también verdadera, y, desde luego, también lo es $(\phi_2) . g ! (\phi_2 \hat{z}, x)$.

Esto, sin embargo, no cubre el caso en donde $(\phi) . g ! (\phi ! \hat{z}, x)$ no sea una verdad lógica, sino una hipótesis, que puede ser verdadera para algunos valores de x y falsa para otros. Cuando éste sea el caso, la inferencia a $g ! (\phi_2 \hat{z}, x)$ algunas veces está legitimada y otras no; los diversos casos deben investigarse separadamente. Veremos un importante ejemplo del fracaso de la inferencia, a propósito de la inducción matemática.

VI. CLASES

La teoría de clases es simple en un sentido y, al propio tiempo, complicada en otro, debido al supuesto de que las funciones sólo se dan a través de sus valores, así como por el abandono del axioma de la reducibilidad.

De acuerdo con esta teoría, todas las funciones de funciones son extensionales; esto es

$$\phi x \equiv_x \psi x . \supset . f (\phi \hat{z}) \equiv f (\psi \hat{z}).$$

Esto es obvio, puesto que ϕ sólo puede presentarse en $f (\phi \hat{z})$ mediante la sustitución de los valores de ϕ por $p, q, r, \ldots$ en una función-trazo y, si $\phi x \equiv \psi x$, la sustitución de ϕx por p en una función-trazo da el mismo valor de verdad a la función-trazo que la sustitución de ψx. Por consiguiente, no hay razón más fuerte para distinguir entre funciones y clases, por lo que, en virtud de lo anterior, tenemos

$$\phi x \equiv_x \psi x \,.\, \supset \,.\, \phi\hat{x} = \psi\hat{x}.$$

Continuaremos empleando la notación $\hat{x}\,(\phi x)$, que suele resultar más conveniente que $\phi\hat{x}$; sin embargo, no habrá ninguna diferencia entre la significación de ambos símbolos. Así, pues, las clases, a diferencia de las funciones, pierden incluso ese carácter oscuro que conservan en el *20. Desde luego, lo mismo se aplica a las relaciones en intensión. Esto, hasta cierto punto, es una simplificación.

Por otra parte, ahora hemos de distinguir las clases de diferentes órdenes, compuestas por miembros del mismo orden. Tomando como caso más sencillo las clases de individuales, $\hat{x}\,(\phi\,!\,x)$ debe distinguirse de $\hat{x}\,(\phi_2 x)$, y así sucesivamente. En virtud de la proposición que figura al final de la última sección, las propiedades generales de las clases serán las mismas para las clases de todos los órdenes. Así, pues, p. ej.

$$\alpha \subset \beta \,.\, \beta \subset \gamma \,.\, \supset \,.\, \alpha \subset \gamma$$

será válida cualquiera que sean los órdenes de α, β, γ respectivamente. En otros tipos de casos, sin embargo, surgen confusiones. Tomemos, como primer ejemplo, $p`\kappa$ y $s`\kappa$. Tenemos

$$x \in p`\kappa \,.\, \equiv : \alpha \in \kappa \,.\, \supset_\alpha \,.\, x \in \alpha.$$

De este modo, $p`\kappa$ es una clase de orden superior al de cualquiera de los miembros de $\kappa$. Por tanto, la hipótesis $(\alpha)\,.\,f\alpha$ puede no implicar $f\,(p`\kappa)$, si α es del orden de los miembros de κ. Existe un tipo de prueba inventado por Zermelo, del que el ejemplo más simple es su segunda prueba del teorema de Schröeder-Bernstein (dado en el *73). Este tipo de prueba consiste en definir una cierta clase de clases κ, y a continuación mostrar que $p`\kappa \in \kappa$. Según se aprecia, "$p`\kappa \in \kappa$" es imposible, puesto que $p`\kappa$ no es del mismo orden que los miembros de κ. No obstante, esto no es todo lo que se puede decir. Una clase de clases κ queda siempre definida por alguna función de la forma

$$(x_1, x_2, \ldots) : (\exists y_1, y_2, \ldots) \,.\, F(x_1 \in \alpha, x_2 \in \alpha, \ldots\ y_1 \in \alpha, y_2 \in \alpha, \ldots),$$

en donde F es una función-trazo y "$\alpha \in \kappa$" significa que la función anterior es verdadera. Bien puede suceder que la función mencionada sea verdadera cuando $p`\kappa$ se sustituya por $\alpha$, y el resultado se interprete según se dice en *8. ¿Nos justifica esto al aseverar $p`\kappa \in \kappa$?

Tomemos un ejemplo que es importante en relación con la inducción matemática. Pongamos

$$\kappa = \hat{\alpha}\,(\breve{R}``\alpha \subset \alpha \,.\, \alpha \in \alpha).$$

Entonces $$\breve{R}``p`\kappa \subset p`\kappa \,.\, \alpha \in p`\kappa \quad \text{(véase *40·81)}$$

de modo que, en cierto sentido, $p`\kappa \in \kappa$. Es decir, si sustituimos $p`\kappa$ en lugar de α en la función de definición de κ, y aplicamos *8, obtendremos una proposición verdadera. En virtud de la definición de *90,

$$\overleftarrow{R}_*`a = p`\kappa.$$

Así, pues, $\overleftarrow{R}_*`a$ es una clase de segundo orden. Por consiguiente, si tenemos una hipótesis $(\alpha) . f\alpha$, en donde α es una clase de primer orden, no podemos suponer

$$(\alpha) . f\alpha . \supset . f(\overleftarrow{R}_*`a). \qquad (A)$$

Según la última proposición de la sección anterior, si $(\alpha) . f\alpha$ se deduce, mediante la Lógica, de una función-trazo de proposiciones elementales, que sea universalmente verdadera, $f(\overleftarrow{R}_*`a)$ también será verdadera. Por tanto, podemos sustituir $\overleftarrow{R}_*`a$ en lugar de α en cualquier proposición aseverada "$\vdash . f\alpha$" que se presente en los *Principia Mathematica.* Pero cuando $(\alpha) . f\alpha$ sea una hipótesis, y no una verdad universal, la implicación (A) no es, *prima facie,* necesariamente verdadera.

Por ejemplo, si $\kappa = \hat{\alpha}\,(\breve{R}``\alpha \subset \alpha . a \in \alpha)$, tenemos

$$a \in \kappa . \supset : \alpha \cap \beta \in \kappa . \equiv . \breve{R}``(\alpha \cap \beta) \subset \beta . a \in \beta.$$

Por ende,

$$a \in \kappa . \breve{R}``(\alpha \cap \beta) \subset \beta . a \in \beta . \supset . p`\kappa \subset \beta \qquad (1)$$

En gran parte de las proposiciones de *90, probadas hasta ahora, hemos sustituido $p`\kappa$ en lugar de α, por lo cual obtenemos

$$\breve{R}``(\beta \cap p`\kappa) \subset \beta . a \in \beta . \supset . p`\kappa \subset \beta \qquad (2)$$

es decir

$$z \in \beta . aR_*z . \supset_{z,w} . w \in \beta : a \in \beta . aR_*x : \supset . x \in \beta$$

o

$$aR_*x . \supset :. z \in \beta . aR_*z . \supset_{z,w} . w \in \beta : a \in \beta : \supset . x \in \beta.$$

Esta es una forma más fuerte de inducción que la que se usó en la definición de $aR*x$. Pero la prueba no es válida porque no es correcto el paso de (1) a (2). Por lo tanto, las pruebas que usan esta forma de inducción tienen que reconstruirse.

Se verá que la forma a la que puede reducirse la mayor parte de las inferencias falaces que parecen aceptables es la siguiente:

Dada "$\vdash . (x) . f(x, x)$" podemos inferir "$\vdash : (x) : (\exists y) . f(x, y)$". Así, pues, dada "$\vdash . (\alpha) . f(\alpha, \alpha)$" podemos inferir "$\vdash : (\alpha) : (\exists \beta) . f(\alpha, \beta)$". Pero esto depende de la posibilidad de que $\alpha = \beta$. Si, en este caso, α fuese de un orden y β de otro, no sabemos si es posible $\alpha = \beta$. Así, pues, supongamos que

$$\alpha \in \kappa . \supset_\alpha . g\alpha$$

y que deseamos inferir $g\beta$, en donde β es una clase de orden superior, cumpliendo la condición $\beta \in \kappa$.

La proposición

$$(\beta) :. \alpha \in \kappa . \supset_\alpha . g\alpha : \supset : \beta \in \kappa . \supset . g\beta$$

al desarrollarse por *8, se reconvierte en:

$$(\beta) :: (\exists \alpha) :. \alpha \in \kappa . \supset . g\alpha : \supset : \beta \in \kappa . \supset . g\beta.$$

Esto es válido sólo si es posible $\alpha = \beta$. Por eso, la inferencia sería una falacia si β fuese de un orden superior al de α.

Apliquemos estas consideraciones a la prueba de Zermelo del teorema de Schröder-Bernstein, que se ofrece en *73·8 ss. Partimos de una clase de clases

$$\kappa = \hat{\alpha}(\alpha \subset \mathrm{D}'R . \beta - \mathrm{C}'R \subset \alpha . \breve{R}''\alpha \subset \alpha)$$

y probamos $p'\kappa \in \kappa$ (*73·81), lo cual es admisible en el sentido restringido que se explicó anteriormente. Añadimos ahora la hipótesis

$$x \sim\in (\beta - \mathrm{C}'R) \cup \breve{R}''p'\kappa$$

y pasamos a probar $p'\kappa - \iota'x \in \kappa$ (en la cuarta línea de la prueba de la *73·82). Esto también es admisible en el sentido restringido. Sin embargo, en la línea siguiente de la misma prueba hacemos uso de lo que no es admisible al pasar desde $p'\kappa - \iota'x \in \kappa$ a $p'\kappa \subset p'\kappa - \iota'x$, porque

$$\alpha \in \kappa . \supset_{\alpha} . p'\kappa \subset \alpha.$$

La inferencia desde

$$\alpha \in \kappa . \supset_{\alpha} . p'\kappa \subset \alpha \quad \text{a} \quad p'\kappa - \iota'x \in \kappa . \supset . p'\kappa \subset p'\kappa - \iota'x$$

sólo es válida si $p'\kappa - \iota'x$ es una clase del mismo orden que los miembros de k. No obstante, cuando se transcribe $\alpha \in \kappa . \supset_{\alpha} . p'\kappa \subset \alpha$, se convierte en

$$(\alpha) ::: (\exists \beta) ::. (x) :: \alpha \in \kappa . \supset :. \beta \in \kappa . \supset . x \in \beta : \supset . x \in \alpha.$$

Esto se deduce de

$$\alpha \in \kappa . \supset :. \alpha \in \kappa . \supset . x \in \alpha : \supset . x \in \alpha$$

por el principio de que $f(\alpha, \alpha)$ implica $(\exists \beta) . f(\alpha, \beta)$. Pero aquí β debe ser del mismo orden que α, mientras que en nuestro caso α y β no son del mismo orden, si $\alpha = p'\kappa - \iota'x$ y β es un miembro ordinario de κ. En este caso, en donde infiramos $p'\kappa \subset p'\kappa - \iota'x$, la prueba se desmorona.

Es fácil, sin embargo, remediar este defecto en la prueba. Todo lo que necesitamos es

$$x \sim\in (\beta - \mathrm{C}'R) \cup \breve{R}''p'\kappa . \supset . x \sim\in p'\kappa$$

o, por el contrario,

$$x \in p'\kappa . \supset . x \in (\beta - \mathrm{C}'R) \cup \breve{R}''p'\kappa.$$

Ahora

$$x \in p`\kappa \,.\, \supset :. \alpha \in \kappa \,.\, \supset_\alpha : \alpha - \iota`x \sim \in \kappa :$$
$$\supset_\alpha : \sim(\beta - \mathrm{C}`R \subset \alpha - \iota`x) \,.\, \mathrm{v} \,.\, \sim\{\breve{R}``(\alpha - \iota`x) \subset \alpha - \iota`x\} :$$
$$\supset_\alpha : x \in \beta - \mathrm{C}`R \,.\, \mathrm{v} \,.\, x \in \breve{R}``(\alpha - \iota`x)$$
$$\supset :. x \in \beta - \mathrm{C}`R : \mathrm{v} : \alpha \in \kappa \,.\, \supset_\alpha \,.\, x \in \breve{R}``\alpha.$$

Por tanto, en virtud de *72·341,

$$x \in p`\kappa \,.\, \supset \,.\, x \in (\beta - \mathrm{C}`R) \cup \breve{R}``p`\kappa$$

que da el resultado buscado.

Supongamos que $\alpha - \iota`x$ no es de un orden superior al de $\alpha$; esto puede asegurarse considerando a $\alpha$ por lo menos de segundo orden, ya que $\iota`x$, y por lo tanto $-\iota`x$, es de segundo orden. Siempre podemos suponer que nuestras clases son de un orden dado, aunque no podemos elevarlas de orden indefinidamente.

De esta manera se salva el teorema de Schröder-Bernstein.

Otra dificultad surge con respecto a las sub-clases. Ponemos

$$\mathrm{Cl}`\alpha = \hat{\beta}\,(\beta \subset \alpha) \quad \mathrm{Df.}$$

Ahora, "$\beta \subset \alpha$" tiene significación cuando β sea de un orden superior al de α, dado que sus miembros son del mismo tipo que los de α. Pero cuando tengamos

$$\beta \subset \alpha \,.\, \supset_\beta \,.\, f\beta,$$

β debe ser del mismo tipo. Como regla, seremos capaces de mostrar que una proposición de estas características es válida, cualquiera que sea el tipo de β, si podemos mostrar que es válida cuando β es del mismo tipo que α. Consecuentemente, no surgen dificultades hasta llegar a la proposición $2^n > n$ de Cantor, que resulta de la proposición

$$\sim\{(\mathrm{Cl}`\alpha)\ \mathrm{sm}\ \alpha\}$$

la cual se prueba en *102. Esta prueba es como sigue:

$$R \in 1 \to 1 \,.\, \mathrm{D}`R = \alpha \,.\, \mathrm{C}`R \subset \mathrm{Cl}`\alpha \,.\, \xi = \hat{x}\,\{x \in \alpha - \breve{R}`x\} \,.\, \supset :$$
$$y \in \alpha \,.\, y \in \breve{R}`y \,.\, \supset_y \,.\, y \sim \in \xi : y \in \alpha \,.\, y \sim \in \breve{R}`y \,.\, \supset_y \,.\, y \in \xi : \supset : y \in \alpha \,.\, \supset_y \,.\, \xi \neq \breve{R}`y :$$
$$\supset : \xi \sim \in \mathrm{C}`R.$$

Como esta proposición es decisiva, entraremos en ella un tanto minuciosamente.

Supongamos $\alpha = \hat{x}\ (\mathrm{A}\ !\ x)$, y supongamos

$$xR\,\{\hat{z}\,(\phi\,!\,z)\} \,.=.\, f!\,(\phi\,!\,\hat{z}, x).$$

Entonces, en virtud de nuestros datos,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A}\,!\,x\,.\,\supset\,.\,(\exists\phi)\,.\,f\,!\,(\phi\,!\,\hat{z},x),\\
&f\,!\,(\phi\,!\,\hat{z},x)\,.\,\supset\,.\,\mathrm{A}\,!\,x\,.\,\phi\,!\,y\,\supset_y \mathrm{A}\,!\,y,\\
&f\,!\,(\phi\,!\,\hat{z},x)\,.\,f\,!\,(\phi\,!\,\hat{z},y)\,.\,\supset\,.\,x=y,\\
&f\,!\,(\phi\,!\,\hat{z},x)\,.\,f\,!\,(\psi\,!\,\hat{z},x)\,.\,\supset\,.\,\phi\,!\,y\equiv_y \psi\,!\,y.
\end{aligned}$$

Con estos datos,

$$x\in\alpha-\breve{R}`x\,.\equiv:\mathrm{A}\,!\,x:f\,!\,(\phi\,!\,\hat{z},x)\,.\,\supset_\phi.\sim\phi\,!\,x.$$

Así, pues, $$\xi=\hat{x}\,\{(\phi):\mathrm{A}\,!\,x:f\,!\,(\phi\,!\,\hat{z},x)\,.\,\supset.\sim\phi\,!\,x\}.$$

Por tanto, ξ está definida por una función en la que ϕ aparezca como una variable aparente. Si aumentamos el rango inicial de ϕ, ampliaremos el rango de los valores implícitos en la definición de ξ. No hay, por tanto, modo de eludir la conclusión de que ξ sea de un orden más elevado que los de las sub-clases de α, contempladas en la definición de Cl`α. Por consiguiente, la prueba de $2^n > n$ se cae cuando no se dé por supuesto el axioma de la reducibilidad. Encontraremos, sin embargo, que la proposición sigue siendo verdadera cuando n es finita.

En cuanto a las relaciones, surgen cuestiones similares a las que se presentan con las clases. Una relación ya no es distinguible de una función de dos variables. Tenemos:

$$\phi\,(\hat{x},\hat{y})=\psi\,(\hat{x},\hat{y})\,.\equiv:\phi\,(x,y)\,.\equiv_{x,y}.\,\psi\,(x,y).$$

Por lo que respecta a $p`\lambda$ y a Rl`$P$, las dificultades son de menor importancia que las que se refieren a $p`\kappa$ y Cl`$\alpha$, porque $p`\lambda$ y Rl`$P$ son menos usuales. Pero una dificultad muy seria se presenta en cuanto a la semejanza. Tenemos:

$$\alpha\,\mathrm{sm}\,\beta\,.\equiv.\,(\exists R)\,.\,R\in 1\to 1\,.\,\alpha=\mathrm{D}`R\,.\,\beta=\mathrm{C}`R.$$

Aquí, la R debe quedar limitada dentro de algún tipo; pero en cualquier tipo que elijamos, puede haber un correlato de tipo superior por el que se pueda establecer una correlación entre α y β. Por lo tanto, nunca podremos probar $\sim(\alpha\,\mathrm{sm}\,\beta)$, excepto en los casos especiales en los que o α o β sean finitos. Esta dificultad fue puesta de manifiesto por el teorema de Cantor, $2^n > n$, que acabamos de examinar. Casi todas nuestras proposiciones están orientadas a probar que dos clases *son* semejantes, e interpretarlas todas de forma que se mantengan válidas. Sin embargo, las pocas proposiciones que se ocupan de probar que dos clases *no* son semejantes fracasan, salvo cuando por lo menos una de las dos sea finita.

VII. INDUCCION MATEMATICA

Todas las proposiciones sobre la inducción matemática que aparecen en la Sección E de la Parte II, y en la Sección C de la Parte III, permanecen válidas, siempre que se interpreten adecuadamente. Sin embargo, las pruebas de muchas de ellas vienen a ser falaces cuando no se presuponga el axioma de la reducibilidad; en algunos casos, con gran trabajo, pueden obtenerse nuevas pruebas. Desde luego, la

dificultad se hace patente al observar la definición de "xR_*y" en el *90. Omitiendo el factor "$x \in C^{\smile}R$", que para nuestro propósito es irrelevante, la definición de "xR_*y" puede escribirse así:

$$zRw \,.\, \supset_{z,w} \,.\, \phi\,!\,z \supset \phi\,!\,w : \supset_{\phi} \,.\, \phi\,!\,x \supset \phi\,!\,y, \qquad \text{(A)}$$

esto es, "y tiene todas las propiedades elementales hereditarias que posee x". En lugar de las propiedades elementales podemos considerar cualquier otro orden de propiedades; como veremos más adelante, es ventajoso tomar las propiedades de tercer orden cuando R sea "de uno a varios" o "de varios a uno", y de quinto orden en los demás casos. No obstante, para objetivos preliminares, es indiferente el orden de las propiedades que elijamos, y, por ello, en atención a la rigurosidad, tomamos, para comenzar, propiedades elementales. La dificultad estriba en que, si ϕ_2 es una propiedad de segundo orden, a partir de (A) no podemos deducir

$$zRw \,.\, \supset_{z,w} \,.\, \phi_2 z \supset \phi_2 w : \supset \,.\, \phi_2 x \supset \phi_2 y. \qquad \text{(B)}$$

Supongamos, por ejemplo, que $\phi_2 z \,.=.\, (\phi) \,.\, f\,!\,(\phi\,!\,\hat{z}, z)$; entonces, desde (A) podemos deducir

$$zRw \,.\, \supset_{z,w} .f\,!\,(\phi\,!\,\hat{z}, z) \supset_{\phi} f\,!\,(\phi\,!\,\hat{z}, w) : \supset : f\,!\,(\phi\,!\,\hat{z}, x) \,.\, \supset_{\phi} .f\,!\,(\phi\,!\,\hat{z}, y) : \supset : \phi_2 x \,.\, \supset \,.\, \phi_2 y. \qquad \text{(C)}$$

Pero, en general, nuestra hipótesis aquí no viene sobreentendida por la hipótesis de (B). Si ponemos $\phi_2 z \,.=.\, (\exists\phi) \,.\, f\,!\,(\phi\,!\,\hat{z}, z)$, alcanzamos resultados análogos.

Por tanto, a fin de aplicar la inducción matemática a una propiedad de segundo orden, no es suficiente que deba ser hereditaria en sí misma, sino que deba estar compuesta de propiedades elementales hereditarias. Es decir, si la propiedad en cuestión es $\phi_2 z$, donde $\phi_2 z$ es o bien

$$(\phi) \,.\, f\,!\,(\phi\,!\,\hat{z}, z) \quad \text{o} \quad (\exists\phi) \,.\, f\,!\,(\phi\,!\,\hat{z}, z),$$

no es suficiente tener

$$zRw \,.\, \supset_{z,w} \,.\, \phi_2 z \supset \phi_2 w,$$

sino que, para cada ϕ elemental, debemos tener

$$zRw \,.\, \supset_{z,w} .f\,!\,(\phi\,!\,\hat{z}, z) \supset f\,!\,(\phi\,!\,\hat{z}, w).$$

Una consecuencia inconveniente es que, *prima facie,* una propiedad inductiva no debe ser de la forma

$$xR_* z \,.\, \phi\,!\,z$$

o

$$S \in \text{Potid}'R \,.\, \phi\,!\,S$$

o $$\alpha \in \mathrm{NC\,induct} \cdot \phi ! \alpha.$$

Resulta inconveniente, porque, con frecuencia, tales propiedades son hereditarias cuando ϕ no figura sola; esto es, podemos tener

$$xR_* z \cdot \phi ! z \cdot zRw \cdot \supset_{z,w} \cdot xR_* w \cdot \phi ! w$$

cuando no tengamos

$$\phi ! z \cdot zRw \cdot \supset_{z,w} \cdot \phi ! w,$$

y, de manera semejante, en otros casos.

Estas consideraciones hacen necesario reexaminar todas las pruebas inductivas. En algunos casos son todavía válidas; en otros, son fácilmente rectificables; y, finalmente, en otros la rectificación puede ser laboriosa, pero siempre posible. El método de rectificación se explica en el Apéndice B de este volumen.

Sin embargo, en tanto no la podamos descubrir, no hay una vía por la que nuestras proposiciones primitivas, que acabamos de exponer, puedan adecuarse a las relaciones dedekindianas y a las relaciones bien-ordenadas. El uso práctico de las relaciones dedekindianas depende de las *211·63–·692, que llevan a las *214·3–·34, mostrando que la serie de partes de una serie es una relación dedekindiana. Sobre esto se apoya la teoría de los número reales, definidos como partes de la serie de los números racionales. Esta cuestión se trata en el *310. Si pusiésemos en duda la proposición que dice que la serie de los números reales es dedekindiana, este análisis se derrumbaría.

Las pruebas de esta proposición en los *Principia Mathematica* depende del axioma de la reducibilidad, puesto que dependen del *211·64, que asevera:

$$\lambda \subset \mathrm{D}`P_\epsilon \cdot \supset \cdot s`\lambda \in \mathrm{D}`P_\epsilon.$$

Por razones explicadas anteriormente, si α es del orden de los miembros de λ, $(\alpha) \cdot f\alpha$ puede no implicar $f(s`\lambda)$, porque $s`\lambda$ es una clase de un orden superior al de los miembros de λ. Así, pues, aunque tengamos

$$\mathrm{D}`P_\epsilon = \hat{\alpha}\,\{(\exists\beta) \cdot \alpha = P``\beta\},$$
$$s`\lambda = P``s`\breve{P}_\epsilon``\lambda,$$

aún no podemos inferir $s`\lambda \in \mathrm{D}`P\epsilon$ salvo cuando $s`\lambda$ o $s`\breve{P}\epsilon``\lambda$, por alguna razón especial, sea del mismo orden que el de los miembros de λ. Esto se dará cuando λ sea finito, pero no necesariamente en otro caso. Por ende, la teoría de los números irracionales requerirá una reconstrucción.

Dificultades similares se presentan con respecto a las series bien-ordenadas. La teoría de las series bien-ordenadas se apoya en la definición *250·01:

$$\mathrm{Bord} = \hat{P}\,(\mathrm{Cl\,ex}`C`P \subset \mathrm{C}`\mathrm{min}_P) \quad \mathrm{Df},$$

de donde $$P \in \mathrm{Bord} \cdot \equiv : \alpha \subset C`P \cdot \exists ! \alpha \cdot \supset_\alpha \cdot \exists ! \alpha - \breve{P}``\alpha.$$

Al hacer deducciones, constantemente sustituimos α por algunas clases construidas de orden superior a $C'P$. Por ejemplo, en *250·122 ponemos en lugar de α la clase $C'P \cap p'\breve{P}''(\alpha \cap C'P)$, que, en general, es de un orden superior a α. Si esta sustitución es ilegítima, no podemos probar que una clase contenida en $C'P$, y que tenga sucesores, debe tener un sucesor inmediato; si no, la teoría de las series bien-ordenadas se hace imposible. Debe salvarse esta dificultad particular; pero es obvio que deben caer muchas proposiciones importantes.

Pudo ser posible sacrificar al rigor lógico la serie infinita bien-ordenada, pero la teoría de los números reales es una parte integrante de la matemática ordinaria, y difícilmente puede ser objeto de una duda razonable. Por tanto, nos justifica el suponer que algún axioma lógico que sea verdadero lo justificará. Se requiere que tal axioma sea más restringido que el de la reducibilidad, aunque está pendiente de descubrirse que sea así.

Entre las contribuciones a la Lógica matemática desde que se publicó la primera edición de los *Principia Mathemática* están las siguientes:

D. HILBERT. Axiomatisches Denken, *Mathematische Annalen,* Vol. 78. Die logischen Grundlagen der Mathematik, *ib.* Vol. 88. Neue Begründung der Mathematik, *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität,* 1922.

P. BERNAYS. Ueber Hilbert's Gedanken zur Grundlegung der Arithmetik, *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung,* Vol. 31.

H. BEHMANN. Beiträge zur Algebra der Logik. *Mathematische Annalen,* Vol. 86.

I. CHWISTEK. Ueber die Antinomien der Prinzipien der Mathematik, *Mathematische Zeitschrift,* Vol. 14. The Theory of Constructive Types. *Annales de la Société Mathématique de Pologne,* 1923. (Dr. Chwistek has kindly allowed us to read in MS. a longer work with the same title.)

H. WEYL. *Das Kontinuum,* Veit, 1918. Ueber die neue Grundlagenkrise der Mathematik, *Mathematische Zeitschrift,* Vol. 10. Randbemerkungen zu Hauptproblemen der Mathematik, *Mathematische Zeitschrift,* Vol. 20.

L. E. J. BROUWER. Begründung der Megenlehre unabhängig vom logischen Satz des ausgeschlossenen Dritten. *Verhandelingen d. K. Akademie v. Wetenschappen,* Amsterdam, 1918, 1919. Intuitionistische Mengenlehre, *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung,* Vol. 28.

A. TAJTELBAUM-TARSKI. Sur le terme primitif de la logistique, *Fundamenta Mathematicae,* Tom. IV. Sur les "truth-functions" au sens de MM. Russell et Whitehead, *ib.* Tom. V. Sur quelques théorèmes qui équivalent à l'axiome du choix, *ib.*

F. BERNSTEIN. Die Mengenlehre Georg Cantor's und der Finitismus, *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung,* Vol. 28.

J. KONIG. *Neue Grundlagen der Logik, Arithmetik und Mengenlehre,* Veit, 1914.

C. I. LEWIS. *A Survey of Symbolic Logic,* University of California, 1918.

H. M. SHEFFER. Total determinations of deductive systems with special reference to the Algebra of Logic. *Bulletin of the American Mathematical Society,* Vol. XVI. *Trans. Amer. Math. Soc.* Vol. XIV. pp. 481-488. *The general theory of notational relativity,* Cambridge, Mass. 1921.

J. G. P. NICOD. A reduction in the number of the primitive propositions of logic. *Proc. Camb. Phil. Soc.* Vol. XIX.

L. WITTGENSTEIN. *Tractatus Logico-Philosophicus,* Kegan Paul, 1922.

M. SCHONWINKEL. Ueber die Bausteine der mathematischen Logik, *Math. Annalen,* Vol. 92.

INTRODUCCION

La Lógica matemática que ocupa la Parte I de este trabajo ha sido elaborada bajo la orientación de tres objetivos diferentes. En primer lugar, aspira a realizar en el mayor grado posible el análisis de las ideas acerca de las que trata y de los procesos que canalizan las demostraciones, así como a reducir al máximo el número de ideas no-definidas y de proposiciones no-demostradas (llamadas, respectivamente, ideas *primitivas* y proposiciones *primitivas*) de las que se parte. En segundo lugar, está construida con vistas a lograr expresiones perfectamente precisas, en sus símbolos, de las proposiciones matemáticas. Alcanzar tales expresiones, y conseguirlas con la notación más simple y más conveniente, es el principal motivo para la preferencia por esta cuestión. En tercer lugar, el sistema está especialmente estructurado para resolver las paradojas que en los últimos años han preocupado a los estudiantes de Lógica simbólica y de Teoría de conjuntos. Confiamos en que la teoría de tipos, tal como la exponemos en lo que sigue nos lleve tanto a evitar las contradicciones como a detectar las falacias concretas que las ocasionan.

De los tres objetivos mencionados, el primero y el tercero nos impulsan frecuentemente a adoptar métodos, definiciones y notaciones que son más complicadas o más dificultosas que si se tuviese en cuenta sólo el segundo objetivo. Esto se aplica especialmente a la teoría de las expresiones descriptivas (*14 y *30) y a la teoría de clases y relaciones (*20 y *21). En estos dos puntos y, en menor grado, en los otros, fue necesario sacrificar algo la claridad en pro de la corrección. Sin embargo, tal sacrificio es, en lo principal, sólo pasajero: en cada caso, la notación finalmente adoptada, aunque su significado real fuese muy complicado, tiene una significación aparentemente simple que, excepto en ciertos puntos críticos, puede, sin riesgo, sustituirse mentalmente por el significado real. Por esto, es conveniente, en una exposición preliminar de la notación, considerar estos significados aparentemente simples como ideas primitivas, es decir, como ideas introducidas sin definición. Cuando la notación se hace cada vez más familiar, resulta más fácil seguir las exposiciones más complicadas, que es lo que consideramos más correcto. En la parte principal del trabajo, en donde es necesario ceñirse rígidamente al estricto orden lógico, podría no adoptarse el orden más sencillo de desarrollo; esto, por lo tanto, se ofrece en la Introducción. Los desarrollos que se dan en el Capítulo I de la Introducción son tales que anteponen la claridad a la corrección; las explanaciones completas se dan, en parte, en los capítulos que siguen a la Introducción, y, en parte, en el cuerpo de la obra.

El empleo del simbolismo (distinto del lingüístico) en todas las partes del libro

que pretenden incorporar razonamientos demostrativos estrictamente precisos, nos ha venido forzado por la consiguiente búsqueda de los tres objetivos señalados. Hay muchas razones en favor de la ampliación del simbolismo más allá de la región habitual del número, e ideas asociadas con el:

(1) Las ideas que aquí se utilizan son más abstractas que las que ordinariamente se consideran en el lenguaje. En consecuencia, no hay palabras que se usen exclusivamente en los sentidos exactos que se exigen en este trabajo. Recurrir a las palabras impondría unas limitaciones, no naturales, a sus significaciones ordinarias; de hecho, esto traería consigo una mayor dificultad para recordar, coherentemente, que se trata de definiciones de símbolos completamente nuevos.

(2) La estructura gramatical del lenguaje se adapta a una amplia variedad de usos. Siendo así, no posee esa simplicidad singular en cuanto a representar los poco simples –aunque sumamente abstractos– procesos e ideas que surgen en las cadenas de razonamientos deductivos empleados aquí. De hecho, la muy abstracta simplicidad de las ideas de este trabajo frustran el lenguaje. El lenguaje puede representar, con más facilidad, las ideas complejas. La proposición "una ballena es grande" representa un lenguaje que, en el mejor de los casos, ofrece una expresión concisa de un hecho complejo; mientras que el verdadero análisis de "el uno es un número" nos lleva, utilizando el lenguaje, a una prolijidad intolerable. De acuerdo con esto, se gana en laconismo si se emplea un simbolismo especialmente diseñado para representar las ideas y los procesos de deducción que se presentan en este trabajo.

(3) La adaptación de las reglas del simbolismo a los procesos de deducción presta una ayuda fácil a la intuición en regiones demasiado abstractas para que la imaginación pueda ofrecer a la mente la verdadera relación que existe entre las ideas empleadas. Llegan a hacerse familiares las diversas maneras de colocar los símbolos, como representativas de importantes modos de disponer las ideas; y, a su vez, también se hacen familiares las posibles relaciones existentes –de acuerdo con las reglas del simbolismo– entre estas colocaciones de símbolos; y, más aún, estas colocaciones representan relaciones todavía más complicadas entre las ideas abstractas. Y, de esta manera, finalmente, se lleva a la mente a construir cadenas de razonamientos en regiones del pensamiento en las que la imaginación sería enteramente incapaz por sí misma de mantenerlas sin la ayuda de la simbología. El lenguaje ordinario no permite tal ayuda. Su estructura gramatical no representa de manera unívoca las relaciones entre las ideas en cuestión. Así, pues, las dos proposiciones "una ballena es grande" y "el uno es un número" parecen semejantes, de modo que la vista no presta ayuda a la imaginación.

(4) El laconismo propio de las expresiones simbólicas permite que una proposición entera se presente de un golpe de vista como una totalidad, o, a lo sumo, en dos o tres partes divididas por donde hay separaciones naturales a las que se les concede representación simbólica. Esto parece una modesta propiedad pero, de hecho, es muy importante por lo que respecta a las ventajas enumeradas en el punto (3).

(5) El logro del objetivo de esta obra mencionado en primer lugar, a saber, la completa enumeración de todas las ideas y pasos empleados en los razonamientos de matemáticas, necesita tanto del laconismo como de la máxima formalidad que permitan sus propias características.

Una somera consideración acerca de los límites del empleo de los métodos y del simbolismo utilizados en este libro arroja una luz adicional sobre tales métodos y simbolismo:

(α) La mayor parte de la investigación matemática no se ha interesado por el análisis del proceso completo del razonamiento, sino por la presentación de un resumen de la prueba, en la medida suficiente para convencer a una mente adecuadamente instruida. Para tales investigaciones, la presentación detallada de los pasos del raciocinio es, desde luego, innecesaria, con tal que el detalle se lleve a un grado suficiente como para preservarnos del error. En relación con esto, puede recordarse que las investigaciones de Weierstrass y de otros autores de la misma escuela han mostrado que, aún en las cuestiones comunes del pensamiento matemático, son necesarios muchos más detalles que los que habían previsto las anteriores generaciones de matemáticos.

(β) En la misma medida en que la imaginación opere fácilmente en una región del pensamiento, el simbolismo (excepto para el propósito expreso del análisis) se hace necesario sólo como una escritura taquigráfica para registrar resultados obtenidos sin su ayuda. Pero un objetivo subsidiario de este trabajo es mostrar que, con ayuda del simbolismo, el razonamiento deductivo puede extenderse a regiones del pensamiento que, ordinariamente, no se suponen adecuadas para el tratamiento matemático. En tanto que las ideas de tales ramas del conocimiento se hagan más familiares, el tipo detallado de razonamiento, que también se precisa para el análisis de los pasos, es adecuado para la investigación de las verdades generales relativas a estas cuestiones.

CAPITULO I

EXPLICACIONES PRELIMINARES DE IDEAS Y NOTACIONES

La notación adoptada en este trabajo está basada en la de Peano, y las explicaciones que siguen, hasta cierto punto, están expuestas según modelos que él expresó con anterioridad en su *Formulario Mathematico.* Se adopta su uso de puntos y corchetes, así como muchos de sus símbolos.

Variables. La idea de variable, tal como se presenta en este trabajo, es más general que la que explícitamente se usa en la Matemática ordinaria. En la Matemática ordinaria, una variable representa generalmente a un número o cantidad indeterminados. En Lógica matemática, se llama *variable* a cualquier símbolo cuyo significado no esté determinado; a las diversas determinaciones de las que es susceptible su significado se llaman *valores* de la variable. Según las circunstancias, puede ser valor cualquier conjunto de entidades, proposiciones, funciones, clases, o relaciones. Si construimos una expresión acerca de "el Sr. A y el Sr. B", entonces el "Sr. A" y el "Sr. B" son variables cuyos valores están limitados al hecho de ser hombres. Una variable puede tener o bien un rango de valores asignados convencionalmente, o bien (en el caso de ausencia de cualquier indicación del rango de valores) puede tener por rango de sus valores todas las determinaciones que hacen que la expresión adquiera una significación. Así, pues, cuando un libro de texto de Lógica afirma que "A es A", sin ninguna indicación acerca de lo que pueda ser A, lo que significa es que *cualquier* declaración de la forma "A es A" es verdadera. Podemos llamar variable *restringida* a aquella variable cuyos valores están limitados a sólo algunos de cuantos podría tener; de no ser así, la llamaremos *no restringida.* Así, pues, cuando intervenga una variable no restringida, ésta representa a un objeto del que se puede hacer una expresión al respecto que tenga significación (esto es, que la haga verdadera o falsa) relativa a dicho objeto. Por lo que respecta a la Lógica, resulta más conveniente usar variables no restringidas que restringidas; nosotros siempre emplearemos aquellas. Se verá que aún la variable no-restringida está sujeta a limitaciones impuestas por su manera de presentarse; esto es, cosas que pueden decirse con significación cuando se refieren a una proposición no pueden decirse en cuanto a una clase o a una relación, y así sucesivamente. Pero las limitaciones a las que está sujeta la variable no retringida no necesitan estar indicadas explícitamente, puesto que ellas mismas son los límites de significación de la expresión en la que se encuentra la variable y, por tanto, están intrínsecamente determinadas por la propia expresión. Esto será explicado ampliamente más adelante. (12).

(12) Cf. Capítulo II de la Introducción.

Para concretar, los tres datos destacables, en cuanto al empleo de las variables, son: 1) que una variable es ambigua en su designación, y, por tanto, indefinida; 2) que una variable conserva una identidad reconocible en las diversas veces que se presenta a lo largo de un contexto, de manera que muchas variables pueden presentarse juntas en el mismo contexto, cada una con su identidad particular; y 3) que, o el rango de las posibles determinaciones de dos variables puede ser el mismo, de forma que una posible determinación de una variable sea también una posible determinación de la otra, o bien que los rangos de dos variables puedan ser diferentes, de manera que, si una posible determinación de una variable se aplica a la otra, la frase completa que resulta es un sin-sentido en vez de convertirse en una proposición completa (verdadera o falsa) sin ambigüedad alguna, como sería el caso si todas las variables que intervienen en ella hubiesen sido dadas en algunas determinaciones *apropiadas.*

Los empleos de diversas letras. Las variables se designarán por letras únicas, así como ciertas constantes; pero una letra que haya sido asignada una vez como una constante mediante una definición no debe, en adelante, usarse para designar una variable. Las letras minúsculas del alfabeto ordinario se emplearán todas como variables, excepto la *p* y la *s* después del *40, en donde a estas dos letras se le asignan significaciones de constantes. Las siguientes letras mayúsculas recibirán significados como constantes: *B, C, D, E, F, I* y *J.* Entre las letras griegas minúsculas, daremos significados como constantes a ϵ, ι y (en una etapa posterior) a η, θ y ω. Ciertas letras griegas mayúsculas se emplearán, de vez en cuando, como constantes, pero no se usarán como variables. De las restantes letras, a *p, q, r* se llamarán *letras proposicionales,* y representarán a las proposiciones variables (excepto que, a partir del *40, *p* no debe utilizarse como variable); *f, g,* ϕ, ψ, χ, θ y (hasta el *30) *F* se llamarán *letras funcionales,* y se usarán para funciones variables.

Las letras griegas minúsculas todavía no mencionadas se usarán para representar variables cuyos valores son clases; nos referiremos a ellas llamándolas simplemente *letras griegas.* Normalmente, las letras mayúsculas aún no citadas se emplearán para variables cuyos valores son relaciones, y, para simplificar, se llamarán *letras mayúsculas.* Ordinariamente, las letras minúsculas (excepto *p, q, r, s, f, g*) se usarán como variables cuyos valores no sean funciones, clases o relaciones; estas letras se designarán simplemente como *letras latinas minúsculas.*

Después de la parte inicial del trabajo apenas aparecerán proposiciones y funciones variables. Tendremos, entonces, tres clases principales de variables: clases variables, representadas por letras griegas minúsculas; relaciones variables, representadas por letras mayúsculas; y otras variables que no se dan necesariamente como clases o como relaciones, las cuales se representarán por letras latinas minúsculas.

Además de este uso de las letras griegas minúsculas para clases variables, letras mayúsculas para relaciones variables, y letras latinas minúsculas para variables de tipo completamente indeterminado por el contexto (éstas surgen a partir de la "ambigüedad sistemática", cuestión que se explicará más adelante, cuando se

exponga la teoría de tipos), el lector sólo necesita recordar que todas las letras representan variables, a no ser que se hayan definido como constantes en algún lugar previo del libro. En general, la propia estructura del contexto determina el alcance de las variables contenidas en él; pero la indicación especial acerca de la naturaleza de las variables empleadas como aquí se propone, evita mucho esfuerzo mental.

Las funciones fundamentales de proposiciones. Un conjunto de proposiciones, considerado como una totalidad –que no es preciso que esté determinada de una manera inequívoca– dentro de una proposición única más compleja que sus constituyentes, es una función que tiene *proposiciones como argumentos.* La idea general de un conjunto tal de proposiciones, o de variables que representen proposiciones, no se empleará en este trabajo. Pero hay cuatro casos especiales que son de importancia fundamental, ya que todos los conjuntos de proposiciones subordinadas que haya dentro de una proposición compleja que se presente en lo sucesivo, se forman a partir de ellas, paso a paso.

Son: 1) la función contradictoria, 2) la suma lógica o función disyuntiva, 3) el producto lógico o función conjuntiva, y 4) la función implicativa. Estas funciones, en la forma en que se adoptan en este libro, no son todas independientes entre sí; si dos de ellas se toman como ideas primitivas indefinidas, las otras dos pueden definirse en función de las primeras. Hasta cierto punto –aunque no enteramente– es arbitraria la elección de las funciones que se tomen como primitivas. No obstante, la simplicidad de las ideas primitivas y la simetría del tratamiento parecen mejorarse tomando como ideas primitivas las dos primeras funciones.

La función contradictoria con argumento p, siendo p una proposición cualquiera, es la proposición contradictoria de p; es decir, es la proposición que asevera que p no es verdadera. Esto se simboliza por $\sim p$. Por tanto, $\sim p$ es la función contradictoria con argumento p, y significa la negación de la proposición p. También se le denomina proposición no-p. Así, pues, $\sim p$ significa no-p, que, a su vez, significa la negación de p.

La suma lógica es una función proposicional que tiene dos argumentos, p y q; es la proposición que asevera disyuntivamente p o q; esto es, que afirma que, por lo menos uno de los dos argumentos (p o q) es verdadero. Esto se simboliza por $p \vee q$. Así, pues, $p \vee q$ es la suma lógica que tiene a p y q como argumentos. También se llama suma lógica de p y q. Consecuentemente, $p \vee q$ significa que, por lo menos, o p o q es verdadero, sin excluir el caso en que ambos sean verdaderos.

El producto lógico es una función proposicional con dos argumentos, p y q, consistente en la proposición que asevera conjuntamente a p y q, esto es, que afirma que ambos –p y q– son verdaderos. Esto se representa por $p \,.\, q$, o –a fin de conseguir que los puntos actúen como paréntesis en la forma en que se explicará a continuación– por $p : q$, o por $p :. q$, o por $p :: q$. Así, $p \,.\, q$ es el producto lógico que tiene a p y q por argumentos. Se llama también producto lógico de p y q. De acuerdo con lo dicho, $p \,.\, q$ significa que ambos argumentos son verdaderos. Fácil-

mente se ve que esta función puede definirse en términos de las dos funciones precedentes: cuando p y q son ambos verdaderos, debe ser falso que, o bien $\sim p$ o bien $\sim q$ sean verdaderos. Por tanto, en este libro, $p \,.\, q$ no es más que una forma simbólica abreviada de:

$$\sim (\sim p \vee \sim q).$$

Si, más adelante, alguna otra idea se adscribe a la proposición "p y q son ambos verdaderos" no se precisa aquí.

La función implicativa es una función proposicional de dos argumentos, p y q; consiste en la proposición en la que, o bien no-p o bien q son verdaderos; es decir, es la proposición $\sim p \vee q$. Así, pues, si p es verdadera, $\sim p$ es falsa, y, por tanto, la única alternativa que concede la proposición $\sim p \vee q$ es que q sea verdadera. En otras palabras, si p y $\sim q \vee q$ son ambas verdaderas, entonces q es verdadera. En este sentido, la proposición $\sim p \vee q$, tal como se viene especificando, se citará diciendo que p implica q. La idea contenida en esta función proposicional es tan importante que exige un símbolo que, de una manera directa y simple, represente a la proposición que conecta p y q, sin la intervención de $\sim$p. Pero la palabra "implica", tal como se usa aquí, no expresa más que una determinada conexión existente entre p y q que también puede expresarse mediante la disyunción "no-p o q". El símbolo empleado para "p implica q" (es decir, para "$\sim p \vee q$") es "$p \supset q$". Este símbolo también puede leerse "si p, entonces q". La asociación de la implicación con el empleo de una variable aparente da lugar a una extensión de la misma, que llamamos "implicación formal". Esta se explicará más adelante: es una idea derivada de la "implicación", tal como se expone aquí. Cuando de una manera explícita sea necesario distinguir la "implicación" de la "implicación formal", a la primera se le llamará "implicación material". De este modo, la "implicación material" es simplemente la "implicación", en la forma en que aquí se ha explicado. El proceso de inferencia, que en el uso ordinario se confunde frecuentemente con la impliación, se explicará inmediatamente.

Estas cuatro funciones de proposiciones son las fundamentales funciones proposicionales constantes (es decir, definidas), cuyos *argumentos son proposiciones;* todas las demás funciones proposicionales constantes con proposiciones como argumentos, en la medida en que se necesiten en este trabajo, se forman a partir de aquellas mediante pasos sucesivos. Funciones proposicionales *variables* de esta clase no aparecerán en esta obra.

Equivalencia. El ejemplo más simple de la formación de una función de proposiciones más compleja mediante el uso de estas cuatro formas fundamentales viene deparado por la "equivalencia". Dos proposiciones, p y q, se dice que son "equivalentes" cuando p implica q y q implica p. Esta relación entre p y q, se designa por "$p \equiv q$". Así, pues, "$p \equiv q$" representa a "$(p \supset q) \,.\, (q \supset p)$". Resulta sencillo comprobar que dos proposiciones son equivalentes cuando, y sólo cuando, ambas son verdaderas o ambas falsas. La equivalencia adquiere mayor importancia cuando

llegamos a la "implicación formal" y, de este modo, a la "equivalencia formal". No debe suponerse que dos proposiciones que son equivalentes sean, en algún sentido, idénticas, ni siquiera que tengan una relación remota entre sí. Así, pues, "Newton fue un hombre" y "el sol es caliente" son equivalentes por ser ambas verdaderas; y, asimismo, "Newton no fue un hombre" y "el sol es frío" son, también, equivalentes por ser ambas falsas. Pero aquí hemos anticipado deducciones que más adelante se seguirán de nuestro razonamiento formal. La equivalencia es, en su origen, una mera implicación mutua, como ya se explicó anteriormente.

Valores de verdad. El "valor de verdad" de una proposición es *verdad* si ella es verdadera, y *falsedad* si ella es falsa (13). Se observará que los valores de verdad de $p \vee q$, $p \,.\, q$, $p \supset q$, $\sim p$, $q \equiv q$ dependen solamente de los que tengan p y q; es decir, el valor de verdad de "$p \vee q$" es verdad si el valor de p, o bien de q, es verdad, y sería falso en caso diferente; que el de "$p \,.\, q$" es verdad si tanto p como q son verdaderos, y falso en cualquier otro caso; que el de "$p \supset q$" es verdad si bien o p es falso o q verdadero; que el de "$\sim p$" es el opuesto al de p; que el de "$p \equiv q$" es verdad si p y q tienen el mismo valor de verdad, y falso en caso diferente. A partir de ahora, las únicas maneras en que aparecerán las proposiciones en este trabajo son las que se derivan de las anteriores mediante combinaciones y repeticiones. Por tanto, es fácil ver (aunque no se pueda probar formalmente, salvo en cada caso particular) que si una proposición p interviene en otra proposición $f(p)$, de la que ya nos ocuparemos, el valor de verdad de $f(p)$ no dependerá de la proposición particular p, sino sólo de su valor de verdad; es decir, si $p \equiv q$, tendremos $f(p) \equiv f(q)$. De este modo, siempre que se sepa que dos proposiciones son equivalentes, una de ellas puede sustituirse por la otra en cualquier fórmula con las que tendremos que tratar.

A una función $f(p)$ podemos llamarla "función de verdad" cuando su argumento p sea una proposición y el valor de verdad de $f(p)$ dependa sólo del valor de verdad de p. Tales funciones en modo alguno son las únicas funciones corrientes de proposiciones. Por ejemplo, "A cree p" es una función de p, cuyo valor de verdad cambiará según los diferentes argumentos que tengan el mismo valor de verdad: A puede creer en una proposición verdadera sin creer en otra, y puede creer en una proposición falsa sin creer en otra. Tales funciones no se excluyen de nuestra consideración, antes bien se incorporan al alcance de algunas proposiciones generales que podemos hacer sobre funciones; pero las funciones particulares de proposiciones que hemos de componer o de considerar explícitamente son todas funciones de verdad. Este hecho está estrechamente conectado con una característica de las matemáticas, a saber, que las matemáticas siempre se interesan por las extensiones más que por las intensiones. La conexión, si no obvia ahora, lo será más cuando hayamos considerado la teoría de clases y relaciones.

El signo de aserción. El signo "$\vdash$", llamado "signo de aserción", significa que se asevera lo que le sigue. Tal signo se necesita para distinguir una proposición

(13) Esta frase se debe a Frege.

completa, que aseveramos, de cualquier otra proposición subordinada contenida en ella, pero sin aseverar. En el lenguaje escrito ordinario, una frase que se encuentre entre puntos significa una proposición aseverada; si fuese falsa, el libro contendría un error. El símbolo "$\vdash$" antepuesto a una proposición desempeña este mismo objetivo en nuestro simbolismo. Por ejemplo, si se presenta "$\vdash (p \supset p)$" debe considerarse como una aserción completa, responsabilizando del error a los autores, salvo que la proposición "$p \supset p$" sea verdadera (como así es). También, una proposición formulada por medio de símbolos sin que le preceda el signo "$\vdash$" no está aseverada, y está puesta solamente para consideración, o como una parte subordinada de una proposición aseverada.

Inferencia. El proceso de inferencia es como sigue: se asevera una proposición "p", y se asevera también una proposición "p implica q"; entonces, como conclusión, se asevera la proposición "q". Lo que ofrece confianza en una inferencia es que si las dos aserciones primeras no son erróneas, la aserción final tampoco lo es. Por consiguiente, siempre que (en símbolos), en donde p y q tengan determinaciones de carácter especial, se presenten

$$\text{“}\vdash p\text{”} \quad \text{y} \quad \text{“}\vdash (p \supset q)\text{”}$$

entonces ocurrirá "$\vdash q$", si es que se desea hacerlo constar de una manera expresa. El proceso de la inferencia no puede reducirse a símbolos. Su única manifestación es que sucede "$\vdash q$". Desde luego, es conveniente, aun a riesgo de repetición, escribir "$\vdash p$" y "$\vdash (p \supset q)$" en íntima yuxtaposición antes de llegar a "$\vdash q$" como el resultado de una inferencia. Cuando se hace esto, en sustitución de ello –y a fin de atraer la atención hacia la inferencia que se está haciendo– escribiremos:

$$\text{“}\vdash p \supset \vdash q\text{,”}$$

lo que se considera como una mera forma abreviada de la expresión triple

$$\text{“}\vdash p\text{”} \quad \text{y} \quad \text{“}\vdash (p \supset q)\text{”} \quad \text{y} \quad \text{“}\vdash q\text{.”}$$

Así, pues, "$\vdash p \supset \vdash q$" puede leerse "$p$, por consiguiente q", siendo, de hecho, esencialmente, la misma forma abreviada, como así es; a pesar de ello, "p, por consiguiente q" no manifiesta explícitamente (lo que es parte de su significado) que p implica q. Una inferencia es la eliminación de una premisa verdadera; es la disolución de una implicación.

El uso de puntos. Los puntos, en su condición de símbolos, tienen dos usos: uno como paréntesis separador de proposiciones, y el otro para indicar el producto lógico de dos proposiciones. Los puntos que están inmediatamente precedidos o seguidos por "$\vee$", "$\supset$", "$\equiv$", "$\vdash$", "(x)", "(x, y)", "(x, y, z)"... o por "$(\exists x)$", "$(\exists x, y)$", "$(\exists x, y, z)$"... o por "$[(\imath x)(\phi x)]$", "$[R`y]$", o por otra expresión semejante, sirven para separar parentéticamente a una proposición; los puntos que se presenten de otra manera sirven para señalar un producto lógico. El principio general es que un mayor número de puntos indica un paréntesis exterior, y un

número menor indica un paréntesis interior. La regla exacta en lo que se refiere al alcance del paréntesis indicado por los puntos se aplica clasificando las presencias de los puntos en tres grupos que llamaremos I, II y III. El grupo I está integrado por aquellos puntos que se encuentren junto a los signos de implicación ($\supset$), equivalencia ($\equiv$), disyunción ($\vee$), o igualdad por definición ($=$ Df). El grupo II lo constituyen los puntos que siguen a paréntesis indicativos de una variable aparente, tales como (x), (x, y), $(\exists x)$, $(\exists x, y)$, $[(x\phi)(x\iota)]$, o expresiones análogas (14). El grupo III consta de los puntos que se encuentran entre proposiciones a fin de indicar un producto lógico. El grupo I es de mayor fuerza que el grupo II, y el grupo II que el grupo III. El alcance del paréntesis indicado por una colección de puntos se extiende hacia atrás y hacia adelante (sobrepasando cualquier número de puntos que sea *menor,* o a un número de puntos *igual* pero perteneciente a un grupo de menor fuerza) hasta alcanzar el extremo de la proposición aseverada, o a un número *mayor* de puntos, o a un número *igual* al que pertenezca a un grupo de fuerza igual o superior. Los puntos que indican un producto lógico tienen un alcance que va tanto hacia atrás como hacia adelante; otros puntos sólo surten efecto más allá del signo adyacente de disyunción, implicación o equivalencia, o hacia atrás del signo adyacente de uno de los otros tipos enumerados en el grupo II.

Algunos ejemplos servirán para ilustrar el empleo de los puntos.

"$p \vee q \,.\supset.\, q \vee p$" significa la proposición "'p o q' implica 'q o p' ". Cuando *aseveramos* esta proposición, en vez de manifestarlo simplemente, escribimos

$$\text{"}\vdash : p \vee q \,.\supset.\, q \vee p,\text{"}$$

en donde los dos puntos después del signo de aserción manifiestan que lo que se asevera es todo lo que sigue al signo de aserción, ya que no se encuentran otros dos puntos en ningún otro lugar. Si hubiésemos escrito "$p : \vee : q \,.\supset.\, q \vee p$", esto significaría la proposición "o p es verdadero, o q implica 'q o p' ". Si hubiésemos querido aseverar esto, tendríamos que colocar tres puntos después del signo de aserción. Si hubiésemos escrito "$p \vee q \,.\supset\, q : \vee : p$", eso significaría la proposición "o bien 'p o q' implica q, o p es verdadero". Las formas "$p \,.\vee.\, q \,.\supset.\, q \vee p$" y "$p \vee q \,.\supset.\, q \,.\vee.\, p$" carecen de significación.

"$p \supset q \,.\supset : q \supset r \,.\supset.\, p \supset r$" significa: "si p implica q, entonces si q implica r, p implica r". Si deseamos aseverar esto (que es verdadero) escribiremos

$$\text{"}\vdash :. p \supset q \,.\supset : q \supset r \,.\supset.\, p \supset r.\text{"}$$

De nuevo, "$p \supset q \,.\supset.\, q \supset r : \supset.\, p \supset r$" significa: "si '$p$ implica q' implica 'q implica r', entonces 'p implica r' ". Esto, en general, no es verdadero. (Obsérvese que algunas veces resulta más conveniente leer "$p \supset q$" como "p implica q", y otras veces como "si p, entonces q"). La expresión "$p \supset q \,.\, q \supset r \,.\supset.\, p \supset r$" significa "si p implica q, y q implica r, entonces p implica r". En esta fórmula, el primer punto

(14) Más adelante se explicará el significado de estas expresiones; y en las pp. 70, 71 se darán algunos ejemplos del uso de puntos en relación con ellas.

indica un producto lógico; por tanto, el alcance del segundo punto abarca hacia atrás hasta el comienzo de la proposición. "$p \supset q : q \supset r \,.\, \supset \,.\, p \supset r$" significa "$p$ implica q; y si q implica r, entonces p implica r". (Esto, en general, no es verdadero). Aquí, los dos puntos indican un producto lógico; ya que otros dos puntos no aparecen en ningún otro lugar, el alcance de estos dos puntos se extiende hacia atrás hasta el comienzo de la proposición, y hacia adelante hasta el final de la misma.

La proposición "$p \vee q \,.\, \supset :. p \,.\, \vee \,.\, q \supset r : \supset \,.\, p \vee r$" significa: "si p o q es verdadero, entonces si p o 'q implica r' es verdadero, de ello se sigue que p o q es verdadero". Si se quiere aseverar esta expresión, debemos poner cuatro puntos después del signo de aserción, de este modo:

$$\text{"}\vdash :: p \vee q \,.\, \supset :. p \,.\, \vee \,.\, q \supset r : \supset \,.\, p \vee r.\text{"}$$

(Esta proposición se prueba dentro de esta obra; es la $*2{\cdot}75$). Si deseamos aseverar (lo que es equivalente a la de arriba) la proposición: "si p o q es verdadero, y p o 'q implica r' es verdadero, entonces p o r es verdadero" escribiremos

$$\text{"}\vdash :. p \vee q : p \,.\, \vee \,.\, q \supset r : \supset \,.\, p \vee r.\text{"}$$

Aquí, el primer par de puntos indica un producto lógico, mientras que el segundo par no. Por ello, el alcance del segundo par de puntos sobrepasa a los del primer par, y abarca hacia atrás hasta llegar a los tres puntos que están después del signo de aserción.

Otros usos de los puntos siguen los mismos principios, y se explicará cómo se introducen. Al leer una proposición, en lo primero que hay que fijarse es en los puntos, ya que ellos manifiestan la estructura de la proposición. En una proposición que contenga varios signos de implicación o de equivalencia, el que tenga un mayor número de puntos antes o después de él es el signo *principal*; queda claro que, en la proposición, cuanto antecede al signo principal implica, o equivale, a cuanto viene después de él.

Definiciones. Una definición es una declaración en la que un cierto símbolo –o combinación de símbolos– introducido como nuevo significa lo mismo que otra cierta combinación de símbolos cuyo significado ya se conoce. O bien, si la combinación de símbolos que se define es tal que sólo adquiere significación cuando se combinan con otros símbolos de una manera determinada (15); lo que significa es que, cualquier combinación de símbolos en la que interviene el símbolo (o combinación de símbolos) de nueva definición es tal que tiene ese significado (si lo hay) que resulta de sustituir la combinación de símbolos que definen por el símbolo (o combinación de símbolos) de nueva definición. Daremos los nombres de *definiendum* y *definiens*, respectivamente, a aquello a lo que se define y a lo que es definido como significación. Expresamos una definición poniendo el *definiendum* a

(15) Este caso se considerará de forma completa en el Cap. III de la Introducción. No se precisa adelantarlo en este punto.

la izquierda y el *definiens* a la derecha, con el signo "=" entre ambos, y colocando las letras "Df" a la derecha del *definiens*. Debe entenderse que el signo "=" y las letras "Df" han de considerarse juntamente formando un solo símbolo. El símbolo "=" sin las letras "Df" tiene una significación diferente, como se explicará en breve.

Un ejemplo de definición es

$$p \supset q \,.=.\, \sim p \vee q \quad \text{Df.}$$

Debe observarse que una definición no es, estrictamente hablando, parte de la cuestión en la que interviene; una definición tiene una relación total con los símbolos, pero no con lo que ellos simbolizan. Por otra parte, tampoco es verdadera o falsa, siendo la expresión de una volición, y no de una proposición. (Por esta razón, las definiciones no están precedidas del signo de aserción). Teóricamente, no siempre es necesario dar una definición: es siempre posible usar el *definiens* en su lugar, y, por ende, prescindir por completo del *definiendum*. De este modo, aunque empleamos definiciones y no definimos la "definición", con todo la "definición" no aparece entre nuestras ideas primitivas porque las definiciones no son parte de nuestro tema, sino que, estrictamente hablando, son meras conveniencias tipográficas. En la práctica, desde luego, si no introducimos definiciones, nuestras fórmulas muy pronto vendrían a ser tan largas que resultarían inmanejables; mas, en teoría, todas las definiciones son supérfluas.

A pesar del hecho de que las definiciones son teóricamente supérfluas, es cierto, no obstante, que ellas suministran una información más importante que la que se contiene en las proposiciones en las que se encuentran. Esto surge de dos causas. Primero, corrientemente una definición implica que el *definiens* merece una consideración cuidadosa. Por eso, la colección de definiciones incorpora nuestra selección de asuntos y nuestro juicio en cuanto a lo que es más importante. En segundo lugar, cuando lo que se define es (como ocurre con frecuencia) algo ya familiar, tal como los números cardinales u ordinales, la definición contiene un análisis de una idea común y, por tanto, puede expresar un notable avance. La definición de Cantor del continuo ilustra esto; su definición equivale a establecer que lo que él define es el objeto que tiene las propiedades comúnmente asociadas con la palabra "continuo", si bien, lo que constituye precisamente estas propiedades no había sido conocido antes. En tales casos, una definición es un "hacer que algo quede delimitado": proporciona una precisión a una idea que previamente había sido más o menos vaga.

Por estas razones, en lo que sigue, se encontrará que las definiciones constituyen lo más importante y lo que más merece la atención prolongada del lector.

Deben hacerse algunas importantes observaciones respecto de las variables que se encuentran en el *definiens* y en el *definiendum*. Pero éstas se aplazarán hasta que se haya introducido la noción de "variable aparente", cuando el asunto pueda considerarse globalmente.

Sumario de las declaraciones anteriores. En lo expuesto hay tres ideas primitivas

que no están "definidas" sino sólo explicadas descriptivamente. Su primitividad es sólo relativa a nuestra exposición de conexión lógica, y no es absoluta; aunque, por supuesto, una exposición tal sube de importancia cuanto mayor sea la simplicidad de sus ideas primitivas. Estas ideas se simbolizan por "$\sim p$", "$p \vee q$", y "$\vdash$" antepuesta a la proposición.

Se han introducido tres definiciones:

$$p \cdot q \cdot = \cdot \sim(\sim p \vee \sim q) \quad \text{Df},$$
$$p \supset q \cdot = \cdot \sim p \vee q \quad \text{Df},$$
$$p \equiv q \cdot = \cdot p \supset q \cdot q \supset p \quad \text{Df}.$$

Proposiciones primitivas. Algunas proposiciones deben ser asumidas sin prueba, ya que todas las inferencias provienen de proposiciones previamente aseveradas. Estas, en la medida en que conciernen a las funciones de proposiciones mencionadas arriba, se establecerán en *1, donde comienza la exposición formal y continuada del tema. Tales proposiciones se llamarán "proposiciones primitivas". Estas, al igual que las ideas primitivas, son hasta cierto punto materia de selección arbitraria; aunque, como en el caso anterior, un sistema lógico crece en importancia en la medida en que las proposiciones primitivas sean pocas y simples. Se verá que, debido a la debilidad de la imaginación para tratar con ideas abstractas simples, no puede realizar un gran esfuerzo sobre su evidencia. Ellas son obvias para un entendimiento instruido, pero también son muchas las proposiciones que no pueden ser completamente verdaderas al ser invalidadas por sus consecuencias contradictorias. La prueba de un sistema lógico es su suficiencia y su coherencia. Esto es: 1) el sistema debe abarcar entre sus deducciones todas aquellas proposiciones que creemos que son verdaderas y capaces de deducción a partir de sólo las premisas lógicas, aunque ellas puedan necesitar alguna ligera limitación en la forma de un aumento en el rigor de la enunciación; 2) el sistema no debe llevar a contradicciones, esto es, que al proceder en nuestras inferencias, nunca debe conducir a aseverar al propio tiempo p y no-p; de otro modo, no pueden aparecer legítimamente "$\vdash . p$" y "$\vdash . \sim p$".

Las que vienen a continuación son las proposiciones primitivas empleadas en el cálculo de proposiciones. Las letras "Pp" significan "proposición primitiva".

1) Lo que esté implicado por una premisa verdadera es verdadero Pp.

Esta es la regla que justifica la inferencia.

2) $\vdash : p \vee p . \supset . p$ Pp,

es decir, si p o p es verdadero, entonces p es verdadero.

3) $\vdash : q . \supset . p \vee q$ Pp,

es decir, si q es verdadero, entonces p o q es verdadero.

4) $\vdash : p \vee q . \supset . q \vee p$ Pp,

es decir, si p o q es verdadero, entonces q o p es verdadero.

5) $\vdash : p \vee (q \vee r) . \supset . q \vee (p \vee r)$ Pp,

es decir, si p es verdadero o "q o r" es verdadero, entonces q es verdadero o "p o r" es verdadero.

6) $\vdash :. q \supset r . \supset : p \vee q . \supset . p \vee r$ Pp,

es decir, si q implica r, entonces "p o q" implica "p o r".

7) Además de estas proposiciones primitivas, necesitamos una proposición primitiva llamada "el axioma de la identificación de variables reales". Cuando tenemos aseveradas por separado dos funciones de x diferentes, en donde x es indeterminado, frecuentemente es importante saber si podemos identificar la x de una aserción con la x de la otra. Este será el caso –hasta donde nuestro axioma nos permita inferir– si ambas aserciones presentan x como el argumento de alguna función, es decir, si ϕx es un componente de ambas aserciones (cualquiera que pueda ser la función proposicional ϕ) o, con más generalidad, si $\phi(x, y, z, \ldots)$ es un constituyente en una aserción, y $\phi(x, u, v, \ldots)$ es un constituyente de la otra. Este axioma introduce nociones que todavía no han sido explicadas; para una aclaración más completa véanse las observaciones que acompañan a *3·03, *1·7, *1·71 y *1·72 (que es la expresión de este axioma) en el texto del libro, así como la explicación de las funciones proposicionales y la aserción ambigua, que se ofrecerán en breve.

Algunas proposiciones simples. Además de las proposiciones primitivas que ya hemos mencionado, presentamos a continuación algunas de las más importantes propiedades elementales de las proposiciones que aparecen en las deducciones.

La ley del medio excluso:

$$\vdash . p \vee \sim p.$$

Esta es la *2·11, más adelante. Indicaremos entre paréntesis los números que remiten a las correspondientes proposiciones que se ofrecen en esta obra.

La ley de contradicción (*3·24):

$$\vdash . \sim (p . \sim p).$$

La ley de la doble negación (*4·13):

$$\vdash . p \equiv \sim (\sim p).$$

El principio de *transposición,* es decir, "si p implica q, entonces no-q implica no-p", y viceversa. Este principio presenta varias formas, a saber:

$$(*4{\cdot}1) \quad \vdash : p \supset q . \equiv . \sim q \supset \sim p,$$
$$(*4{\cdot}11) \quad \vdash : p \equiv q . \equiv . \sim p \equiv \sim q,$$
$$(*4{\cdot}14) \quad \vdash :. p . q . \supset . r : \equiv : p . \sim r . \supset . \sim q,$$

así como otras que son variantes de éstas.

La ley de la tautología, en las dos siguientes formas:

$$(*4{\cdot}24) \quad \vdash : p . \equiv . p . p,$$
$$(*4{\cdot}25) \quad \vdash : p . \equiv . p \vee p,$$

es decir, "p es verdadero" es equivalente a "p es verdadero y p es verdadero", así como a "p es verdadero o p es verdadero". Desde un punto de vista formal, es a través de la ley de la tautología y de sus consecuencias como se distingue principalmente el álgebra que se usa en la lógica del álgebra ordinaria.

La ley de absorción:

$$(*4{\cdot}71) \quad \vdash :. p \supset q \,.\equiv: p \,.\equiv. p \,.\, q,$$

es decir, "p implica q" es equivalente a "p es equivalente a $p \,.\, q$". Esta se llama ley de absorción porque manifiesta que el factor q en el producto es absorbido por el factor p, si p implica q. Este principio nos permite sustituir una implicación ($p \supset q$) por una equivalencia ($p \,.\equiv. p \,.\, q$) dondequiera que sea conveniente hacerlo.

Un análogo y muy importante principio es el siguiente:

$$(*4{\cdot}73) \quad \vdash :. q \,.\supset: p \,.\equiv. p \,.\, q.$$

La suma y la multiplicación lógica de proposiciones obedecen a las leyes asociativa y conmutativa, así como a la ley distributiva expresada en las dos siguientes formas:

$$(*4{\cdot}4) \quad \vdash :. p \,.\, q \vee r \,.\equiv: p \,.\, q \,.\vee. p \,.\, r,$$
$$(*4{\cdot}41) \quad \vdash :. p \,.\vee. q \,.\, r :\equiv: p \vee q \,.\, p \vee r.$$

La segunda de éstas distingue las relaciones de la suma y multiplicación lógicas de las relaciones de la suma y multiplicación aritméticas.

Funciones proposicionales. Sea ϕx una expresión que contiene una variable x y tal que se convierte en una proposición cuando a x se le asigna un significado fijo y determinado. Entonces, a ϕx se le llama "función proposicional"; no es una proposición, ya que debido a la ambigüedad de x realmente no hace una aseveración. Así, "x está herido" en modo alguno puede aseverarse en tanto no tengamos resuelto quién es x. No obstante, debido a la individualidad conservada por la variable ambigua x, constituye un ejemplo ambiguo tomado de la colección de proposiciones que pueden formarse dando a x todas las posibles determinaciones en "x está herido", lo cual conduce a una proposición, verdadera o falsa. También, si "x está herido" e "y está herido" se presentan *en el mismo contexto,* en donde y es otra variable, entonces, de acuerdo con las determinaciones dadas a x y a y, ellas pueden ser determinadas para ser (posiblemente) la misma proposición o (posiblemente) proposiciones diferentes. Pero, independientemente de la determinación dada a x y a y, ellas mantienen en el contexto su diferenciación ambigua. Así, "x está herido" es un "valor" ambiguo de una función proposicional. Cuando queramos hablar de la función proposicional correspondiente a "x está herido" escribiremos "$\hat{x}$ está herido". De este modo, "$\hat{x}$ está herido" es una función proposicional, en tanto que "x está herido" es un valor ambiguo de esa función. De acuerdo con lo anterior, aunque pueden distinguirse "x está herido" e "y está herido" *que se presentan en el mismo contexto,* sin embargo "$\hat{x}$ está herido" e "$\hat{y}$ está herido" en

modo alguno dan a entender la diferencia de significados. Más generalmente, ϕx es un valor ambiguo de la función proposicional $\phi\hat{x}$, y cuando una significación concreta a sustituya a x, ϕa es un valor inequívoco de $\phi\hat{x}$.

Las funciones proposicionales constituyen la clase fundamental de la que se derivan las más usuales clases de funciones, tales como "sen x", "log x" o "el padre de x". Estas funciones derivadas se considerarán más adelante, y se llaman "funciones descriptivas". Las funciones de las proposiciones consideradas más arriba, son un caso particular de funciones proposicionales.

El rango de valores y variación total. De este modo, correspondiente a cualquier función proposicional ϕx existe un rango, o colección, de valores, consistente en todas las proposiciones (verdaderas o falsas) que se pueden obtener dando todas las posibles determinaciones a x en ϕx. Un valor de x para el cual ϕx resulta verdadero se dice que "satisface" a $\phi\hat{x}$. Ahora, por lo que respecta a la verdad o falsedad de las proposiciones de este rango, deben observarse y simbolizarse tres importantes casos. Estos se dan por medio de tres proposiciones, una de las cuales, al menos, debe ser verdadera: o bien, 1) todas las proposiciones del rango son verdaderas, o 2) algunas proposiciones del rango son verdaderas, o 3) ninguna proposición del rango es verdadera. La declaración 1) se simboliza por "$(x) . \phi x$", y la 2) se simboliza por "$(\exists x) . \phi x$". No se dan definiciones de estos dos símbolos que, consecuentemente, incorporan dos nuevas ideas primitivas en nuestro sistema. El símbolo "$(x) . \phi x$" puede leerse "siempre ϕx", o "ϕx es siempre verdadero", o "ϕx es verdadero para todos los posibles valores de x". El símbolo "$(\exists x) . \phi x$" puede leerse "existe una x para la cual ϕx es verdadero", o "existe una x que satisface a $\phi\hat{x}$", y de este modo se ajusta a la forma natural de la expresión del pensamiento.

La proposición 3) puede expresarse en función de las ideas fundamentales de las que ahora disponemos. A fin de hacer esto, obsérvese que "$\sim \phi x$" expresa la contradicción de ϕx. En conformidad con ello, $\sim \phi\hat{x}$ es otra función proposicional tal que cada valor de $\phi\hat{x}$ contradice a un valor de $\sim \phi x$, y viceversa. Por tanto, "$(x) . \sim \phi x$" simboliza la proposición que expresa que todo valor de $\phi\hat{x}$ no es verdadero. Este es el número 3) que se estableció antes.

Es un claro error, aunque fácil de cometer, suponer que los casos 1) y 3) son uno contradictorio del otro. El simbolismo desenmascara esta falacia inmediatamente, pues 1) es $(x) . \phi x$, y 3) es $(x) . \sim \phi x$, mientras que la contradictoria de 1) es $\sim\{(x) . \phi x\}$. Para conseguir brevedad en el simbolismo se hace una definición, a saber:

$$\sim (x) . \phi x . = . \sim \{(x) . \phi x\} \quad \text{Df.}$$

Las definiciones cuyo objeto es conseguir alguna ventaja sencilla en cuanto a brevedad mediante un ligero ajuste de símbolos se denominarán de "importancia meramente simbólica", a diferencia de aquellas otras definiciones que invitan a la consideración de una idea importante.

A la proposición $(x) . \phi x$ se le llama "variación total" de la función $\phi\hat{x}$.

Por razones que se explicarán en el capítulo II, no tomamos a la negación como una idea primitiva en lo que concierne a proposiciones de las formas $(x) \cdot \phi x$ y $(\exists x) \cdot \phi x$; sin embargo, *definimos* la negación de $(x) \cdot \phi x$, es decir, de "ϕx es siempre verdadero", como "ϕx es algunas veces falso", esto es, "$(\exists x) \cdot \sim \phi x$". De manera similar *definimos* la negación de $(\exists x) \cdot \phi x$ como $(x) \cdot \sim \phi x$. Así, pues, tenemos:

$$\sim\{(x) \cdot \phi x\} \cdot = \cdot (\exists x) \cdot \sim \phi x \quad \text{Df},$$
$$\sim\{(\exists x) \cdot \phi x\} \cdot = \cdot (x) \cdot \sim \phi x \quad \text{Df}.$$

De la misma manera definimos una disyunción, en la que una de las proposiciones es de la forma "$(x) \cdot \phi x$" o de la forma "$(\exists x) \cdot \phi x$", en términos de una disyunción de proposiciones que no son de esa forma, poniendo

$$(x) \cdot \phi x \cdot \vee \cdot p : = \cdot (x) \cdot \phi x \vee p \quad \text{Df},$$

esto es, "ϕx es siempre verdadero o p es verdadero" significa que "'ϕx o p' es siempre verdadero". Similares definiciones se dan en otros casos. Esta cuestión se resume en el capítulo II y en el *9 de este tratado.

Variables aparentes. El símbolo "$(x) \cdot \phi x$" expresa una proposición definida, y no existe diferencia de significados entre "$(x) \cdot \phi x$" y "$(y) \cdot \phi y$" cuando se presentan en el mismo contexto. Así, pues, la "x" que interviene en "$(x) \cdot \phi x$" no es un constituyente ambiguo de una expresión en la que aparezca "$(x) \cdot \phi x$"; una expresión de ese tipo no deja de dar a entender un significado determinado por razón de la ambigüedad de la x en "ϕx". El símbolo "$(x) \cdot \phi x$" presenta alguna analogía con el símbolo

$$\text{“}\int_a^b \phi(x)\, dx\text{”}$$

de una integral definida, puesto que en ningún caso la expresión es una función de x.

El rango de la x en "$(x) \cdot \phi x$", o en "$(\exists x) \cdot \phi x$" abarca el campo completo de valores de x para los que "ϕx" tiene significado; consecuentemente, el significado de "$(x) \cdot \phi x$" o de "$(\exists x) \cdot \phi x$" entraña el supuesto de que un campo tal está determinado. La x que aparece en "$(x) \cdot \phi x$" o en "$(\exists x) \cdot \phi x$" se llama (siguiendo a Peano) "variable aparente". Del significado de "$(\exists x) \cdot \phi x$" se sigue que la x en esta expresión es también una variable aparente. Una proposición en la que interviene la x como una variable aparente no es una función de x. Así, por ejemplo, "$(x) \cdot x = x$" significa "cada cosa es igual a sí misma". Esto es una constante absoluta, no una función de una variable x. Esto es por lo que, en tales casos, se dice de x que es una variable *aparente.*

Asimismo, al *"rango"* de x en "$(x) \cdot \phi x$", o en "$(\exists x) \cdot \phi x$", que es el campo de los valores que puede tener x, le llamaremos el *"alcance"* de x, significando la función de la que se afirman todos los valores o algún valor. Si aseveramos todos los valores (o algún valor) de "ϕx", "ϕx" es el alcance de x; si aseveramos todos los valores (o algún valor) de "$\phi x \supset p$", "$\phi x \supset p$" es el alcance de x; si aseveramos

todos los valores (o algún valor) de "$\phi x \supset \psi x$", "$\phi x \supset \psi x$" será el alcance de x, y así sucesivamente. El alcance de x está indicado por el número de puntos que hay después de "(x)" o de "$(\exists x)$"; es decir, el alcance se extiende hacia adelante hasta llegar a un número de puntos igual que no indiquen un producto lógico, o hasta un número mayor que indiquen producto lógico, o hasta el extremo de la proposición aseverada en la que se presente "(x)" o "$(\exists x)$". (Ha de aplicarse cualquiera de éstas que se presente primero) (16). Así, por ejemplo

$$"(x) : \phi x . \supset . \psi x"$$

significa "ϕx siempre implica ψx"; sin embargo,

$$"(x) . \phi x . \supset . \psi x"$$

significa "si ϕx es siempre verdadera, entonces ψx es verdadera para el argumento x".

Obsérvese que en la proposición

$$(x) . \phi x . \supset . \psi x$$

las dos x's no tienen conexión una con la otra. Dado que a la x que está entre paréntesis le sigue sólo un punto, el alcance de la primera x se limita a la "ϕx" que sigue inmediatamente a la x que está entre paréntesis. Esto es lo que nos induce generalmente a escribir

$$(x) . \phi x . \supset . \psi y$$

en vez de

$$(x) . \phi x . \supset . \psi x,$$

ya que el uso de diferentes letras recalca la falta de conexión entre las dos variables; sin embargo no existe necesidad lógica para el empleo de letras distintas, e incluso *algunas veces* es conveniente usar la misma letra.

Aserción ambigua y la variable real. Puede aseverarse cualquier valor "ϕx" de la función $\phi \hat{x}$. Una aserción de este tipo, es decir, de un miembro ambiguo de entre los valores de $\phi \hat{x}$ se simoliza así:

$$"\vdash . \phi x."$$

La aserción ambigua de esta clase es una idea primitiva, que no puede definirse en términos de aserción de proposiciones. Esta idea primitiva es la única que incorpora el uso de la variable. Aparte de la aserción ambigua, la consideración de "ϕx", que es un miembro ambiguo de los valores de $\phi \hat{x}$, es de escasa importancia. Cuando consideramos o aseveramos "ϕx", la variable x se dice que es una "variable real". Tomemos, por ejemplo, la ley del medio excluso en la forma en que se presenta en la lógica formal tradicional:

$$"a \text{ es } b \text{ o no } b".$$

(16) Esto está de acuerdo con las reglas acerca de los modos de presentarse los puntos del tipo del grupo II, tal como se explicó con anterioridad en las pp. 63 y 64.

Aquí, *a* y *b* son variables reales: cuando varían, se expresan diferentes proposiciones, aunque todas son verdaderas. Si son indeterminados a la vez *a* y *b*, como pasa en el enunciado anterior, no se asevera ninguna proposición definida, sino que lo que se asevera es *algún valor* de la función proposicional en cuestión. Esto sólo puede ser legítimamente aseverado si, para cualquier valor que pueda elegirse, ese valor es verdadero; esto es, si todos los valores son verdaderos. Así, pues, la forma expuesta anteriormente de la ley del medio excluso es equivalente a

"(*a*, *b*) . *a* es *b* o no *b*"

es decir, es equivalente a "siempre es verdadero que *a* es *b* o no *b*". Pero estas dos, aunque equivalentes, no son idénticas, y necesariamente las tendremos que mantener diferenciadas.

Cuando aseveramos algo que contiene una variable real, como en el ejemplo

"$\vdash . x = x$,"

aseveramos *algún* valor de una función proposicional. Cuando aseveramos algo que contiene una variable aparente, como en

"$\vdash . (x) . x = x$"

o en "$\vdash . (\exists x) . x = x$,"

aseveramos, en el primer caso *todos* los valores, y en el segundo caso *algún* valor (indeterminado) de la función proposicional en cuestión. Está claro que sólo podemos legítimamente aseverar "*algún* valor" si *todos* los valores son verdaderos; por lo contrario, ya que el valor de la variable permanece determinado, podría también ser determinado para dar lugar a una proposición falsa. Así, en el ejemplo de arriba, ya que tenemos

$$\vdash . x = x$$

podemos inferir

$$\vdash . (x) . x = x.$$

Y, de una manera general, dada una aserción que contenga una variable real *x*, podemos transformar la variable real en aparente sin más que poner al principio la *x* entre paréntesis, seguida de tantos puntos como haya tras el signo de aserción.

Cuando aseveramos algo que contenga una variable real, no podemos decir de forma estricta que aseveramos una *proposición*, pues sólo obtenemos una proposición definida asignando un valor a la variable y, entonces, nuestra aserción sólo se aplica a un caso definido, de forma que en modo alguno tiene la fuerza de antes. Cuando lo que aseveramos contiene una variable real, nosotros aseveramos una (completamente indeterminada) de todas las proposiciones que resultan de dar varios valores a la variable. Será conveniente hablar de aserciones tales *que aseveran una función proposicional*. Las fórmulas ordinarias de matemáticas contienen aserciones de este tipo; por ejemplo

"$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$"

no asevera este o aquel caso particular de la fórmula, ni tampoco asevera que la fórmula sea válida para *todos* los posibles valores de x, aunque es equivalente a esta última aserción; lo que asevera es simplemente que la fórmula es válida aun dejando a x completamente indeterminada. Es legítimo hacer esto porque, independientemente de cómo se determine x, resulta una proposición verdadera.

Aunque una aserción que contiene una variable real, en rigor, no asevera una proposición, se la considerará como que asevera una proposición, salvo que se encuentre bajo discusión la naturaleza de la aserción ambigua.

Definición y variables reales. Cuando el *definiens* contiene una o más variables reales, el *definiendum* también debe contenerlas. En este caso tenemos una función de variables reales, y el *definiendum* debe tener el mismo significado que el *definiens* para todos los valores de estas variables, lo cual exige que el símbolo que es el *definiendum* debe contener las letras que representan a las variables reales. Esta regla no siempre la guardan los matemáticos, y su transgresión ha dado lugar algunas veces a importantes confusiones, especialmente en geometría y en filosofía del espacio.

En las definiciones dadas anteriormente de "$p \,.\, q$", "$p \supset q$", y de "$p \equiv q$", p y q son variables reales y, por tanto, aparecen a ambos lados de la definición. En la definición de "$\sim\{(x) \,.\, \phi x\}$" sólo la función considerada, es decir, $\phi\hat{z}$, es una variable real; de este modo, por lo que concierne a la regla en cuestión, la x no necesita aparecer a la izquierda. Pero cuando una variable real es una función, es necesario indicar cómo ha de ser suministrado el argumento, y, por tanto, existen reparos para omitir una variable aparente en donde (como en el caso anterior) ésta es el argumento de la función que es la variable real. Esto aparece más claramente si, en vez de una función general $\phi\hat{x}$, tomamos alguna función particular, digamos "$\hat{x} = a$", y consideramos la definición de $\sim\{(x) \,.\, x = a\}$. Nuestra definición da

$$\sim\{(x) \,.\, x = a\} \,.=.\, (\exists x) \,.\, \sim(x = a) \quad \text{Df.}$$

Pero si hubiésemos adoptado una notación en la que el valor ambiguo "$x = a$", que contiene la variable aparente x, no hubiese aparecido en el *definiendum*, habríamos tenido que construir una notación que emplease la función misma, es decir "$\hat{x} = a$". Esto no entraña una variable aparente, pero, en la práctica, sería molesto. De hecho lo hemos encontrado conveniente y posible –excepto en las partes explicativas– para mantener el uso explícito de símbolos del tipo "$\phi\hat{x}$", bien como constantes [p. ej. $\hat{x} = a$] o como variables reales, casi enteramente ajeno a este trabajo.

Proposiciones que conectan variables reales y aparentes. Las proposiciones más importantes que conectan variables reales y aparentes son las siguientes:

1) "Cuando puede aseverarse una función proposicional, también puede aseverarse la proposición de que todos los valores de la función son verdaderos". Más brevemente, si bien con menos exactitud, "lo que es válido para uno cualquiera, sea cual sea la forma en que se haya elegido, es válido para todos". Esto mismo se convierte en la regla que dice que cuando una variable real interviene en una

aserción, la podemos transformar en una variable aparente poniendo la letra que la representa entre paréntesis inmediatamente después del signo de aserción.

2) "Lo que es válido para todos es válido para alguno"; esto es,

$$\vdash : (x) . \phi x . \supset . \phi y.$$

Esto manifiesta que "si ϕx es siempre verdadero, entonces ϕy es verdadero".

3) "Si ϕy es verdadero, entonces ϕx es algunas veces verdadero", es decir

$$\vdash : \phi y . \supset . (\exists x) . \phi x.$$

Una proposición aseverada, de la forma "$(\exists x) . \phi x$", expresa un "teorema de existencia", a saber, "hay una x para la cual ϕx es verdadera". La proposición de arriba proporciona lo que, en la práctica, es la única vía para probar los teoremas de existencia: siempre hemos de encontrar alguna y particular para la que ϕy sea verdadera y, a partir de aquí, inferir "$(\exists x) . \phi x$". Si supusiésemos lo que se llama el axioma multiplicativo, o el axioma equivalente enunciado por Zermelo, eso proporcionaría, en un importante conjunto de casos, un teorema de existencia en donde no puede encontrarse un ejemplo particular de su verdad.

En virtud de "$\vdash : (x) . \phi x . \supset . \phi y$" y de "$\vdash : \phi y . \supset . (\exists x) . \phi x$", tenemos "$\vdash : (x) . \phi x . \supset . (\exists x) . \phi x$", es decir, "lo que es siempre verdadero es alguna vez verdadero". Este no sería el caso si nada existiese; así, pues, nuestras suposiciones contienen el supuesto de que hay algo. Ello está implícito en el principio de que lo que es válido para todos es válido para alguno; pero esto no sería verdadero si no hubiese "alguno".

4) "Si ϕx es siempre verdadero, y ψx es siempre verdadero, entonces '$\phi x . \psi x$' es siempre verdadero"; es decir,

$$\vdash :. (x) . \phi x : (x) . \psi x : \supset . (x) . \phi x . \psi x.$$

(Esto exige que tanto ϕ como ψ deban ser funciones que tengan argumentos del mismo *tipo*. Explicaremos esta exigencia en una etapa posterior). La conversa también es verdadera; es decir, tenemos

$$\vdash :. (x) . \phi x . \psi x . \supset : (x) . \phi x : (x) . \psi x.$$

Hasta cierto punto es opcional considerar como proposiciones primitivas lo que, en las proposiciones, conecta las variables reales y las aparentes. Las proposiciones primitivas que, en relación con este tema, se asumen en el *9 de este trabajo, son las siguientes:

1) $$\vdash : \phi x . \supset . (\exists z) . \phi z.$$

2) $$\vdash : \phi x \vee \phi y . \supset . (\exists z) . \phi z,$$

esto es, si ϕx es verdadera o ϕy es verdadera, entonces $(\exists z) . \phi z$ es verdadera. (Acerca de la necesidad de esta proposición primitiva, véanse las observaciones que figuran en el *9·11).

3) Si podemos aseverar ϕy, en donde y es una variable real, entonces podemos aseverar $(x) \cdot \phi x$; es decir, que lo que es válido para alguno, cualquiera que sea, es válido para todos.

Implicación formal y equivalencia formal. Cuando de una implicación, pongamos por caso $\phi x . \supset . \psi x$, se dice que siempre es verdadera, o sea, cuando $(x) : \supset \mathbf{x} . \supset . \psi x$, diremos que "$\phi x$ *implica formalmente* ψx. Las proposiciones de la forma "$(x) : \phi x . \supset . \psi x$" se dice que expresan *implicaciones formales.* En los ejemplos típicos de implicación, tal como " 'Sócrates es un hombre' implica 'Sócrates es mortal' ", tenemos una proposición de la forma "$\phi x . \supset . \psi x$" en un caso en el que "$(x) : \phi x . \supset . \psi x$" es verdadero. En tal caso, reconocemos la implicación como un caso particular de una implicación formal. De este modo ha sucedido que las implicaciones que no son casos particulares de implicaciones formales, de ningún modo han sido consideradas como implicaciones. También hay una razón práctica para no tomar en cuenta tales implicaciones, y es que, hablando con generalidad, ellas sólo pueden *conocerse* cuando ya se sabe que su hipótesis es falsa o que su conclusión es verdadera; en ninguno de estos casos sirven para hacernos conocer la conclusión, ya que en el primer caso la conclusión no necesita ser verdadera, y en el segundo ya es conocida. Así, pues, tales implicaciones no sirven para el objetivo que hace que las implicaciones sean de gran utilidad, a saber, que nos permitan obtener, por deducción, conclusiones que con anterioridad ignorábamos. Las implicaciones *formales,* por el contrario, sirven para este propósito, debido al hecho psicológico de que con frecuencia conocemos "$(x) : \phi x . \supset . \psi x$" en los casos en donde ϕy (que se sigue de estas premisas) no pueda ser fácilmente conocida de un modo directo.

Estas razones, aunque no garantizan el abandono completo de las implicaciones que no sean casos de implicaciones formales, son razones que conceden gran importancia a la implicación formal. Una implicación formal manifiesta que, para todos los posibles valores de x, si la hipótesis ϕx es verdadera, la conclusión ψx es verdadera. Dado que "$\phi x . \supset . \psi x$" siempre será verdadera cuando ϕx sea falso, son sólo los valores de x que hacen a ϕx verdadero los que son *importantes* en una implicación formal; lo que efectivamente se manifiesta es que, para todos estos valores, ψx es verdadero. Así, pues, las proposiciones de la forma "todo α es β", "no α es β" expresan implicaciones formales, puesto que la primera (según parece por lo que se acaba de decir) manifiesta

$$(x) : x \text{ es un } \alpha . \supset . x \text{ es un } \beta,$$

en tanto la segunda manifiesta

$$(x) : x \text{ es un } \alpha . \supset . x \text{ no es un } \beta.$$

Cualquier implicación formal "$(x) : \phi x . \supset . \psi x$" puede interpretarse así: "Todos los valores de x que satisfacen (17) a ϕx satisfacen a ψx", mientras que la

(17) Se dice que un valor de x *satisface a* ϕx, *o a* $\phi \hat{x}$, cuando ϕx es verdadero para dicho valor de x.

implicación formal "$(x) : \phi x \,.\, \supset \,.\, \sim \psi x$" puede interpretarse como: "Ningún valor de x que satisfaga a ϕx satisface a ψx".

Similarmente, para "algún α es β" tenemos la fórmula

$$(\exists x) \,.\, x \text{ es un } \alpha \,.\, x \text{ es un } \beta,$$

y para "algún α no es β" tenemos la fórmula

$$(\exists x) \,.\, x \text{ es un } \alpha \,.\, x \text{ no es un } \beta.$$

Dos funciones, ϕx y ψx, se dice que son *formalmente equivalentes* cuando cada una de ellas implica siempre a la otra, es decir, cuando

$$(x) : \phi x \,.\equiv.\, \psi x,$$

y una proposición de esta forma se llama *equivalencia formal.* En virtud de lo que se dijo acerca de los valores de verdad, si ϕx y ψx son formalmente equivalentes, una puede sustituir a la otra en cualquier función de verdad. De este modo, por lo que respecta a los objetivos de las matemáticas o de esta obra, $\phi \hat{z}$ puede sustituirse por $\psi \hat{z}$, y viceversa, en cualquier proposición por la que estemos interesados. Decir ahora que ϕx o ψx son formalmente equivalentes es lo mismo que decir que $\phi \hat{z}$ y $\psi \hat{z}$ tienen la misma *extensión,* es decir, que cualquier valor de x que satisface a una satisface a la otra. Así, pues, en cualquier lugar de esta obra en donde se presente una función constante, el valor de verdad de la proposición en la que intervenga depende sólo de la extensión de la función. Una proposición que contenga una función $\phi \hat{z}$ y que goce de esa propiedad (es decir, que su valor de verdad dependa sólo de la extensión de $\phi \hat{z}$) se llamará función *extensional* de $\phi \hat{z}$. Por tanto, las funciones de funciones, por las que nos interesaremos de una manera especial, serán todas funciones de funciones extensionales.

Lo que acaba de decirse explica la conexión (como se dijo antes) entre el hecho de que las funciones de proposiciones de las que se ocupa especialmente las matemáticas son todas funciones de verdad, así como el hecho de que las matemáticas se interesen más por las extensiones que por las intensiones.

Abreviaciones convenientes. Las siguientes definiciones ofrecen unas notaciones alternativas que, con frecuencia, resultan más cómodas:

$$\phi x \,.\, \supset_x \,.\, \psi x \,.=:\, (x) : \phi x \,.\, \supset \,.\, \psi x \quad \text{Df},$$
$$\phi x \,.\, \equiv_x \,.\, \psi x \,.=:\, (x) : \phi x \,.\equiv.\, \psi x \quad \text{Df}.$$

La notación "$\phi x \,.\, \supset_x \,.\, \psi x$" se debe a Peano, quien, sin embargo, carecía de notación para la idea general "$(x) \,.\, \phi x$". Esto puede ser considerado como un ejercicio en cuanto al empleo de puntos en lugar de los paréntesis que pudimos haber escrito

$$\phi x \supset_x \psi x \,.=.\, (x) \,.\, \phi x \supset \psi x \quad \text{Df},$$
$$\phi x \equiv_x \psi x \,.=.\, (x) \,.\, \phi x \equiv \psi x \quad \text{Df}.$$

Sin embargo, en la práctica, cuando $\phi \hat{x}$ y $\psi \hat{x}$ son funciones especiales, no es posible

emplear un número de puntos menor que en la primera forma; a veces, se necesitan más.

Las siguientes definiciones dan las notaciones abreviadas para funciones de dos o más variables:

$$(x, y) . \phi (x, y) . = : (x) : (y) . \phi (x, y) \quad \text{Df,}$$

y, del mismo modo, para cualquier número de variables;

$$\phi (x, y) . \supset_{x,y} . \psi (x, y) : = : (x, y) : \phi (x, y) . \supset . \psi (x, y) \quad \text{Df,}$$

y así sucesivamente para cualquier número de variables.

Identidad. La función proposicional "x es idéntico a y" se expresa así:

$$x = y$$

Esta se definirá más adelante (cf. *13·01); pero, debido a ciertos puntos difíciles que entraña tal definición, la omitiremos aquí (cf. cap. II) Naturalmente, tenemos:

$$\vdash . x = x \quad \text{(la ley de identidad)}$$
$$\vdash : x = y . \equiv . y = x,$$
$$\vdash : x = y . y = z . \supset . x = z.$$

La primera de éstas expresa la propiedad *reflexiva* de la identidad: una relación se llama *reflexiva* cuando se da entre un término y él mismo, bien universalmente, o siempre que tenga validez entre ese y algún otro término. La segunda de las proposiciones de arriba expresa que la identidad es una relación *simétrica:* una relación se llama *simétrica* si, siempre que sea válida entre x e y también lo es entre y y x. La tercera proposición expresa que la identidad es una relación *transitiva:* una relación se llama *transitiva* si, siempre que tenga validez entre x e y, y entre y y z, también la tiene entre x y z.

Ya veremos que no es necesario dar una nueva definición para el signo de igualdad que se emplea en matemáticas. Todas las ecuaciones matemáticas en las que comúnmente se usa el signo de igualdad expresan alguna identidad y, por lo tanto, utilizan el signo de igualdad en el sentido antes indicado.

Si x e y son idénticos, uno puede sustituir al otro en cualquier proposición sin que se altere el valor de verdad de esa proposición; así, pues, tenemos

$$\vdash : x = y . \supset . \phi x \equiv \phi y.$$

Esta es una propiedad fundamental de la identidad, de la que proviene la mayor parte de las propiedades que quedan por exponer.

Podría pensarse que la identidad no tiene mucha importancia, ya que sólo puede presentarse entre x e y, si x e y son símbolos diferentes de un mismo objeto. Sin embargo, este punto de vista no es aplicable a las que denominamos "frases descriptivas", o sea, las del tipo "tal y tal cosa". Precisamente, en relación con tales frases es cuando la identidad adquiere importancia, como explicaremos a continuación. Una proposición tal como "Scott fue el autor de Waverley" expresa una

identidad en la que hay una frase descriptiva (a saber, "el autor de Waverley"); esto manifiesta como, en casos así, la aserción de la identidad puede ser importante. Esencialmente es el mismo caso que cuando los periódicos dicen "no se ha descubierto la identidad del criminal". En este caso, el criminal se conoce por una frase descriptiva, a saber, "el hombre que produjo la muerte", y nosotros deseamos encontrar una x de la cual sea verdad que "x = el hombre que produjo la muerte". Cuando tal x haya sido encontrada ya se conoce la identidad del criminal.

Clases y relaciones. Una clase (o lo que es lo mismo, un *agregado* o *conjunto*) lo constituye la totalidad de los objetos que satisfacen alguna función proposicional. Si α es la clase compuesta por los objetos que satisfacen a $\phi\hat{x}$, diremos que α es la clase *determinada* por $\phi\hat{x}$. Por tanto, cada función proposicional determina una clase, aunque si la función proposicional es tal que siempre es falsa, la clase será *nula*, es decir, carecerá de miembros. La clase determinada por la función $\phi\hat{x}$ se representará por $\hat{z}(\phi z)$ (18). Así, por ejemplo, si ϕx es una ecuación, $\hat{z}(\phi z)$ será la clase de sus raíces; si ϕx es "x tiene dos piernas y no tiene plumas", $\hat{z}(\phi z)$ será la clase de los hombres; si ϕx es "$0 < x < 1$", $\hat{z}(\phi z)$ será la clase de las fracciones propias; y así sucesivamente.

Es obvio que la misma clase de objetos tendrán muchas funciones determinantes. Cuando no sea necesario especificar una función determinante de una clase, la clase puede representarse convenientemente por una letra griega. Por tanto, las letras griegas, salvo aquellas a las que se le asignaron un significado como constante, se usarán exclusivamente para clases.

Dos tipos de dificultades se presentan en la Lógica formal; uno de ellos surge en relación con las clases y relaciones, y el otro con respecto a las funciones descriptivas. El quid de la dificultad para las clases y relaciones (en la medida en que éstas incumben a las clases) estriba en que una clase no puede ser un objeto idóneo como argumento para cualquiera de sus funciones determinantes. Si α representa una clase y $\phi\hat{x}$ una de sus funciones determinantes [de suerte que $\alpha = \hat{z}(\phi z)$] no es suficiente que $\phi\alpha$ sea una proposición falsa, sino más bien un sinsentido. Así, pues, parece que se hace necesario una cierta clasificación de lo que parecen ser objetos entre cosas de tipos esencialmente diferentes. Toda esta cuestión se discute en el capítulo II, en la teoría de tipos, y el tratamiento formal en la exposición sistemática, que es lo que constituye el principal contenido de este trabajo, está orientado por esta discusión. La parte de la exposición sistemática que concierne especialmente a la teoría de clases es la *20, así como también se discute en el capítulo III de esta Introducción. Es suficiente observar aquí que, a lo largo de toda la exposición de la parte *20, hemos eludido la decisión acerca de si una clase de cosas tiene, en algún sentido, existencia como objeto. Por otra parte, es indiferente a nuestra lógica tomar una decisión respecto de esta cuestión; aunque, tal vez, si hubiésemos optado por alguna solución que, en un cierto sentido real, considerase a las clases y relaciones como reales e idóneas para ser aceptadas universalmente, podíamos haber

(18) Puede usarse cualquier otra letra en vez de z.

simplificado una o dos definiciones y unas cuantas proposiciones preliminares. Nuestros símbolos, tales como "$\hat{x}\,(\phi x)$", α, y otros, que representan clases y relaciones, tan sólo se definen en su uso, del mismo modo como ∇^2, o sea, la forma

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

no tiene significación fuera de una adecuada función de x, y, z sobre la que operar. El resultado de nuestras definiciones es que la manera en la cual usamos las clases corresponde, en general, a su empleo en el pensar y hablar ordinario; y todo lo que pueda ser interpretación esencial de una lo es también de la otra. Así, pues, de hecho, nuestra clasificación de tipos que figura en el capítulo II realmente realiza el único, aunque esencial, servicio de justificarnos en cuanto a prescindir de entrar en cadenas de razonamientos que llevan a conclusiones contradictorias. La justificación está en que lo que parecen ser proposiciones, realmente son sinsentidos.

Las definiciones que se presentan en la teoría de clases, por las que la idea de una clase (al menos en uso) se basa en otras ideas que se suponen primitivas, no puede comprenderse sin una discusión completa que puede darse ahora (cf. Cap. II de esta Introducción, y también el *20). Consiguientemente, en esta inspección preliminar, procedemos a exponer las más importantes proposiciones simples que resultan de esas definiciones, dejando al lector emplear en su mente la idea, ordinariamente no analizada, de una clase de cosas. El uso que se da a nuestros símbolos concuerda con el empleo ordinario de esta idea en el lenguaje común. Debe tenerse en cuenta que en la exposición sistemática nuestro tratamiento de clases y de relaciones no se requieren nuevas ideas primitivas, sino sólo dos nuevas proposiciones primitivas, a saber, las dos formas del "Axioma de la Reducibilidad" (cf. el capítulo siguiente) para una o dos variables, respectivamente.

La función proposicional "x es un miembro de la clase α" se expresará, siguiendo a Peano, por la notación

$$x \in \alpha$$

Aquí, ϵ está elegida como la inicial de la palabra $\grave{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}$. "$x \in \alpha$" puede leerse "$x$ es una α". Así, pues, "$x \in$ hombre" significa "x es un hombre". Por conveniencia tipográfica escribiremos

$$x \sim\epsilon\, \alpha\,.=.\sim(x \in \alpha) \quad \text{Df},$$

$$x, y \in \alpha\,.=.\,x \in \alpha\,.\,y \in \alpha \quad \text{Df}.$$

En lugar de "clase" escribiremos "Cls"; así, "$\alpha \in$ Cls" significa "α es una clase".

Tenemos

$$\vdash : x \in \hat{z}\,(\phi z)\,.\equiv .\,\phi x,$$

es decir, "'x es un miembro de la clase determinada por $\phi\hat{z}$' es equivalente a 'x satisface a $\phi\hat{z}$', o a 'ϕx es verdadero' ".

Una clase está completamente determinada cuando sus miembros son conocidos;

es decir, no puede haber dos clases diferentes teniendo los mismos miembros. De este modo, si ϕx y ψx son funciones formalmente equivalentes, determinan la misma clase; así que, en ese caso, si x es un miembro de la clase determinada por $\phi\hat{x}$ y, por tanto, satisface a ϕx, también satisface a ψx, y es, por ende, un miembro de la clase determinada por $\psi\hat{x}$.

Así, pues, tenemos

$$\vdash :. \hat{z}(\phi z) = \hat{z}(\psi z) . \equiv : \phi x . \equiv_x . \psi x.$$

Las siguientes proposiciones son obvias e importantes:

$$\vdash :. \alpha = \hat{z}(\phi z) . \equiv : x \in \alpha . \equiv_x . \phi x,$$

esto es, α es idéntica a la clase determinada por $\phi\hat{z}$ cuando, y sólo cuando, "x es una α" sea formalmente equivalente a ϕx;

$$\vdash :. \alpha = \beta . \equiv : x \in \alpha . \equiv_x . x \in \beta,$$

esto es, dos clases, α y β, son idénticas cuando, y sólo cuando, tengan los mismos miembros;

$$\vdash . \hat{x}(x \in \alpha) = \alpha,$$

esto es, la clase cuya función determinante es "x es una α" es α; en otras palabras, α es la clase de los objetos que son miembros de α;

$$\vdash . \hat{z}(\phi z) \in \mathrm{Cls},$$

esto es, la clase determinada por la función $\phi\hat{z}$ es una clase.

Se verá que, de acuerdo con lo expuesto anteriormente, cualquier función de una variable puede sustituirse por una función equivalente de la forma "$x \in \alpha$". Por tanto, cualquier función extensional de funciones que son válidas cuando su argumento es una función de la forma "$\hat{z} \in \alpha$", para cualquier valor posible de α, también será válida cuando su argumento sea una función $\phi\hat{z}$. Así, pues, la variación de las clases puede sustituir a la variación de las funciones de una variable en todas las proposiciones del tipo del que nos hemos ocupado.

De una manera semejante introducimos las relaciones duales o diádicas, o sea, las relaciones entre dos términos. Tales relaciones se llamarán simplemente "relaciones"; las relaciones entre más de dos términos se conocerán como relaciones *múltiples,* o (cuando el número de sus términos esté especificado) como relaciones triples, cuádruples, ..., o como relaciones triádicas, tetrádicas, ... Tales relaciones no nos interesarán hasta que nos ocupemos de la Geometría. Por el momento, las únicas relaciones que nos interesan son las *duales.*

Las relaciones, al igual que las clases, deben tomarse en *extensión:* esto es, si R y S son relaciones que tienen validez entre los mismos pares de términos, R y S son idénticos. Podemos considerar una relación teniendo en cuenta lo que se necesita para nuestro objetivo, como una clase de pares; es decir, el par (x, y) debe ser uno

de la clase de pares que constituya la relación R si x tiene la relación R con y (19). Esta consideración de las relaciones como clases de pares no se introducirá, sin embargo, en nuestro tratamiento simbólico; sólo se menciona a fin de mostrar que también es posible comprender el significado de la palabra *relación:* que una relación debe determinarse por su extensión.

Cualquier función $\phi(x, y)$ determina una relación R entre x e y. Si consideramos una relación como una clase de pares, la relación determinada por $\phi(x, y)$ es la clase de los pares (x,y) para los que $\phi(x, y)$ es verdadera. La relación determinada por la función $\phi(x, y)$ se representa por

$$\hat{x}\hat{y}\phi(x, y).$$

Emplearemos una letra mayúscula para una relación cuando no sea necesario especificar la función determinante. Así, dondequiera que se presente una letra mayúscula debe entenderse que representa una relación.

La función proposicional "x tiene la relación R con y" se expresará por la notación:

$$xRy$$

Se adopta esta notación para acomodarla lo más posible al lenguaje común, el cual, cuando tiene que expresar una relación, generalmente la menciona entre sus términos, como en "x ama a y", "x es igual a y", "x es mayor que y", etc. Para simbolizar "relación" escribiremos "Rel"; así, "$R \in \text{Rel}$" significa "R es una relación".

Debido a que tomamos las relaciones en extensión, tenemos

$$\vdash :. \hat{x}\hat{y}\phi(x, y) = \hat{x}\hat{y}\psi(x, y) . \equiv : \phi(x, y) . \equiv_{x,y} . \psi(x, y),$$

esto es, dos funciones de dos variables determinan la misma relación cuando, y sólo cuando, las dos funciones son formalmente equivalentes.

Tenemos $$\vdash . z\{\hat{x}\hat{y}\phi(x, y)\} w . \equiv . \phi(z, w),$$

esto es, "z tiene con w la relación determinada por la función $\phi(x, y)$" es equivalente a $\phi(z, w)$;

$$\vdash :. R = \hat{x}\hat{y}\phi(x, y) . \equiv : xRy . \equiv_{x,y} . \phi(x, y),$$
$$\vdash :. R = S . \equiv : xRy . \equiv_{x,y} . xSy,$$
$$\vdash . \hat{x}\hat{y}(xRy) = R,$$
$$\vdash . \{\hat{x}\hat{y}\phi(x, y)\} \in \text{Rel}.$$

Estas proposiciones son análogas a las que previamente se dieron para clases. Esto es así porque cualquier función de dos variables es formalmente equivalente a una función de la forma xRy; por tanto, en funciones extensionales de dos

(19) Un par de este tipo tiene un *sentido,* esto es, el par (x, y) es diferente del par (y, x), salvo que $x = y$. Le llamaremos un "par con sentido", para distinguirlo de las clases que consten de x e y. También puede denominarse un par *ordenado.*

variables, la variación de relaciones puede sustituir a la variación de funciones de dos variables.

Las clases y las relaciones tienen propiedades análogas a las de la mayor parte de las proposiciones que resultan de la negación y de la suma lógica. El *producto lógico* de dos clases, α y β, es su parte común, es decir, la clase de los términos que son miembros de ambas. Esto se representa por $\alpha \cap \beta$. Así, pues,

$$\alpha \cap \beta = \hat{x}(x \in \alpha \,.\, x \in \beta) \quad \text{Df.}$$

Esto nos da

$$\vdash : x \in \alpha \cap \beta \,.\equiv.\, x \in \alpha \,.\, x \in \beta,$$

es decir, "x es un miembro del producto lógico de α y β" es equivalente al producto lógico de "x es un miembro de α" y "x es un miembro de β".

Similarmente, la *suma lógica* de dos clases, α y β, es la clase de los términos que son miembros de ellas; la designamos por $\alpha \cup \beta$. La definición es

$$\alpha \cup \beta = \hat{x}(x \in \alpha \,.\, \vee \,.\, x \in \beta) \quad \text{Df,}$$

y la conexión con la suma lógica de proposiciones viene dada por

$$\vdash :. x \in \alpha \cup \beta \,.\equiv: x \in \alpha \,.\, \vee \,.\, x \in \beta.$$

La *negación* de una clase α consiste en aquellos términos x para los que "$x \in \alpha$" puede ser *significativa y verdaderamente* negado. Encontraremos que hay otros tipos de términos para los cuales "$x \in \alpha$" no es verdadera ni falsa, sino un sinsentido. Estos términos no son miembros de la negación de α.

Por tanto, la *negación* de una clase α es la clase de los términos de tipo adecuado que no son miembros de ella, esto es, la clase $\hat{x}\,(x \sim \epsilon\, \alpha)$. A esta clase la llamamos "$-\alpha$" (léase "no α"); su definición es

$$-\alpha = \hat{x}\,(x \sim \epsilon\, \alpha) \quad \text{Df,}$$

y la conexión con la negación de proposiciones se da por

$$\vdash : x \in -\alpha \,.\equiv.\, x \sim \epsilon\, \alpha.$$

En lugar de la implicación tenemos la relación de *inclusión*. Una clase α se dice que está incluida o contenida en una clase β si todos los miembros de α son miembros de β, es decir, si $x \in \alpha \,.\, \supset_x \,.\, \epsilon\, \beta$. Escribimos "$\alpha \subset \beta$" para expresar "$\alpha$ está contenida en β". Por tanto, ponemos:

$$\alpha \subset \beta \,.=: x \in \alpha \,.\, \supset_x \,.\, x \in \beta \quad \text{Df.}$$

La mayor parte de las fórmulas en las que intervienen $p \,.\, q$, $p \vee q$, $\sim p$, $p \supset q$ permanecen verdaderas si sustituimos, respectivamente, esas expresiones por $\alpha \cap \beta$, $\alpha \cup \beta$, $-\alpha$, $\alpha \subset \beta$. En lugar de la equivalencia hacemos su sustitución por la identidad; $p \equiv q$ se definió como "$p \supset q \,.\, q \supset p$", pero "$\alpha \subset \beta \,.\, \beta \subset \alpha$" da "$x \in \alpha \,.\equiv_x \,.\, x \in \beta$", por lo cual $\alpha = \beta$.

A continuación ofrecemos algunas proposiciones relativas a clases que son análogas a proposiciones dadas anteriormente en relación con las proposiciones:

$$\vdash . \alpha \cap \beta = -(-\alpha \cup -\beta),$$

esto es, la parte común entre α y β es la negación de "no-α o no-β".

$$\vdash . x \in (\alpha \cup -\alpha),$$

es decir, "x es un miembro de α o no-α".

$$\vdash . x \sim\in (\alpha \cap -\alpha),$$

esto es, "x no es un miembro de α y no-α".

$$\vdash . \alpha = -(-\alpha),$$
$$\vdash : \alpha \subset \beta . \equiv . -\beta \subset -\alpha,$$
$$\vdash : \alpha = \beta . \equiv . -\alpha = -\beta,$$
$$\vdash : \alpha = \alpha \cap \alpha,$$
$$\vdash : \alpha = \alpha \cup \alpha.$$

Las dos últimas son las dos formas de la ley de tautología.

La ley de absorción toma la forma

$$\vdash : \alpha \subset \beta . \equiv . \alpha = \alpha \cap \beta.$$

Así, por ejemplo, "todos los cretenses son mentirosos" es equivalente a "los cretenses son idénticos a los cretenses mentirosos".

Lo mismo que tenemos $\vdash : p \supset q . q \supset r . \supset . p \supset r,$

también tenemos $\vdash : \alpha \subset \beta . \beta \subset \gamma . \supset . \alpha \subset \gamma.$

Esto expresa el clásico silogismo en Bárbara (con las premisas intercambiadas); por medio de "$\alpha \subset \beta$" significamos lo mismo que "todas las α's son β's", de forma que las proposiciones anteriores manifiestan: "Si todas las α's son β's y todas las β's son γ's, entonces todas las α's son γ's". (Debe observarse que tradicionalmente los silogismos se expresan con un "por lo tanto", como si aseverasen ambas premisas y la conclusión. Por supuesto, esto sólo es una forma vaga de hablar, ya que lo que realmente se afirma es sólo la conexión entre las premisas y la conclusión).

El silogismo en Bárbara, cuando la premisa menor tiene un sujeto individual es

$$\vdash : x \in \beta . \beta \subset \gamma . \supset . x \in \gamma,$$

por ejemplo, "si Sócrates es un hombre y todos los hombres son mortales, entonces Sócrates es mortal". Esto, como ya fue indicado por Peano, no es un caso particular de "$\alpha \subset \beta . \beta \subset \gamma . \supset . \alpha \subset \gamma$", ya que "$x \in \beta$" no es un caso particular de "$\alpha \subset \beta$". Este punto es importante, puesto que aquí la lógica tradicional está equivocada. Más adelante se aclarará la naturaleza y magnitud de esta equivocación.

En cuanto a las relaciones contamos con análogas definiciones y proposiciones.

Proponemos

$$R \dot{\cap} S = \hat{x}\hat{y}\,(xRy . xSy) \quad \text{Df},$$

que nos lleva a $\vdash : x (R \dot{\cap} S) y . \equiv . xRy . xSy.$

De manera similar

$$R \cup S = \hat{x}\hat{y} (xRy . \vee . xSy) \quad \text{Df},$$

$$\dot{-} R = \hat{x}\hat{y} \{\sim (xRy)\} \quad \text{Df},$$

$$R \subseteq S . = : xRy . \supset_{x,y} . xSy \quad \text{Df}.$$

Generalmente, cuando requerimos símbolos análogos, aunque diferentes, para las relaciones y para las clases, elegiremos para las relaciones el símbolo que se obtiene añadiéndole un punto, en una posición adecuada, al símbolo correspondiente para las clases. (El punto no debe colocarse sobre la línea, ya que produciría una confusión con el empleo de los puntos con valor de paréntesis). Pero tales símbolos precisan y reciben una definición especial en cada caso.

Se dice que una clase *existe* cuando, por lo menos, tiene un miembro. "α existe" se representa por "$\exists ! \alpha$". Así, pues, ponemos

$$\exists ! \alpha . = . (\exists x) . x \in \alpha \quad \text{Df}.$$

La clase que no tiene miembros se llama "clase nula", y se simboliza por "Λ". Cualquier función proposicional que es falsa siempre determina la clase nula. Ya tenemos conocimiento de una función de este tipo, a saber, "x no es idéntico a x", que simbolizamos por "$x \neq x$". Por tanto, podemos usar esta función para definir Λ, y ponemos

$$\Lambda = \hat{x} (x \neq x) \quad \text{Df}.$$

La clase determinada por una función que es siempre verdadera se llama *clase universal,* y se representa por V; así pues

$$\mathrm{V} = \hat{x} (x = x) \quad \text{Df}.$$

De este modo, Λ es la negación de V. Tenemos

$$\vdash . (x) . x \in \mathrm{V},$$

es decir, " 'x es un miembro de V' es siempre verdadero"; y

$$\vdash . (x) . x \sim \in \Lambda,$$

es decir, " 'x es un miembro de Λ' es siempre falso". También

$$\vdash : \alpha = \Lambda . \equiv . \sim \exists ! \alpha,$$

es decir, "α es la clase nula" es equivalente a "no existe α".

Para las relaciones, usamos notaciones similares. Proponemos:

$$\dot{\exists} ! R . = . (\exists x, y) . xRy,$$

es decir, "$\dot{\exists} ! R$" significa que hay por lo menos un par $x, y,$ entre los cuales se da la relación R. La relación que nunca se da será $\dot{\Lambda}$; y $\dot{\mathrm{V}}$ la relación que se da siempre. Prácticamente nunca se requiere $\dot{\mathrm{V}}$; $\dot{\Lambda}$ será la relación $\hat{x}\hat{y} (x \neq x . y \neq y)$. Tenemos

$$\vdash . (x, y) . \sim (x \dot{\Lambda} y),$$

y $$\vdash : R = \dot{\Lambda} . \equiv . \sim \dot{\exists} ! R.$$

No hay clases que contengan objetos de más de un tipo. Consecuentemente, existe una clase universal y una clase nula apropiadas a cada tipo de objetos. Pero no es necesario diferenciar estos símbolos, puesto que, como se verá, no hay posibilidad de confusión. Observaciones similares se aplican a las relaciones.

Descripciones. Entendemos por "descripción" una frase del tipo "*el* tal y cual" o alguna otra de forma equivalente. De momento, fijamos nuestra atención en la palabra *el,* en singular. Esta palabra la utilizaremos estrictamente de tal forma que implique univocidad; por ejemplo, no debemos decir "*A* es *el* hijo de *B*" si es que *B* tiene otros hijos además de *A*. Así, pues, una descripción de la forma "el tal y cual" únicamente tendrá aplicación en el caso de que hay un solo "tal y cual", y no más. Por consiguiente, una descripción requiere una función proposicional $\phi\hat{x}$ que se satisfaga por un solo valor de x, y no por otros; por tanto, "la x que satisface a $\phi\hat{x}$" es una descripción que, de una manera definida, describe un determinado objeto, aunque no podamos conocer qué objeto es el que describe. Por ejemplo, si y es un hombre, "x es el padre de y" debe ser verdadero para un, y sólo un, valor de x. Por consiguiente, "el padre de y" es una descripción de una determinada persona, aunque no podamos saber a *qué* hombre describe. Una frase que contiene el artículo "el" siempre presupone alguna función proposicional inicial que no contenga "el"; así, en vez de "x es el padre de y" debemos tomar como función inicial "x engendró a y"; entonces, "el padre de y" significa el único valor de x que satisface a esta función proposicional.

Si $\phi\hat{x}$ es una función proposicional, el símbolo "$(\imath x)(\phi x)$" se usa en nuestro simbolismo en forma tal que siempre puede leerse como "la x que satisface a $\phi\hat{x}$". Pero no definimos "$(\imath x)(\phi x)$" con la significación "la x que satisface a $\phi\hat{x}$", tratando de este modo esta última frase como algo que incorpora una idea primitiva. Cada uso de "$(\imath x)(\phi x)$", donde se presente aparentemente como un constituyente de una proposición en el lugar de un objeto, se define en términos de las ideas primitivas que ya manejamos. Un ejemplo de esta definición en uso viene dado por la proposición "E ! $(\imath x)(\phi x)$" que se considerará inmediatamente. La totalidad de esta cuestión se tratará de modo más completo en el capítulo III.

El símbolo debe ser comparado y contrastado con "$\hat{x}\,(\phi x)$" que, en el uso, debe siempre leerse como "Las x's que satisfacen a $\phi\hat{x}$". Ambos símbolos son símbolos incompletos definidos sólo en uso, y, como tales, se discutirán en el capítulo III. El símbolo "$\hat{x}\,(\phi x)$" siempre tiene una aplicación, a saber, a la clase determinada por ϕx; pero "$(\imath x)(\phi x)$" sólo tiene aplicación cuando $\phi\hat{x}$ se satisface ni más ni menos que por un solo valor de x. Debe observarse también que el significado dado al símbolo por la definición (que se ofrece un poco más abajo) de E ! $(\imath x)(\phi x)$ no presupone que conozcamos el significado de "uno". Esto también es característico de la definición de cualquier otro uso de $(\imath x)(\phi x)$.

Ahora procedemos a definir "E ! $(\imath x)(\phi x)$" de forma que pueda leerse como "la

x que satisface a ϕx existe". (Se observará que éste es un significado de existencia diferente del que hemos expresado por "$\exists$"). Su definición es

$$\mathrm{E!}\,(\imath x)\,(\phi x)\,.=:(\exists c):\phi x\,.\equiv_x .\,x=c \quad \mathrm{Df},$$

es decir, "la x que satisface a $\phi\hat{x}$ existe" significa que "hay un objeto c tal que ϕx es verdadero cuando x es c, pero no en otro caso".

Las siguientes son formas equivalentes:

$$\vdash :.\,\mathrm{E!}\,(\imath x)\,(\phi x)\,.\equiv:(\exists c):\phi c:\phi x\,.\supset_x .\,x=c,$$
$$\vdash :.\,\mathrm{E!}\,(\imath x)\,(\phi x)\,.\equiv:(\exists c)\,.\,\phi c:\phi x\,.\,\phi y\,.\supset_{x,y} .\,x=y,$$
$$\vdash :.\,\mathrm{E!}\,(\imath x)\,(\phi x)\,.\equiv:(\exists c):\phi c:x\neq c\,.\supset_x .\sim\phi x.$$

La última de éstas manifiesta que "la x que satisface a $\phi\hat{x}$, existe", es equivalente a "hay un objeto c que satisface a $\phi\hat{x}$, y todo otro objeto distinto de c no satisface a $\phi\hat{x}$".

El tipo de existencia que se acaba de definir abarca muchísimos casos. Así, por ejemplo, "el Ser más perfecto existe" significará

$$(\exists c):x \text{ es el más perfecto}\,.\equiv_x .\,x=c,$$

lo cual, teniendo en cuenta la última de las equivalencias anteriores, es equivalente a

$$(\exists c):c \text{ es el más perfecto}:x\neq c\,.\supset_x .\,x \text{ no es el más perfecto.}$$

Una proposición tal como "Apolo existe", en realidad, es de la misma forma lógica, aunque no contenga explícitamente la palabra "el". Por "Apolo" entendemos realmente "el objeto que tiene tales y tales propiedades", digamos "el objeto que tiene las propiedades detalladas en el Diccionario Clásico (20)". Si estas propiedades componen la función proposicional ϕx, entonces "Apolo" significa "$(\imath x)(\phi x)$", y "Apolo existe" significa "E ! $(\imath x)(\phi x)$". Por tomar otro ejemplo, "el autor de Waverley" significa "el hombre que (o mejor, el objeto que) escribió Waverley". Así, "Scott es el autor de Waverley" es

$$\mathrm{Scott} = (\imath x)\,(x \text{ escribió Waverley})$$

Aquí (como observamos antes) se aprecia claramente la importancia que adquiere la *identidad* en relación con las descripciones.

La notación "$(\imath x)(\phi x)$", que resulta larga y poco conveniente, apenas se emplea, estando fuertemente inclinados a utilizar otra notación, a saber "R'y" cuyo significado es "el objeto que tiene la relación R con y". O sea, que proponemos

$$R\text{'}y = (\imath x)\,(xRy) \quad \mathrm{Df}.$$

La coma invertida puede leerse "de". Así pues, "R'y" se lee "la R de y". De este modo, si R es la relación de padre a hijo, "R'y" significa "el padre de y"; si R es la

(20) El mismo principio se aplica a muchos casos de los nombres propios de los objetos existentes; por ejemplo, a todos los usos de los nombres propios para objetos conocidos al hablante sólo por rumor y no por conocimiento personal.

relación de hijo a padre, "$R`y$" significa "el hijo de $y$", que sólo "existirá" si $y$ tiene un único hijo y no más. $R`y$ es una función de y, pero no una función proposicional; la llamaremos función *descriptiva*. Todas las funciones ordinarias de matemáticas son de esta clase, como se apreciará perfectamente en lo que sigue. Así, en nuestra notación, "sen" debe escribirse "sen`$y$", y "sen" debe significar la relación que sen`y tiene con y. En vez de una función descriptiva variable fy, ponemos $R`y$, en donde la relación variable R ocupa el lugar de la función variable f. En general, una función descriptiva existirá mientras y pertenezca a cierto dominio, pero no fuera de ese dominio; así, pues, si estamos versando sobre racionales positivos, $\sqrt{y}$ tendrá significación si y es un cuadrado perfecto, pero no en otro caso; si tratamos con números reales, y convenimos que "$\sqrt{y}$" signifique la raiz cuadrada *positiva* (o, que signifique la raiz cuadrada negativa), $\sqrt{y}$ será significante con tal que y sea positivo, pero no en otro caso; y así sucesivamente. De este modo, cada función descriptiva tiene lo que podemos llamar un "dominio de definición" o un "dominio de existencia", que puede definirse así: si la función en cuestión es $R`y$, su dominio de definición o de existencia será la clase de aquellos argumentos $y$ para los cuales tenemos E! $R`y$, es decir, para los que E! $(\imath x)(xRy)$; o, de otro modo, para los que hay una x, y sólo una, que tiene la relación R con y.

Si R es una relación cualquiera, designamos a $R`y$ como la "función descriptiva asociada". Gran parte de las relaciones constantes que tendremos ocasión de introducir son principalmente importantes debido sólo a sus funciones descriptivas asociadas. En tales casos, es más fácil (aunque menos correcto) comenzar por asignar el significado de la función descriptiva, y deducir el significado de la relación partiendo del significado de la función descriptiva. Esto se hará en las siguientes aclaraciones a la notación.

Tipos varios de funciones descriptivas de relaciones. Si R es una relación, la *conversa* de R es la relación que tiene lugar entre y y x siempre que R sea válida entre x e y. Así, *mayor* es la conversa de *menor*, *antes* de *después*, *causa* de *efecto*, *esposo* de *esposa*, etc. La conversa de R se escribe (21) Cnv`R o $\breve{R}$. La definición es

$$\breve{R} = \hat{x}\hat{y}\,(yRx) \quad \text{Df},$$

$$\text{Cnv`}R = \breve{R} \quad \text{Df}.$$

La segunda definición no es formalmente correcta, puesto que deberíamos definir "Cnv" y deducir el significado de Cnv`R. Pero no merece la pena adoptar este plan en esta referencia introductoria, con lo que se ayuda más a la simplicidad que a la corrección formal.

Una relación se llama *simétrica* si $R = \breve{R}$; es decir si es válida entre y y x, siempre que lo sea entre x e y (y, por tanto, viceversa). La identidad, la diversidad, la

(21) La segunda de estas notaciones se toma de la obra de Schröder "Algebra und Logik der Relative".

concordancia o discordancia son, en algún modo, relaciones simétricas. Una relación se llama *asimétrica* cuando es incompatible con su conversa, es decir, cuando $R \cap \breve{R} = \dot{\Lambda}$, o, lo que es equivalente

$$xRy \,.\, \supset_{x,y} .\sim (yRx).$$

Antes y después, mayor y menor, ascendiente y descendiente, son asimétricas como lo son todas aquellas relaciones que dan lugar a *series.* No obstante, existen muchas relaciones asimétricas que no originan series, como, por ejemplo, la de hermano de la esposa (22). Puede una relación no ser simétrica ni asimétrica; esto, por ejemplo, ocurre en la relación de inclusión entre clases: $\alpha \subset \beta$ y $\beta \subset \alpha$ son ambas verdaderas si $\alpha = \beta$; si no, a lo sumo, sólo una de ellas será verdadera. La relación *hermano* ni es simétrica ni asimétrica, ya que si x es el hermano de y, y puede ser hermano o hermana de x.

En la función proposicional xRy, llamaremos a x el *relacionante* y a y el *relacionado.* La clase $\hat{x}\,(xRy)$, consistente en todas las x que tengan la relación R con y, se llama la clase de los relacionantes de y con respecto a R; la clase $\hat{y}\,(xRy)$, consistente en todas las y con las cuales x tiene la relación R, se llama la clase de los relacionados de x con respecto a R. Estas dos clases se simbolizan respectivamente por $\vec{R}\text{`}y$ y $\overleftarrow{R}\text{`}x$. Así, pues:

$$\vec{R}\text{`}y = \hat{x}\,(xRy) \quad \text{Df},$$
$$\overleftarrow{R}\text{`}x = \hat{y}\,(xRy) \quad \text{Df}.$$

En el primer caso, la flecha se dirige hacia la y para mostrar que estamos interesados en las cosas que tienen la relación R *con* y. En el segundo caso, se aleja de x para indicar que la relación R va *de* x a los miembros de $\overleftarrow{R}\text{`}x$. De hecho, la flecha va *desde* un relacionante *hacia* un relacionado.

Las notaciones $\vec{R}\text{`}y$ y $\overleftarrow{R}\text{`}x$ son muy importantes y se usan constantemente. Si R es la relación de padre e hijo, entonces $\vec{R}\text{`}y$ = los padres de $y$, y $\vec{R}\text{`}x$ = los hijos de x. Tenemos

$$\vdash : x \in \vec{R}\text{`}y \,.\equiv.\, xRy$$

y

$$\vdash : y \in \overleftarrow{R}\text{`}x \,.\equiv.\, xRy.$$

Estas equivalencias con frecuencia se encuentran incorporadas en el lenguaje común. Por ejemplo, decimos indistintamente "x es un habitante de Londres" o "x habita en Londres". Si ponemos "R" por "habita en", "x habita en Londres" es "$x\ R$ Londres"; mientras que "x es un habitante de Londres" es "$x \in \vec{R}$`Londres".

En vez de $\vec{R}$ y $\overleftarrow{R}$ a veces usamos sg`$R$, gs`R, en donde "sg" significa "sagita" y "gs" es "sg" invertida. Así, pues, ponemos

(22) Esta relación no es estrictamente asimétrica, salvo en el supuesto de que el hermano de la esposa sea, a su vez, esposo de la hermana. En la iglesia griega, sin embargo, esta relación es estrictamente asimétrica.

$$\mathrm{sg}`R = \overrightarrow{R} \quad \mathrm{Df},$$
$$\mathrm{gs}`R = \overleftarrow{R} \quad \mathrm{Df}.$$

Algunas veces estas notaciones resultan más prácticas que el uso de la flecha cuando la relación en cuestión está representada por una combinación de letras en vez de una letra única tal como la R. Así, por ejemplo, debemos escribir $\mathrm{sg}`(R \mathbin{\dot{\cap}} S)$, mejor que poner una flecha sobre todo lo que abarca $(R \mathbin{\dot{\cap}} S)$.

La clase de todos los términos que tengan la relación R con respecto a alguna cosa se llama el *dominio* de R. Así pues, si R es la relación de padre a hijo, el dominio de R será la clase de los padres. Representamos el dominio de R por "$\mathrm{D}`R$". Así pues escribimos

$$\mathrm{D}`R = \hat{x}\,\{(\exists y) \cdot xRy\} \quad \mathrm{Df}.$$

Similarmente, la clase de todos los términos con respecto a los cuales algo tiene la relación R se llama *dominio converso* de R; coincide con el dominio de la conversa de R. El dominio converso de R se representa por "$\breve{\mathrm{C}}`R$"; así, pues,

$$\breve{\mathrm{C}}`R = \hat{y}\,\{(\exists x) \cdot xRy\} \quad \mathrm{Df}.$$

La unión del dominio y del dominio converso se llama *campo* y se representa por $C`R$; de este modo,

$$C`R = \mathrm{D}`R \cup \breve{\mathrm{C}}`R \quad \mathrm{Df}.$$

El *campo* tiene una gran importancia por lo que respecta a las series. Si R es la relación ordenada de una serie, $C`R$ es la clase de los términos de la serie, $D`R$ representa a todos los términos excepto el último (si existe), y $\breve{\mathrm{C}}`R$ a la totalidad de los términos excepto el primero (si existe). El primer término, si existe, es el único miembro de $\mathrm{D}`R \cap -\breve{\mathrm{C}}`R$, ya que es el único término que es predecesor pero no seguidor. De manera semejante, el último término (si lo hay) es el único miembro de $\breve{\mathrm{C}}`R \cap -\mathrm{D}`R$. La condición para que una serie carezca del final es $\breve{\mathrm{C}}`R \subset \mathrm{D}`R$, es decir, "cada seguidor es un predecesor"; la condición para que no tenga principio es $\mathrm{D}`R \subset \breve{\mathrm{C}}`R$. Estas condiciones son respectivamente equivalentes a $\mathrm{D}`R = C`R$ y $\breve{\mathrm{C}}`R = C`R$.

El *producto relativo* de dos relaciones, R y S, es la relación que tiene lugar entre x y z cuando hay un término intermedio y tal que x tiene la relación R con y e y tiene la relación S con z. El producto relativo de R y S se representa por $R \mid S$; así; pues, tenemos

$$R \mid S = \hat{x}\hat{z}\,\{(\exists y) \cdot xRy \cdot ySz\} \quad \mathrm{Df},$$
y, por consiguiente $$\vdash : x(R \mid S)z \cdot \equiv \cdot (\exists y) \cdot xRy \cdot ySz.$$

De este modo, "tía paterna" es el producto relativo de *hermana* y *padre*; "abuela paterna" es el producto relativo de *madre* y *padre*; "abuelo materno" es el producto relativo de *padre* y *madre*. El producto relativo no es conmutativo, pero goza de la ley asociativa, es decir

$$\vdash . (P \mid Q) \mid R = P \mid (Q \mid R).$$

También goza de la ley distributiva respecto de la suma lógica de relaciones; esto es, tenemos

$$\vdash . P \mid (Q \cup R) = (P \mid Q) \cup (P \mid R),$$
$$\vdash . (Q \cup R) \mid P = (Q \mid P) \cup (R \mid P).$$

Pero con respecto al producto lógico solamente tenemos

$$\vdash . P \mid (Q \cap R) \subseteq (P \mid Q) \cap (P \mid R),$$
$$\vdash . (Q \cap R) \mid P \subseteq (Q \mid P) \cap (Q \mid R).$$

El producto relativo no goza de la ley de tautología; es decir, que en general no se tiene $R\,R = R$. Proponemos

$$R^2 = R \mid R \quad \text{Df.}$$

Así pues, abuelo paterno = (padre)^2

abuela materna = (madre)^2

Una relación se llama *transitiva* cuando $R^2 \subseteq R$, es decir, cuando, dados xRy e yRz, tenemos xRz; o sea, cuando

$$xRy \,.\, yRz \,.\supset_{x,y,z}. xRz.$$

Las relaciones que generan series son siempre transitivas; así, p. ej.

$$x > y \,.\, y > z \,.\supset_{x,y,z}. x > z$$

Si P es una relación que genera una serie, P puede convenientemente leerse como "precede"; de este modo "$xPy \,.\, yPz \,.\supset_{x,y,z}. xPz$" viene a ser "si x precede a y, e y precede a z, entonces siempre x precede a z". La clase de relaciones que generan series se caracterizan parcialmente por el hecho de que son transitivas, asimétricas, y nunca relaciona un término consigo mismo.

Si P es una relación que genera una serie, y si no tenemos meramente $P^2 \subseteq P$, sino $P^2 = P$, entonces P genera una serie que es *compacta (überall dicht)*, es decir, es tal que tiene términos entre dos términos cualesquiera. Así que, en este caso tenemos

$$xPz \,.\supset.\, (\exists y) \,.\, xPy \,.\, yPz,$$

esto es, si x precede a z, hay un término y tal que x precede a y, e y precede a z; es decir, hay un término entre x y z. Así, pues, entre las relaciones que generan serie, las que generan una serie compacta son aquellas para las que $P^2 = P$.

Muchas relaciones que no generan serie son transitivas; por ejemplo, la identidad o la relación de inclusión entre clases. Tales casos surgen cuando las relaciones no son asimétricas. Las relaciones que son transitivas y simétricas constituyen una clase importante: pueden considerarse como consistentes en la posesión de alguna propiedad común.

Funciones descriptivas plurales. La clase de los términos x que tienen la relación R con algún miembro de una clase α se representa por $R``\alpha$ o por $R`_{\epsilon}\alpha$. La definición es

$$R``\alpha = \hat{x}\{(\exists y) . y \in \alpha . xRy\} \quad \text{Df.}$$

Así por ejemplo, sea R la relación *habitar en,* y α la clase de las ciudades; entonces $R``\alpha$ = habitantes de las ciudades. Sea $R$ la relación "menor que" entre los números racionales, y $\alpha$ la clase de los racionales que son de la forma $1-2^{-n}$, para valores enteros de $n$; entonces $R``\alpha$ representará la totalidad de los números racionales menores que algún miembro de α; es decir, todos los números racionales menores de 1. Si P es la relación generadora de una serie, y α es una clase cualquiera de miembros de la serie, $P``\alpha$ será predecesora de las $\alpha$'s; esto es, del segmento definido por $\alpha$. Si $P$ es una relación tal que $P`y$ siempre existe cuando $y \in \alpha$, $P``\alpha$ será la clase de todos los términos de la forma $P`y$ para valores de y que sean miembros de α; esto es

$$P``\alpha = \hat{x}\{(\exists y) . y \in \alpha . x = P`y\}.$$

Así, un miembro de la clase "padres de grandes hombres" será el padre de y, cuando y sea un gran hombre. En otros casos, esto no tendrá validez; por ejemplo, sea P la relación que existe entre un número y cualquier número de los cuales aquel es un factor; entonces $P``$ (números pares) = factores de números pares; pero esta clase no está compuesta de términos de la forma "*el* factor de x", en donde x sea un número par, porque los números no tienen un solo factor cada uno.

Clase unitaria. La clase que sólo consta de un miembro x, podría pensarse que es idéntica a x, pero Peano y Frege han mostrado que no es así. (Las razones por las que no es así se explicarán, en una vía preliminar, en el Capítulo II de la Introducción). Representemos por "$\iota`x$" la clase cuyo único miembro es x; así, pues,

$$\iota`x = \hat{y}(y = x) \quad \text{Df,}$$

o sea, "$\iota`x$" significa "la clase de objetos que son idénticos a x".

La clase constituida por x e y será $\iota`x \cup \iota`y$; la clase obtenida al añadirle x a la clase α será $\alpha \cup \iota`x$; la clase obtenida al quitar $x$ de la clase $\alpha$ será $\alpha - \iota`x$ (escribimos $\alpha - \beta$ como una forma abreviada de $\alpha \cap - \beta$).

Se observará que la clase unitaria se ha definido sin hacer referencia al número 1; de hecho, usamos las clases unitarias para definir el número 1. Este número se define como la clase de las clases unitarias; es decir,

$$1 = \hat{\alpha}\{(\exists x) . \alpha = \iota`x\} \quad \text{Df.}$$

Esta conduce a

$$\vdash :. \alpha \in 1 . \equiv : (\exists x) : y \in \alpha . \equiv_y . y = x.$$

y ésta nos lleva a

$$\vdash : \alpha \in 1 . \equiv . \mathrm{E}!(\imath x)(x \in \alpha),$$

de donde

$$\vdash : \hat{z}(\phi z) \in 1 . \equiv . \mathrm{E}!(\imath x)(\phi x),$$

esto es, "$\hat{z}(\phi z)$ es una clase unitaria" es equivalente a "la x que satisface a $\phi\hat{x}$ existe".

Si $\alpha \in 1$, $\breve{\iota}`\alpha$ es el único miembro de $\alpha$ ya que el único miembro de $\alpha$ es el único término con el que $\alpha$ tiene la relación $\iota$. De este modo, "$\breve{\iota}`\alpha$" sustituye a "$(\imath x)(\phi x)$", si α significa $\hat{z}\,(\phi z)$. En la práctica. "$\breve{\iota}`\alpha$" es una notación más apropiada que "$(\imath x)$", y generalmente se usa en lugar de "$(\imath x)(\phi x)$."

Lo explicado anteriormente justifica la mayor parte de la notación empleada en este trabajo. En cuanto a las aplicaciones a diversas partes de las matemáticas, se introducen otras definiciones; pero los objetos definidos por estas definiciones posteriores pertenecen, en la mayoría de los casos, más bien a la matemática que a la lógica. El lector que haya asimilado los símbolos explicados arriba se encontrará con que cualquier fórmula posterior se podrá descifrar mediante la ayuda de unas pocas definiciones adicionales.

CAPITULO II

LA TEORIA DE TIPOS LOGICOS

La teoría de tipos lógicos, que se explicará en este capítulo, se nos recomienda por sí misma en primera instancia por su capacidad para resolver ciertas contradicciones, de las que una de las más conocidas para las matemáticas es la de Burali-Forti relativa al mayor ordinal. Pero la teoría en cuestión no depende totalmente de esta recomendación indirecta; tiene también una cierta consonancia con el sentido común que la hace inherentemente creible. En lo que sigue exponemos, por tanto, en primer lugar la teoría en sí misma, y a continuación su aplicación a la resolución de las contradicciones.

I. El Principio del Círculo Vicioso

Un análisis de las paradojas que se han de evitar indica que todas ellas resultan de una cierta clase de círculo vicioso (23). Los círculos viciosos de los que nos ocupamos surgen del hecho de suponer que una colección de objetos puede contener miembros que sólo pueden ser definidos mediante la colección como totalidad. Así, por ejemplo, la colección de las *proposiciones* se supone que contiene una proposición que dice que "toda proposición es verdadera o falsa". Parecería, sin embargo, que dicha afirmación no podría ser legítima a menos que "toda proposición" se refiera a alguna colección ya definida, lo que no puede hacerse si se crean nuevas proposiciones mediante expresiones que contengan "toda proposición". Tendremos, por tanto, que decir que las expresiones que contengan "toda proposición" carecen de sentido. Con más generalidad, dado un conjunto de objetos tal que –si suponemos que el conjunto forma una totalidad– contenga miembros que presupongan dicha totalidad, entonces tal conjunto carece de totalidad. Al decir que un conjunto "carece de totalidad" queremos indicar, principalmente, que no puede tomarse ninguna expresión acerca de "todos sus miembros" que sea significante. Proposiciones, como el ejemplo expuesto, deben ser un conjunto carente de totalidad. Esto mismo es aplicable, como veremos enseguida, a las funciones proposicionales, incluso cuando éstas se limiten a aquellas que puedan tener significativamente como argumento un objeto dado *a*. En tales casos, es necesario descomponer nuestro conjunto en otros más pequeños, cada uno de los cuales sea capaz de una totalidad. A esto es a lo que aspira la teoría de tipos.

---

(23) Véase la última sección del presente capítulo. Cf. también H. Poincaré, "Les mathématiques et la logique", *Revue de Métaphysique et de Morale,* Mayo 1906, p. 307.

El principio que nos capacita para evitar totalidades ilegítimas puede definirse así: "Aquello que abarque la *totalidad* de una colección no debe ser un miembro de la colección"; o, por el contrario "Si, supuesto que una cierta colección contiene a su totalidad, entonces dicha colección no contiene la totalidad". A esto llamaremos "principio de círculo vicioso", porque nos capacita para evitar los círculos viciosos que implica la suposición de totalidades ilegítimas. Los argumentos que son condenados por el principio del círculo vicioso se llamarán "falacias de círculo vicioso". Tales argumentos, en ciertas circunstancias, pueden llevar a contradicciones, pero frecuentemente ocurre que las conclusiones a las que llegan son realmente verdaderas, aunque los argumentos sean falaces. Tómese, por ejemplo, la ley del medio excluso, en la forma "toda proposición es verdadera o falsa". Si a partir de esta ley argüimos que, debido a que la ley del medio excluso es una proposición (y por lo tanto, esta ley del medio excluso es verdadera o falsa) incurrimos en una falacia de círculo vicioso. "Toda proposición" debe limitarse de algún modo antes de que llegue a ser una totalidad legítima; y toda limitación que la haga legítima debe lograr que cualquier expresión acerca de la totalidad caiga fuera de la totalidad. Similarmente, el supuesto escéptico que afirma que no sabe nada, y que queda refutado al preguntársele si se sabe que no se sabe nada, afirma un sin-sentido, y ha sido falazmente refutado por un argumento que entraña una falacia de círculo vicioso. A fin de que la aserción del escéptico pueda llegar a ser significante, es necesario fijar ciertas limitaciones sobre las cosas en las que él asegura su ignorancia, porque las cosas de las que es posible ser ignorante forman una totalidad ilegítima. Pero tan pronto como él haya fijado una adecuada limitación sobre la colección de proposiciones de las cuales está asegurando su ignorancia, la proposición que dice que él es ignorante de cada miembro de esta colección no debe ser un miembro de la colección. De aquí que cualquier escepticismo significante no queda abierto a la anterior forma de refutación.

Las paradojas de la lógica simbólica conciernen a diversas clases de objetos: proposiciones, clases, números cardinales y ordinales, etc. Todas estas clases de objetos, como veremos, representan totalidades ilegítimas y son, por tanto, capaces de originar falacias de círculo vicioso. Pero, por medio de la teoría (que se explicará en el capítulo III) que reduce las expresiones cuyas palabras conciernen con clases y relaciones a expresiones que atañen a funciones proposicionales, las paradojas se reducen a aquellas que se refieren a proposiciones y funciones proposicionales. Las paradojas que se refieren a proposiciones son sólo indirectamente importantes para las matemáticas, mientras que lo que más inmediatamente interesa a los matemáticos son las que tienen que ver con las *funciones proposicionales*. Procederemos, por tanto, a la sola consideración de las funciones proposicionales.

II. La naturaleza de las funciones proposicionales

Por "función proposicional" entendemos algo que contiene una variable x, y que expresa una *proposición* en cuanto se le asigne un valor a dicha x. Es decir, difiere

de una proposición solamente por el hecho de que es ambigua: contiene una variable a la que no se le asigna un valor. Concuerda con las funciones ordinarias de las matemáticas en el hecho de que contienen una variable no asignada; en lo que difiere es en el hecho de que los valores de la función son proposiciones. Así, por ejemplo, "x es un hombre" o "sen $x = 1$" son funciones proposicionales. Se verá que es posible incurrir en falacia de círculo vicioso al admitir como argumentos posibles para una función proposicional términos que presuponen la función. Esta forma de falacia es muy instructiva, y la manera de evitarla conduce, como veremos, a la jerarquía de tipos.

La cuestión respecto a la naturaleza de una función (24) no es en modo alguno una cuestión fácil. Puede parecer, empero, que la característica esencial de una función es la *ambigüedad.* Tomemos, por ejemplo, la ley de la identidad en la forma "A es A", que es la forma en la que se enuncia normalmente. Es evidente que, en el aspecto psicológico, tenemos aquí un juicio simple. Pero, ¿qué decimos del contenido del juicio? No estamos juzgando que Sócrates es Sócarates, ni que Platón es Platón, ni ningún otro juicio determinado que sea ejemplo de la ley de identidad. Aun así, cada uno de estos juicios está, en cierto sentido, dentro del alcance de nuestro juicio. Estamos, de hecho, juzgando un ejemplo ambiguo de la función proposicional "A es A". Nos parece tener un único pensamiento que no tiene un objeto definido, sino que tiene como objeto un valor indeterminado de los de la función "A es A". Esta es la clase de ambigüedad que constituye la esencia de una función. Cuando hablamos de "ϕx", en donde la x no está especificada, aludimos a un valor de la función, pero no a uno determinado. Podemos expresar esto diciendo que "ϕx" *denota ambiguamente* ϕa, ϕb, ϕc, etc., en donde ϕa, ϕb, ϕc, etc., son los diferentes valores de "ϕx".

Cuando decimos que "ϕx" denota ambiguamente a ϕa, ϕb, ϕc, etc., damos a entender que "ϕx" significa uno de los objetos ϕa, ϕb, ϕc, etc., aunque no uno definido, sino uno indeterminado. De esto se sigue que "ϕx" sólo tiene un significado bien-definido (bien-definido, es decir, excepto en lo que se refiere a lo que es su esencia, que es ambigua) si los objetos ϕa, ϕb, ϕc, etc., están bien-definidos. Es decir, una función no es una función bien-definida a menos que todos sus valores se encuentren ya bien-definidos. Resulta de esto que una función no puede tener entre sus valores algo que presuponga la función, porque si lo tuviese no podríamos referirnos a objetos señalados ambiguamente por la función como definidos hasta que la función no fuese definida; mientras que, por el contrario, como acabamos de ver, la función no puede ser definida hasta que sus valores no estén defindos. Este es un caso particular, quizá el más fundamental, del principio del círculo vicioso. Una función es lo que ambiguamente designa algo de una cierta totalidad, a saber, los valores de la función; por ende, esta totalidad no puede contener miembros que abarquen la función, ya que si fuere así debería contener

(24) Cuando se emplee la palabra "función" en lo sucesivo, siempre querrá significar "función proposicional". En este capítulo no se tratarán otras funciones.

miembros que abarcasen a la totalidad, lo cual, por el principio del círculo vicioso, no puede englobar la totalidad.

Se verá que, de acuerdo con lo anteriormente expuesto, los valores de una función se presuponen en ella, y no al contrario. Está suficientemente claro, en cualquier caso particular, que un valor de una función no presupone a la función. Así, por ejemplo, la proposición "Sócrates es humano" puede aprehenderse perfectamente sin considerarla como un valor de la función "x es humano". Es cierto que, por el contrario, una proposición puede ser aprehendida sin que necesariamente se tengan que aprehender sus valores en grupos o individualmente. Si este no fuera el caso, la función no podría ser aprehendida en absoluto, ya que el número de valores (verdaderos o falsos) de una función es necesariamente infinito, y existen necesariamente argumentos posibles que son incognoscibles. Lo que es necesario no es que los valores deban darse individual y extensionalmente, sino que la totalidad de los valores deben darse intensionalmente, de forma que, respecto a cualquier objeto asignado, se determine, por lo menos teóricamente si dicho objeto es o no un valor de la función.

En la práctica es necesario distinguir la función en sí de un valor indeterminado de esa función. Podemos considerar a la función propiamente dicha como aquello que señala ambiguamente, mientras que un valor indeterminado de la función es aquello que está señalado ambiguamente. Si un valor indeterminado se escribe "ϕx", escribiremos la función propiamente dicha "$\phi\hat{x}$" (puede usarse otra letra en lugar de la x). Así, pues, debemos decir que "ϕx es una proposición" y que "$\phi\hat{x}$ es una función proposicional". Cuando decimos que "ϕx es una proposición" queremos decir que expresamos algo que es verdadero para todo posible valor de x, aunque no decidamos qué valor tiene x. Estamos haciendo una expresión ambigua acerca de un valor cualquiera de la función. Pero cuando decimos "$\phi\hat{x}$ es una función" no hacemos una declaración ambigua. Sería más correcto decir que estamos haciendo una declaración acerca de una ambigüedad, habida cuenta de que una función es una ambigüedad. La función propiamente dicha, $\phi\hat{x}$, es el objeto singular que ambiguamente indica sus múltiples valores; mientras que ϕx, en donde no se especifica la x, es uno de los objetos indicados, cuya ambigüedad estriba en la manera de indicar.

Hemos visto que, de acuerdo con el principio del círculo vicioso, los valores de una función no pueden contener términos sólo definibles en términos de la función. Ahora bien, dada una función $\phi\hat{x}$, los valores de la función (25) son todos proposiciones de la forma ϕx. De esto se desprende que no debe haber proposiciones de la forma ϕx, en las que la x tenga un valor que abarque a $\phi\hat{x}$ (Si éste fuera el caso, los valores de la función no estarían determinados hasta que la función

(25) En este capítulo hablaremos de "valores *para* $\phi\hat{x}$" y de "valores *de* ϕx" significando en cada caso lo mismo, a saber, ϕa, ϕb, ϕc, etc. La diferencia de fraseología sirve para evitar la ambigüedad cuando intervengan varias variables, especialmente cuando una de ellas sea una función.

estuviera determinada, de donde deducimos que la función no queda determinada a no ser que sus valores estén previamente determinados). Por lo tanto, no debe existir cosa alguna que sea un valor para $\phi\hat{x}$ con el argumento $\phi\hat{x}$, o con algún argumento que abarque a $\phi\hat{x}$. Es decir, el símbolo "$\phi(\phi\hat{x})$" no debe expresar una proposición como lo hace "$\phi(a)$" si ϕa es un valor de $\phi\hat{x}$. En realidad "$\phi(\phi\hat{x})$" debe ser un símbolo que no exprese nada; podemos, por tanto, decir que no es significante. Así, pues, dada una función $\phi\hat{x}$, hay argumentos para los cuales la función no tiene valor, así como hay argumentos para los que sí tiene un valor. A los argumentos para los cuales la función adquiere un valor los llamaremos "valores posibles de x". Diremos que $\phi\hat{x}$ es "significante con el argumento x" cuando $\phi\hat{x}$ tiene un valor con el argumento x.

Cuando, por ejemplo, se dice que "$\phi(\phi\hat{z})$" carece de sentido, y que, por lo tanto, no es verdadero ni falso, es necesario evitar una tergiversación. Si "$\phi(\phi\hat{z})$" fuese interpretado en el sentido de que "el valor de $\phi\hat{z}$ con el argumento $\phi\hat{z}$ es verdadero" no sería un sin-sentido sino que sería falso. Es falso por la misma razón por la que "el rey de Francia es calvo" es falso, a saber, porque no existe una cosa tal que sea "el valor de $\phi\hat{z}$ con el argumento $\phi\hat{z}$". Pero cuando, con el mismo argumento a afirmamos ϕa, no estamos indicando que afirmamos que "el valor de $\phi\hat{x}$ con el argumento a es verdadero"; lo que damos a entender es que aseveramos la proposición real que *es* el valor de $\phi\hat{x}$ con el argumento a. Así, por ejemplo, si $\phi\hat{x}$ es "$\hat{x}$ es un hombre", ϕ (Sócrates) será "Sócrates es un hombre", y *no* "el valor para la función '$\hat{x}$ es un hombre', con argumento Sócrates, es verdadero". Así, de acuerdo con nuestro principio de que "$\phi(\phi\hat{z})$" no tiene sentido, no podemos legítimamente negar que "la función '$\hat{x}$ es un hombre' sea un hombre", porque esto no tendría sentido; sin embargo podemos legítimamente negar que "el valor para la función '$\hat{x}$ es un hombre' con el argumento "'$\hat{x}$ es un hombre' es verdadero", no sobre la base de que el valor en cuestión sea falso, sino apoyándonos en que no existe tal valor para la función.

Indicaremos mediante el símbolo "$(x) . \phi x$" la proposición "siempre ϕx" (26), es decir, la proposición que asevera *todos* los valores para $\phi\hat{x}$. Esta proposición abarca a la función $\phi\hat{x}$ y no meramente un valor ambiguo de la función. La aserción de ϕx, en la que x no se especifica, es una aserción diferente de la que afirma todos los valores de $\phi\hat{x}$, puesto que la primera es una aserción ambigua mientras que la segunda en modo alguno es ambigua. Se observará que "$(x) . \phi x$" no afirma "ϕx con todos los valores de x", porque, como hemos visto, debe haber valores de x con los que "ϕx" no tiene sentido. Lo que se asevera por "$(x) . \phi x$" son todas las proposiciones que son valores para $\phi\hat{x}$; de aquí que, solamente con tales valores de x es como ϕx se hace significativa; es decir, con todos los *posibles* valores con los que se asevera ϕx cuando aseveramos "$(x) . \phi x$". Así, pues, una manera conveniente de leer "$(x) . \phi x$" es "ϕx es verdadera con todos los valores posibles de x". Sin embargo,

(26) Usamos "siempre" significando "en todos los casos" y no "todas las veces". De manera semejante, "alguna vez" se empleará en el sentido de "en algunos casos".

ésta es una lectura menos exacta que "siempre ϕx", porque la noción de *verdad* no es parte del contenido de lo que se juzga. Cuando emitimos el juicio "todos los hombres son mortales" juzgamos con verdad, pero la noción de verdad no está necesariamente en nuestras mentes, más que aquella que es necesaria cuando juzgamos "Sócrates es mortal".

III. Definición y ambigüedad sistemática de verdad y falsedad

Puesto que "$(x) . \phi x$" abarca la función $\phi\hat{x}$ debe, de acuerdo con nuestro principio, serle imposible ser argumento para ϕ. Es decir, el símbolo "$\phi \{ (x) . \phi x \}$" debe carecer de sentido. Este principio parecería, a primera vista, tener ciertas excepciones. Tomemos, por ejemplo, la función "$\hat{p}$ es falsa" y consideremos la proposición "$(p) . p$ es falsa". Esto debería ser una proposición que afirmase todas las proposiciones de la forma "p es falso". De una proposición tal deberíamos inclinarnos a decir que debe ser falsa, porque "p es falso" no siempre es verdadera. Por tanto nos llevaría a la proposición

"$\{ (p) . p$ es falso $\}$ es falsa";

es decir, nos llevaría a una proposición en la cual "$(p) . p$ es falso" es el argumento de la función "$\hat{p}$ es falso", lo que ya hemos manifestado ser imposible. Ahora se verá que "$(p) . p$ es falso" en el caso de arriba, pretende ser una proposición acerca de todas las proposiciones y que, por la forma general del principio del círculo vicioso, no debe haber proposiciones acerca de *todas* las proposiciones. No obstante, parece claro que, dada una función, haya una proposición (verdadera o falsa) que asevere todos sus valores. Por eso llegamos a la conclusión de que "p es falso" y "q es falso" no siempre deben ser los valores, con los argumentos p y q, para una función única "$\hat{p}$ es falsa". Esto, sin embargo, es sólo posible si la palabra "falsa" tiene en realidad muchos significados diferentes apropiados a proposiciones de diferentes clases.

No resulta difícil comprobar que las palabras "verdadero" y "falso" tienen muchos significados diferentes, de acuerdo con la clase de proposiciones a la que se apliquen. Tomemos una función $\phi\hat{x}$, y sea ϕa uno de sus valores. Denominemos "primera verdad" a la clase de verdad que es aplicable a ϕa. (Esto no quiere decir que esta verdad sea la primera verdad en otro contexto; simplemente se indica que es la primera clase de verdad en nuestro contexto). Consideremos ahora la proposición $(x) . \phi x$. Si ésta posee una verdad de la clase apropiada a ella, esto significará que cada valor ϕx tiene "primera verdad". Así, pues, si a la clase de verdad que es apropiada a $(x) . \phi x$ la llamamos "*segunda* verdad", podemos definir "$\{ (x) . \phi x \}$ tiene segunda verdad" con el significado de que "cada valor para $\phi\hat{x}$ tiene primera verdad"; es decir, "$(x) . (\phi x$ tiene primera verdad)". Análogamente, si por "$(\exists x) . \phi x$" indicamos la proposición "algunas veces ϕx", es decir, –aunque expresada con menos precisión– "ϕx para algún valor de x", encontramos que $(\exists x) . \phi x$

tiene segunda verdad si hay una x para la cual ϕx tiene una primera verdad. Por tanto, podemos definir "$\{(\exists x).\phi x\}$ tiene segunda verdad" dándole el significado "algún valor para $\phi\hat{x}$ tiene primera verdad", o sea, "$(\exists x).(\phi x$ tiene primera verdad)". Observaciones semejantes son aplicables a la falsedad. Así, pues, "$\{(x).\phi x\}$ tiene segunda falsedad" significa "algún valor para $\phi\hat{x}$ tiene primera falsedad", es decir, "$(\exists x).(\phi x$ tiene primera falsedad)"; mientras que "$\{(\exists x).\phi x\}$ tiene segunda falsedad" significa que "todos los valores para $\phi\hat{x}$ tienen primera falsedad", esto es, "$(x).(\phi x$ tiene primera falsedad)". Así, pues, la clase de falsedad que puede pertenecer a una proposición general es diferente de la clase que puede pertenecer a una proposición particular.

Aplicando estas consideraciones a la proposición "$(p).p$ es falso", vemos que debe ser especificada la clase de falsedad en cuestión. Si, por ejemplo, nos referimos a la primera falsedad, la función "$\hat{p}$ tiene una primera falsedad" es significante sólo cuando p sea de la clase de proposición que tiene primera falsedad o primera verdad. Por eso, "$(p).p$ es falso" se sustituirá por una expresión que sea equivalente a "toda proposición que tenga primera verdad o primera falsedad tiene primera falsedad". Esta proposición tiene *segunda* falsedad, y no es un argumento posible para la función "$\hat{p}$ tiene *primera* falsedad". De este modo desaparece la aparente excepción al principio que dice que "$\phi\{(x).\phi x\}$ debe ser un sin-sentido.

Consideraciones similares nos capacitan para tratar con "no-p" y con "p o q". Podría parecer como si éstas fuesen funciones en las cuales *cualquier* proposición podría aparecer como argumento. Pero esto se debe a una sistemática ambigüedad en los significados de "no" y "o", por la que ellas mismas se adaptan a proposiciones de cualquier orden. Para explicar de una manera completa cómo ocurre esto, convendrá comenzar con una definición de la clase más simple de *verdad* y *falsedad.*

El universo se compone de objetos que poseen diversas cualidades y que se encuentran en diferentes relaciones. Alguno de estos objetos que acontecen en el universo son complejos. Cuando un objeto es complejo, consta de partes interrelacionadas. Consideremos un objeto complejo compuesto de dos partes, a y b, que se encuentran entre sí en la relación R. El objeto complejo "a-en-la-relación-R-con-b", puede ser capaz de *percibirse;* cuando se percibe, se percibe como un objeto. La atención puede mostrar que ese objeto es complejo; entonces *juzgamos* que a y b se encuentran en la relación R. Un juicio tal, que proviene de la percepción por mera atención, puede llamarse un "juicio de percepción". Este juicio de percepción, considerado como un acontecimiento real, es una relación de cuatro términos, a saber, a, b, R y el perceptor. La percepción, por el contrario, es una relación de dos términos: "a-en-la-relación-R-con-b" y el perceptor. Ya que un objeto de percepción ha de ser algo, no podemos percibir "a-en-la-relación-R-con-b", a no ser que a esté en la relación R con b. Por tanto, un juicio de percepción, de acuerdo con la definición dada, debe ser verdadero. Esto no quiere decir que, en un juicio que se nos *muestre* como una percepción, estemos seguros de no encontrarnos en un error, puesto que podemos equivocarnos al pensar que nuestro juicio realmente se dedujo del mero análisis de lo que se percibió. Pero si nuestro juicio ha sido, por tanto, deducido,

debe ser verdadero. En realidad, podemos definir la *verdad,* por lo que se refiere a tales juicios, como lo consistente en el hecho de que haya un objeto complejo *que corresponda* al pensamiento discursivo que es el juicio. Es decir, cuando juzgamos "*a* tiene la relación *R* con *b*" nuestro juicio se dice que es *verdadero* cuando haya un complejo "*a*-en-relación-*R*-con-*b*", y se dice que es *falso* cuando no es este el caso. Esta es una definición de verdad y de falsedad en relación con los juicios de esta clase.

Se verá que, de acuerdo con lo explicado, un juicio no consta de un objeto único, a saber, la proposición, sino que tiene varios objetos interrelacionados. Es decir, la relación que constituye el juicio no es una relación de dos términos –el pensamiento del juicio y la proposición– sino una relación entre varios términos, a saber la mente y los que se llaman constituyentes de la proposición. Esto es, cuando juzgamos (decimos) "ésto es rojo", lo que hay es una relación de tres términos, la mente, "ésto" y rojo. Por otra parte, cuando *percibimos* "la rojez de ésto", hay una relación de dos términos, que son la mente y el objeto complejo "la rojez de ésto". Cuando se presenta un juicio existe una cierta entidad compleja, compuesta por la mente y los diversos objetos del juicio. Cuando el juicio es *verdadero,* en el caso de la clase de juicios que hemos considerado, hay un complejo de *objetos* que corresponden a sólo ese juicio. La falsedad, con respecto a la clase de juicios que estamos considerando, consiste en la ausencia de un complejo correspondiente compuesto sólo de objetos. De la teoría expuesta se sigue que una "proposición", en el sentido en que una proposición se supone *el* objeto del juicio, es una falsa abstracción porque un juicio tiene varios objetos, y no uno. La diversidad de objetos en el juicio (como opuesto a percepción) es lo que ha llevado a la gente a hablar del pensamiento como "discursivo", aunque no aparece claramente qué es lo que se entendía por este epíteto.

Debido a la pluralidad de los objetos de un juicio determinado resulta que lo que llamamos "proposición" (en el sentido en que ésta se distingue de la frase que la expresa) de ningún modo es una entidad singular. Es decir, la frase que expresa una proposición es a lo que llamamos un símbolo (27) "incompleto"; no tiene significado por sí mismo, sino que precisa de algún complemento para adquirir un significado completo. Este hecho es algo encubierto por la circunstancia de que el juicio en sí mismo proporciona un suplemento suficiente, y que el juicio por sí mismo no hace una adición *verbal* a la proposición. Así, pues, "la proposición 'Sócrates es humano'" usa "Sócrates es humano" de una manera que requiere algún tipo de suplemento antes de que alcance un significado completo; pero cuando juzgo "Sócrates es humano", el significado se completa por el acto del juicio, y no tenemos por más tiempo un símbolo incompleto. El hecho de que las proposiciones sean "símbolos incompletos" es filosóficamente importante, y es relevante en ciertos puntos de la lógica simbólica.

(27) Ver Capítulo III.

Los juicios sobre los que hemos tratado hasta aquí son de la misma forma que los juicios de percepción, es decir, sus sujetos son siempre particulares y definidos. Pero hay muchos juicios que no son de esta forma, tales como "todos los hombres son mortales", "yo encontré un hombre", "algunos hombres son griegos". Antes de tratar de tales juicios, introduciremos algunos términos técnicos.

Daremos el nombre de "un *complejo*" a algunos objetos tales como "*a* en la relación *R* con *b*", o "*a* que tiene la cualidad *q*", o "*a* y *b* y *c* están en la relación *S*". Hablando en sentido amplio, un *complejo* es cualquier cosa que ocurra en el universo y que no sea simple. Diremos que un juicio es *elemental* cuando asevere cosas tales como "*a* tiene la relación *R* con *b*", "*a* tiene la cualidad *q*", o "*a* y *b* y *c* están en la relación *S*". Entonces, un juicio *elemental* es verdadero cuando existe un complejo correspondiente, y falso cuando no hay un complejo correspondiente.

Tomemos ahora una proposición tal como "todos los hombres son mortales". Aquí el juicio no corresponde a *un* complejo sino a muchos, a saber, "Sócrates es mortal", "Platón es mortal", "Aristóteles es mortal", etc. (Por el momento no es necesario averiguar si cada uno de éstos no requiere un tratamiento posterior antes de que alcancemos los complejos primarios que comprende. A guisa de ilustración, "Sócrates es mortal" se considera aquí como un juicio elemental, aunque de hecho no lo es, como se explicará más adelante. Ciertamente no resulta muy fácil encontrar juicios elementales.) No intentamos negar que pueda haber alguna relación entre el concepto *hombre* y el concepto *mortal* que pueda ser *equivalente* a "todos los hombres son mortales"; pero, en cualquier caso, esta relación no es lo mismo que lo que afirmamos cuando decimos que todos los hombres son mortales. Nuestro juicio de que todos los hombres son mortales auna un cierto número de juicios elementales. Sin embargo, no está compuesto por ellos, ya que, por ejemplo, el hecho de que Sócrates sea mortal no es parte de lo que aseveramos, como puede apreciarse considerando el hecho de que nuestra afirmación puede ser entendida por una persona que nunca oyó hablar de Sócrates. A fin de comprender el juicio "todos los hombres son mortales" no es necesario conocer cuáles son esos hombres. Debemos admitir, sin embargo, como una clase de juicios radicalmente nueva, aserciones generales tales como "todos los hombres son mortales". Nosotros aseveramos que, dado que x es humano, x es siempre mortal. Esto es, nosotros afirmamos "x es mortal" de *cada* x que sea persona humana. Así, pues, somos capaces de juzgar (tanto verdadera como falsamente) que *todos* los objetos que tienen alguna propiedad asignada también tienen alguna otra propiedad asignada. Es decir, dadas las funciones proposicionales cualesquiera, $\phi\hat{x}$ y $\psi\hat{x}$, existe un juicio que asevera ψx con cada x para la cual tengamos ϕx. A tales juicios llamaremos *juicios generales.*

Es evidente (como se ha explicado) que la definición de *verdad* es diferente en el caso de juicios generales de la que tenía en el caso de los juicios elementales. Al significado de *verdad* que otorgamos a los juicios elementales, le llamamos "verdad elemental". De este modo, cuando aseveramos que es verdad que todos los hombres son mortales, debemos entender que todos los juicios de la forma "x es mortal", en

donde x es un hombre, tiene verdad elemental. Podemos definir esto como "verdad de segundo orden", o "verdad secundaria". Luego, si expresamos la proposición "todos los hombres son mortales" de la forma

"(x) . x es mortal, donde x es un hombre",

y llamamos p a este juicio, entonces "p es verdad" debe tomarse en el sentido de "p tiene verdad de segundo orden", lo que, en definitiva, significa

"(x) . 'x es mortal', en donde x es un hombre, tiene verdad elemental".

A fin de evitar la necesidad de manifestar explícitamente la limitación a la que está sujeta nuestra variable, es conveniente sustituir la interpretación dada a "todos los hombres son mortales" por otra interpretación ligeramente diferente. La proposición "todos los hombres son mortales" es equivalente a "'x es un hombre' implica 'x es mortal'" para todos los posibles valores de x. Aquí, x no está limitada a valores tales como son los hombres, pero puede tener algún valor con el cual "x es un hombre implica x es mortal" sea *significante,* es decir, que sea verdadera o falsa. Una proposición de este tipo se denomina "implicación formal". La ventaja de esta forma es que los valores que pueda tomar la variable vienen dados por la función de la cual es el argumento: los valores que puede tomar la variable son todos aquellos para los que la función se hace significante.

Usamos el símbolo "(x) . ϕx" para expresar el juicio general que asevera todos los juicios de la forma "ϕx". Por consiguiente, el juicio "todos los hombres son mortales" es equivalente a

"(x) . 'x es un hombre' implica 'x es mortal'",

es decir (en virtud de la definición de la implicación), a:

"(x) . x no es un hombre o x es mortal".

Como acabamos de ver, el significado de *verdad* que es aplicable a esta proposición no es el mismo que el significado de *verdad* que es aplicable a "x es un hombre" o a "x es mortal"; y, generalmente, en un juicio (x) . ϕx, el sentido en el cual este juicio es o puede ser verdadero no es el mismo como en el que ϕx es o puede ser verdadero. Si ϕx es un juicio elemental, es verdadero cuando *señale a* un correspondiente complejo. Pero (x) . ϕx no señala a un correspondiente complejo único: los correspondientes complejos son tan numerosos como los posibles valores de x.

De lo dicho resulta que proposiciones como "todos los juicios hechos por Epiménides son verdaderos" solamente serán, prima facie, capaces de verdad si todos estos juicios son del mismo orden. Si son de órdenes distintos, de los cuales el n-simo es el de mayor grado, podemos hacer n aserciones de la forma "todos los juicios de orden m hechos por Epiménides son verdaderos", en donde m tiene todos los valores hasta llegar a n. Pero tal juicio no se puede incluir a sí mismo en su propio alcance ya que siempre es de un orden superior al de los juicios a los que se refiere.

Consideremos a continuación lo que se entiende por negación de una proposición de la forma "$(x)\,.\,\phi x$". Observamos, para empezar, que "en algunos casos ϕx", o "algunas veces ϕx" es un juicio paralelo a "en todos los casos ϕx", o "siempre ϕx". El juicio "algunas veces ϕx" es verdadero si existe uno o más valores de x para los cuales ϕx es verdadero. Expresamos la proposición "algunas veces ϕx" mediante la notación "$(\exists x)\,.\,\phi x$" en donde "$\exists$" significa "existe", y el símbolo completo puede leerse "existe una x tal que ϕx". Nosotros consideramos las dos clases de juicios expresados por "$(x)\,.\,\phi x$" y "$(\exists x)\,.\,\phi x$" como ideas primitivas. También consideramos como idea primitiva la negación de una proposición *elemental.* Podemos, pues, definir las negaciones de $(x)\,.\,\phi x$ y de $(\exists x)\,.\,\phi x$. La negación de una proposición p se indica mediante el símbolo "$\sim p$". Por tanto, la negación de $(x)\,.\,\phi x$ se *define* con la significación

$$\text{“}(\exists x)\,.\sim \phi x,\text{”}$$

y la negación de $(\exists x)\,.\,\phi x$ se *define* con la significación "$(x)\,.\sim \phi x$". De este modo, en el lenguaje tradicional de la lógica formal la negación de una universal afirmativa se define como la particular negativa, y la negación de una particular afirmativa se define como la universal negativa. Por eso, el significado de la negación de tales proposiciones es diferente del significado de la negación de proposiciones elementales.

Una explicación análoga se aplicará a la disyunción. Considérese la expresión "p, o siempre ϕx". Designaremos la disyunción de dos proposiciones, p y q, por "$p \vee q$". Por tanto, nuestra expresión es "$p\,.\vee.\,(x)\,.\,\phi x$". Supondremos que p es una proposición elemental, y que ϕx es siempre una proposición elemental. Nosotros aceptamos la disyunción de dos proposiciones elementales como una idea primitiva, y deseamos *definir* la disyunción

$$\text{“}p\,.\vee.\,(x)\,.\,\phi x.\text{”}$$

Esta puede definirse como "$(x)\,.\,p \vee \phi x$", es decir, "p es verdadero o ϕx es siempre verdadero", lo que quiere decir "'p o ϕx' es siempre verdadero". Similarmente, definiremos

$$\text{“}p\,.\vee.\,(\exists x)\,.\,\phi x\text{”}$$

con la significación "$(\exists x)\,.\,p \vee \phi x$"; es decir, definimos "$p$ es verdadero o hay una x para la cual ϕx es verdadero", significando "hay una x para la que p o ϕx es verdadero". De forma similar, podemos definir una disyunción de dos proposiciones universales: "$(x)\,.\,\phi x\,.\vee.\,(y)\,.\,\psi y$" se define con la significación "$(x, y)\,.\,\phi x \vee \psi y$", es decir, "$\phi x$ es siempre verdadero o ψy es siempre verdadero" que quiere decir "'ϕx o ψy' es siempre verdadero". Por este método obtenemos definiciones de disyunciones que contienen proposiciones de la forma $(x)\,.\,\phi x$ o $(\exists x)\,.\,\phi x$ en términos de disyunciones de proposiciones elementales; pero el significado de "disyunción" no es el mismo para proposiciones de las formas $(x)\,.\,\phi x$, $(\exists x)\,.\,\phi x$, que la dada para proposiciones elementales.

Podrían darse explicaciones similares para la implicación y la conjunción, pero esto resulta innecesario, por cuanto éstas pueden definirse en términos de negación y disyunción.

IV. Por qué una función dada requiere argumentos de un determinado tipo.

Las consideraciones aducidas hasta ahora en favor de la opinión de que una función no puede tener significativamente ningún argumento definido en términos de dicha función se han manifestado de una forma más o menos indirecta. Pero una consideración directa de las clases de funciones que tienen funciones como argumentos y de las clases de funciones que tienen como argumentos algo distinto que funciones mostrará, si no estamos equivocados, que no sólo es imposible para una función $\phi\hat{z}$ tenerse a sí o a algo derivado de ella como argumento, sino que, si $\psi\hat{z}$ es otra función tal que hay argumentos a para los cuales "ϕa" y "ψa" sean significantes, entonces "$\psi\hat{z}$", y cualquiera derivada de ella, no puede significativamente ser argumento para $\phi\hat{z}$. Esto proviene del hecho de que una función es esencialmente una ambigüedad, y de que, si esto ocurre en una proposición definida debe de producirse de tal manera que la ambigüedad haya desaparecido, y resulte una expresión completamente sin ambigüedad. Unas pocas ilustraciones lo aclaran. Así, "$(x) . \phi x$", que ya hemos considerado, es una función de $\phi\hat{x}$; en cuanto $\phi\hat{x}$ esté asignado, tenemos una proposición definida, completamente libre de ambigüedad. Pero es obvio que no podemos sustituir por la función algo que no sea función: "$(x) . \phi x$" significa "ϕx en todos los casos", y para su significación depende del hecho de que existen "casos" de ϕx, es decir, sobre la ambigüedad que es característica de una función. Este ejemplo ilustra el hecho de que, cuando una función puede darse significativamente como argumento, algo que no sea una función no puede darse significativamente como argumento. Pero, por el contrario, cuando algo que no sea una función puede darse significativamente como argumento, una función no puede darse significativamente. Tomemos, por ejemplo, "x es un hombre", y consideremos "$\phi\hat{x}$ es un hombre". Aquí no hay nada que elimine la ambigüedad que constituye $\phi\hat{x}$; de este modo no hay nada definido del que se pueda decir que sea hombre. Una función, de hecho, no es un objeto definido, el cual podría ser o no ser un hombre; es una mera ambigüedad que espera una determinación, y a fin de que pueda darse significativamente debe recibir la necesaria determinación, que obviamente no recibe si está meramente sustituida en una proposición por algo determinado (28). Este argumento, sin embargo, no se aplica directamente en contra de una expresión tal como "$\{(x) . \phi x\}$ es un hombre". El sentido común debe decidir si una expresión tal es un sinsentido, pero

(28) Obsérvese que las expresiones que se refieren al significado de una frase que contenga "$\phi\hat{z}$" se refieren al símbolo "$\phi\hat{z}$", y, por tanto, no caen bajo la regla por la cual es necesario la eliminación de la ambigüedad funcional para que tengan significación. La significación es una propiedad de los signos. Cf. pp. 96, 97.

no puede condenarse en base a la ambigüedad de su contenido. Necesitamos hacer aquí una nueva objección: una proposición no es una entidad singular, sino una relación entre varias cosas; por ende, una expresión en la que una proposición aparezca como contenido sólo será significativa si puede reducirse a una expresión acerca de términos que aparecen en la proposición. Una proposición, –al igual que las frases del tipo "el tal y cual"–, donde gramaticalmente aparezcan como contenido, debe descomponerse en sus constituyentes para que encontremos el verdadero contenido o contenidos (29). Pero en una expresión tal como "p es un hombre", en donde p es una proposición, esto no es posible. Por consiguiente, "$\{(x) . \phi x\}$ es un hombre" carece de sentido.

V. La jerarquía de funciones y proposiciones

De este modo, tanto a partir del principio del círculo vicioso como de la inspección directa, hemos llegado a la conclusión de que las funciones para las que un objeto dado a puede ser argumento son incapaces de ser argumentos para otra, y que ellas no tienen término en común con las funciones para las que pueden ser argumentos. Por tanto, esto nos lleva a construir una jerarquía. Comenzando por a y por los otros términos que pueden ser argumentos para las mismas funciones para las que a puede ser también argumento, pasamos a continuación a funciones para las que a es un posible argumento; después, a funciones para las que tales funciones son posibles argumentos; y así sucesivamente. Pero la jerarquía que ha de construirse no es tan simple como parece a primera vista. Las funciones que pueden tomar a a como argumento forman una totalidad ilegítima, y ellas mismas requieren una división en una jerarquía de funciones. Esto puede verse fácilmente en lo siguiente. Sea $f(\phi\hat{z}, x)$ una función de dos variables, $\phi\hat{z}$ y x. Entonces, si, manteniendo por el momento fija la x, aseveramos ésto con todos los posibles valores de ϕ, obtenemos una proposición:

$$(\phi) . f(\phi\hat{z}, x).$$

Aquí, si x es variable, tenemos una función de x; pero como esta función abarca una totalidad de valores de $\phi\hat{z}$ (30), ella misma, en virtud del principio del círculo vicioso, no puede ser uno de los valores incluidos en la totalidad. Resulta que la totalidad de valores de la $\phi\hat{z}$ que interviene en $(\phi) . f(\phi\hat{z}, x)$ no es la totalidad de todas las funciones en las que x pueda darse como argumento, y que no existe una totalidad tal como ésta, constituida por todas las funciones en las que las x pueda intervenir como argumento.

---

(29) Cf. Cap. III.

(30) Cuando hablamos de "valores de $\phi\hat{z}$" es ϕ, y no z, lo que señalamos. Esto es consecuencia de la explicación dada en la nota de pág. 96. Cuando la función misma es la variable, es posible, y más sencillo escribir ϕ que $\phi\hat{z}$, excepto en los casos en donde sea necesario, para dar más énfasis, suministrar un argumento para asegurar la significación.

De lo anterior resulta que una función en la que $\phi\hat{z}$ aparezca como argumento exige que "$\phi\hat{z}$" no debe significar *ninguna* función que sea capaz de un argumento dado, pero debe restringirse de tal manera que ninguna de las funciones que sean valores posibles de "$\phi\hat{z}$" deban implicar referencia alguna a la totalidad de tales funciones. Como ilustración tomemos la definición de la identidad. Podríamos intentar definir "x es idéntico a y" dándole la significación "todo lo que sea verdad de x es verdad de y"; es decir, "ϕx implica siempre ϕy". Pero aquí, ya que nos interesa aseverar todos los valores de "ϕx implica ϕy" considerada como una función de ϕ, estaremos obligados a imponer sobre ϕ alguna limitación que nos impidiera incluir entre los valores de ϕ los valores que aludan a "todos los valores posibles de ϕ". Así, por ejemplo, "x es idéntico a a" es una función de x; por tanto, si ello es un valor legítimo de ϕ en "ϕx implica siempre ϕy", seremos capaces de inferir, por medio de la definición dada arriba, que si x es idéntico a a, y x es idéntico a y, entonces y es idéntico a a. Aunque la conclusión está bien formada, el razonamiento entraña una falacia de círculo vicioso, ya que tomamos a "$(\phi)\,.\,\phi x$ implica ϕa" como un valor posible de ϕx, lo que no puede ser. Sin embargo, si imponemos una limitación sobre ϕ, puede suceder, como ocurre hasta este momento, que con otros valores de ϕ podríamos tener ϕx verdadero y ϕy falso, de forma que nuestra propuesta definición de la identidad estaría evidentemente equivocada. Esta dificultad se evita mediante el "axioma de la reducibilidad", que se explicará más adelante. De momento, sólo se menciona con el objeto de ilustrar la necesidad y oportunidad de la jerarquía de funciones de un argumento dado.

Demos el nombre de "funciones-a" a aquellas que son significantes para un argumento dado a. Por tanto, supongamos que tenemos una selección de funciones-a, y consideremos la proposición "a satisface todas las funciones que pertenecen a la selección en cuestión". Si aquí sustituimos a por una variable, obtenemos una función-a; pero, por el principio del círculo vicioso, esta función-a no puede ser un miembro de nuestra selección, ya que se refiere a la totalidad de la selección. Permitamos que la selección consista en todas aquellas funciones que satisfacen $f(\phi\hat{z})$. Entonces, nuestra nueva función es

$$(\phi)\,.\,\{\,f(\phi\hat{z})\text{ implica }\phi x\,\}\,,$$

en donde x es el argumento. De este modo, parece que cualquiera que sea la selección de funciones-a que podamos hacer, habrá otras funciones-a que quedan fuera de nuestra selección. Tales funciones-a, como las de los ejemplos expuestos, siempre surgirán de tomar una función de dos argumentos, $\phi\hat{z}$ y x, y de aseverar todos o alguno de los valores que resultan de variar ϕ. Lo que, por tanto, es necesario, a fin de evitar falacias de círculo vicioso, es dividir nuestras funciones-a en "tipos", cada uno de los cuales no contenga funciones que se refieran a la totalidad del tipo.

Cuando se afirme o niegue algo acerca de todos los valores posibles o de algún valor (indeterminado) posible de una variable, esta variable se llama *aparente*, según Peano. La presencia de las palabras *todo* o *algún* en una proposición indica la

presencia de una variable aparente; pero, con frecuencia, una variable aparente está realmente presente donde el lenguaje no indica su presencia de una manera inmediata. Así, por ejemplo "A es mortal" significa "hay un momento en el que A morirá". De este modo, la variable tiempo interviene como una variable aparente.

Los ejemplos más claros de proposiciones que no contienen variables aparentes son los que expresan juicios inmediatos de percepción, como "ésto es rojo" o "ésto es doloroso", en donde "ésto" es algo dado de forma inmediata. En otros juicios, donde ni siquiera a primera vista parece presentarse una variable, ocurre a menudo que realmente existe una. Tomemos (digamos) "Sócrates es humano". Para el propio Sócrates, la palabra "Sócrates" no cabe duda que representaba un objeto del que era inmediatamente consciente, y el juicio "Sócrates es humano" no contenía variable aparente. Pero para nosotros, que sólo conocemos a Sócrates por descripción, la palabra "Sócrates" no puede significar lo mismo que le significaba a él; más bien que "la persona que posee tales y tales propiedades" ello significa (digamos) "el filósofo ateniense que bebió la cicuta". Ahora en todas las proposiciones acerca de "el tal y cual" hay una variable aparente, como se mostrará en el Capítulo III. Así, pues, en lo que *nosotros* tenemos en el pensamiento cuando decimos "Sócrates es una persona humana" existe una variable aparente, aunque no hubiera variable aparente en el correspondiente juicio tal como lo hubiera hecho Sócrates, siempre que supongamos que hay algo tal como el conocimiento inmediato de uno mismo.

Cualquiera que sean los ejemplos de proposiciones que no contengan variables aparentes, es obvio que las funciones proposicionales cuyos valores no contienen variables aparentes son la fuente de las proposiciones que contienen variables aparentes, en el sentido en que decimos que la función $\phi\hat{x}$ es la fuente de la proposición $(x) . \phi x$. En cuanto a los valores para $\phi\hat{x}$ no incluyen la variable aparente x, que aparece en $(x) . \phi x$; si contienen una variable aparente y, ésta puede ser igualmente eliminada, y así sucesivamente. Este proceso debe llevar a un final, ya que una proposición que podamos aprehender no puede contener más que un número finito de variables aparentes, en virtud de que cualquiera que podamos comprender debe ser de complejidad finita. Así, pues, podemos llegar, por fin, a una función de tantas variables como etapas fueron necesarias pasar para alcanzarla desde la proposición original, y esta función será tal que sus valores no contengan variables aparentes. Podemos llamar a esta función la *matriz* de nuestra proposición original, o de cualesquiera otras proposiciones y funciones que se obtengan mediante el cambio de algunos de los argumentos de la función en variables aparentes. Así, por ejemplo, si tomamos una función-matriz cuyos valores sean $\phi (x, y)$, derivaremos de ella

$(y) . \phi (x, y)$, que es una función de x,

$(x) . \phi (x, y)$, que es una función de y,

$(x, y) . \phi (x, y)$, que significa "$\phi (x, y)$ es verdadero para todos los valores posibles de x y de y". Esta última es una proposición que no contiene variable *real*, es decir, no contiene más variables que las aparentes.

Está, por tanto, claro que todas las proposiciones y funciones posibles pueden obtenerse a partir de matrices mediante el proceso de convertir los argumentos de las matrices en variables aparentes. Con el objeto de dividir nuestras proposiciones y funciones en tipos, partiremos, por tanto, de matrices, y tendremos cuidado en cómo se han de dividir con miras a evitar falacias de círculo vicioso en las definiciones de las funciones consideradas. Para este propósito, usaremos letras tales como *a, b, c, x, y, z, w,* para denotar objetos que no son ni proposiciones ni funciones. A tales objetos los llamaremos *individuales.* Tales objetos serán los constituyentes de las proposiciones o funciones, y serán los constituyentes *genuinos,* en el sentido de que no desaparecen en el análisis como (por ejemplo) desaparecen en las clases o frases de la forma "el tal y cual".

Las primeras matrices en que esto ocurre son aquellas cuyos valores son de las formas

$$\phi x,\ \psi(x, y),\ \chi(x, y, z \ldots),$$

es decir, en donde los argumentos, por muchos que sean, son todos individuales. Las funciones ϕ, ψ, χ, ... dado que (por definición) no contienen variables aparentes, y no tienen más argumentos que los individuales, no presuponen ninguna totalidad de funciones. A partir de las funciones ψ, χ, ... podemos proceder a formar otras funciones de x tales como $(y) \cdot \psi(x, y), (\exists y) \cdot \psi(x, y), (y, z) \cdot \chi(x, y, z), (y) : (\exists z) \cdot \chi(x, y, z)$, y así sucesivamente. Todas éstas no presuponen la totalidad excepto que se trate de individuales. Llegamos, así, a una determinada colección de funciones de x, caracterizadas por el hecho de que ellas no abarcan variables salvo individuales. A tales funciones llamaremos "funciones de *primer orden*".

Podemos ahora introducir una notación para expresar "cualquier función de primer orden". Denotamos a una función de primer orden por "$\phi ! \hat{x}$", y a un valor para tal función por "$\phi ! x$". Así, pues, "$\phi ! x$" representa cualquier valor de una función que no abarque variables, excepto individuales. Se apreciará que "$\phi ! x$" es en sí misma una función de dos variables, a saber $\phi ! \hat{z}$ y x. Así, pues, $\phi ! x$ entraña una variable que no es un individual, a saber, $\phi ! \hat{z}$. De manera similar, "$(x) \cdot \phi ! x$" es una función de la variable $\phi ! \hat{z}$ y, por tanto, no abarca más variable que un individual. De nuevo, si a es un individual dado, "$\phi ! x$ implica $\phi ! a$, para todos los posibles valores de ϕ" es una función de x, pero no es una función de la forma $\phi ! x$, porque ello entraña una variable (aparente) ϕ que no es un individual. Demos el nombre de "predicado" a cualquier función de primer orden $\phi ! \hat{x}$. (Este uso de la palabra "predicado" se propone sólo para esta discusión). Por consiguiente, el enunciado "$\phi ! x$ implica $\phi ! a$, para todos los posibles valores de ϕ" puede leerse "todos los predicados de x son predicados de a". Esto establece un enunciado acerca de x, pero no atribuye a x un *predicado* en el sentido especial que acabamos de definir.

Debido a la introducción de la función variable de primer orden, $\phi ! \hat{z}$, tenemos un nuevo juego de matrices. Así, pues, "$\phi ! x$" es una función que no contiene variables aparentes, sino que contiene las dos variables reales, $\phi ! \hat{z}$ y x. (Debe

observarse que cuando se asigna ϕ, podemos obtener una función cuyos valores envuelvan individuales como variables aparentes, como, por ejemplo, si $\phi ! x$ es $(y) . \psi (x, y)$. Pero en tanto que ϕ es variable, $\phi ! a$ no contiene variables aparentes). De nuevo, si a es un individual definido, $\phi ! a$ es una función de una variable $\phi ! \hat{z}$. Si a y b son individuales definidos, "$\phi ! a$ implica $\psi ! b$" es una función de dos variables, $\phi ! \hat{z}$, $\psi ! \hat{z}$; y así sucesivamente. Así, pues, nos vemos conducidos a un juego completo de nuevas matrices,

$$f(\phi ! \hat{z}),\ g(\phi ! \hat{z}, \psi ! \hat{z}),\ F(\phi ! \hat{z}, x),\ \text{y así sucesivamente.}$$

Estas matrices contienen individuales y funciones de primer orden como argumentos, pero (como todas las matrices) no contienen variables aparentes. Una matriz tal, si contiene más de una variable, da lugar a nuevas funciones de una variable cambiando todos sus argumentos excepto uno por variables aparentes. De este modo, obtenemos las funciones,

$$(\phi) . g(\phi ! \hat{z}, \psi ! \hat{z}),\ \text{que es una función de } \psi ! \hat{z}.$$

$$(x) . F(\phi ! \hat{z}, x),\ \text{que es una función de } \phi ! \hat{z}.$$

$$(\phi) . F(\phi ! \hat{z}, x),\ \text{que es una función de } x.$$

Damos el nombre de *matrices de segundo orden* a aquellas que tienen funciones de primer orden entre sus argumentos, y no tienen más argumentos que funciones de primer orden e individuales (no es *necesario* que tengan individuales entre sus argumentos). Damos el nombre de *funciones de segundo orden* a las que son matrices de segundo orden o se derivan de tales matrices cambiando algunos de sus argumentos en variables aparentes. Se verá que un individual, o una función de primer orden, puede presentarse como argumento de una función de segundo orden. Las funciones de segundo orden son tales que contienen variables que son funciones de primer orden, pero no contienen otras variables excepto (posiblemente) individuales.

Ahora disponemos de nuevas clases de funciones. En primer lugar, tenemos funciones de segundo orden que tienen un argumento que es una función de primer orden. Representamos una función variable de esta clase mediante la notación $f ! (\hat{\phi} ! \hat{z})$, y a un valor cualquiera de tal función por $f ! (\phi ! \hat{z})$. Al igual que $\phi ! x$, $f ! (\phi ! \hat{z})$ es una función de dos variables, a saber $f ! (\hat{\phi} ! \hat{z})$ y $\phi ! \hat{z}$. Entre los posibles valores de $f ! (\phi ! \hat{z})$ estará $\phi ! a$ (en donde a es una constante), $(x) . \phi ! x$, $(\exists x) . \phi ! x$, y así sucesivamente. (Estos resultan de asignar un valor a f, permitiendo que ϕ sea asignado). A tales funciones llamamos "funciones predicativas de funciones de primer orden".

En segundo lugar, tenemos funciones de segundo orden de dos argumentos, uno de los cuales es una función de primer orden, mientras que el otro es un individual. Representemos los valores indeterminados de tales funciones mediante la notación

$$f ! (\phi ! \hat{z}, x).$$

En cuanto la x quede asignada, tendremos una función predicativa de $\phi ! \hat{z}$. Si nuestra función no contiene una función de primer orden como variable aparente, obtendremos una función predicativa de x si asignamos un valor a $\phi ! \hat{z}$. De este modo, para tomar el caso más simple posible, si $f ! (\phi ! \hat{z}, x)$ es $\phi ! x$, la asignación de un valor a ϕ nos da una función predicativa de x, en virtud de la definición de "$\phi ! x$". Pero si $f ! (\phi ! \hat{z}, x)$ contiene una función de primer orden como variable aparente, la asignación de un valor a $\phi ! \hat{z}$ nos da una función de x de segundo orden.

En tercer lugar, tenemos funciones de segundo orden de individuales. Todas éstas se derivarán de funciones de la forma $f ! (\phi ! \hat{z}, x)$ cambiando la ϕ por una variable aparente. Por tanto, no necesitamos una nueva notación para ellas.

Tenemos también funciones de segundo orden de dos funciones de primer orden, o de dos funciones de ese tipo y un individual; y así sucesivamente.

Podemos ahora proceder exactamente de la misma manera que antes a matrices de tercer orden, que serán funciones que contengan como argumentos funciones de segundo orden, y que no contengan variables aparentes ni argumentos excepto individuales, funciones de primer orden y funciones de segundo orden. Por eso, proseguimos, en la forma anterior, a las funciones de tercer orden; y, de este modo, podemos continuar indefinidamente. Si el más alto orden de una variable que tenga lugar en una función, sea como argumento o como variable aparente, es una función de orden n-simo, entonces la función en la cual ocurre es de orden $(n + 1)$-simo. No llevamos a cabo funciones de orden infinito, porque el número de argumentos y de variables aparentes en una función debe ser finita y, por tanto, cada función debe ser de un orden finito. Ya que los órdenes de las funciones se definen sólo paso a paso, no puede haber un proceso de "prosecución hasta límite", y no pueden darse funciones de orden infinito.

Definimos una función de una variable como *predicativa* cuando sea del orden inmediatamente superior al de su argumento, es decir, del más bajo orden compatible con él teniendo ese argumento. Si una función tiene varios argumentos, y el orden más alto de la función que tiene lugar entre los argumentos es el n-simo, diremos que es una función predicativa si es de orden $(n + 1)$-simo; es decir, en otras palabras, si es del orden más bajo compatible con él teniendo los argumentos que tiene. Una función de varios argumentos es predicativa si tiene uno de sus argumentos tal que, cuando los demás tengan valores asignados a él, obtengamos una función predicativa de un argumento indeterminado.

Es importante observar que todas las posibles funciones en la jerarquía antedicha pueden obtenerse por medio de funciones predicativas y de variables aparentes. Así, pues, como vimos, las funciones de segundo orden de una x individual son de la forma

$$(\phi) . f ! (\phi ! \hat{z}, x) \text{ o } (\exists \phi) . f ! (\phi ! \hat{z}, x) \text{ o } (\phi, \psi) . f ! (\phi ! \hat{z}, \psi ! \hat{z}, x) \text{ o etc.},$$

en donde f es una función predicativa de segundo orden. De modo general, una función no predicativa de orden n-simo se obtiene a partir de una función predicativa de orden n-simo cambiando todos los argumentos de orden $(n-1)$-simo en variables aparentes. (También pueden cambiarse en variables aparentes otros argumentos). Así, pues, no necesitamos introducir como variables otras funciones más que las predicativas. Por otra parte, para obtener alguna función de una variable x, no necesitamos ir más allá de las funciones predicativas de *dos* variables. En cuanto a la función $(\psi).f!(\phi!\hat{z}, \psi!\hat{z}, x)$, en donde se da f, es una función de $\phi!\hat{z}$ y de x, y es predicativa. Así, pues, es de la forma $F!(\phi!\hat{z}, x)$ y, por tanto, $(\phi, \psi).f!(\phi!\hat{z}, \psi!\hat{z}, x)$ es de la forma $(\phi).F!(\phi!\hat{z}, x)$. Así, pues, hablando de modo general, mediante pasos sucesivos encontramos que, si $\phi!\hat{u}$ es una función predicativa de un orden suficientemente alto, cualquier función no-predicativa asignada de x será de una de estas dos formas:

$$(\phi).F!(\phi!\hat{u}, x), (\exists\phi).F!(\phi!\hat{u}, x),$$

en donde F es una función predicativa de $\phi!\hat{u}$ y de x.

La naturaleza de la jerarquía de funciones, (de la que se ha hablado), puede ser replanteada como sigue. Una función, como vimos en una etapa anterior, presupone como parte de su significado la totalidad de sus valores, o, lo que viene a ser la misma cosa, la totalidad de sus argumentos posibles. Los argumentos de una función pueden ser funciones, proposiciones o individuales. (Recordemos que los individuales se definieron como todo lo que no es proposición ni función). De momento abandonemos el caso en el que el argumento de una función sea una proposición. Consideremos una función cuyo argumento sea un individual. Esta función presupone la totalidad de los individuales; pero, a no ser que contenga funciones como variables aparentes, no presupone ninguna totalidad de funciones. Sin embargo, si no contiene una función como variable aparente, entonces no puede definirse hasta que se haya definido alguna totalidad de funciones. Resulta que debemos definir primero la totalidad de estas funciones que tienen individuales como argumentos y no contienen funciones como variables aparentes. Estas son las funciones *predicativas* de individuales. Generalmente, una función predicativa de un argumento variable es una que no abarca la totalidad, salvo los posibles valores del argumento, y los que se presuponen por alguno de los argumentos posibles. Así, pues, una función predicativa de un argumento variable es una función que puede especificarse sin introducir nuevas clases de variables no presupuestas necesariamente por la variable que es el argumento

Un tratamiento totalmente análogo puede desarrollarse para las proposiciones. Las proposiciones que no contienen funciones ni variables aparentes pueden denominarse *proposiciones elementales.* Las proposiciones que no son elementales, y que no contienen funciones ni variables aparentes excepto individuales, pueden llamarse *proposiciones de primer orden.* (Debe observarse que en una proposición no pueden darse variables salvo las variables *aparentes,* ya que todo lo que contenga una variable *real* es una función, y no una proposición). De este modo, las proposiciones

elementales y de primer orden serán valores de funciones de primer orden. (Debe recordarse que una función no es un constituyente de uno de sus valores; así, por ejemplo, la función "$\hat{x}$ es una persona humana" no es un constituyente de la proposición "Sócrates es una persona humana"). Las proposiciones elementales y las de primer orden no presuponen la totalidad excepto (a lo sumo) la totalidad de individuales. Ellas pertenecen a una de estas tres formas

$$\phi ! x; \ (x) . \phi ! x; \ (\exists x) . \phi ! x,$$

en donde $\phi ! x$ es una función predicativa de un individual. Resulta que, si p representa una proposición elemental variable o una proposición de primer orden variable, una función fp es o bien $F(\phi ! x)$, o $f\{(x) . \phi ! x\}$, o $f\{(\exists x) . \phi ! x\}$. Así, pues, una función de una proposición elemental o de primer orden siempre puede reducirse a una función de primer orden. Resulta que una proposición que abarque la totalidad de las proposiciones de primer orden puede reducirse a una que abarque la totalidad de las funciones de primer orden; y esto, como es obvio, se aplica igualmente a órdenes superiores. La jerarquía proposicional puede, por tanto, derivarse de la jerarquía funcional, y podemos definir una proposición de orden n-simo como una que abarca una variable aparente de orden $(n-1)$-simo en una jerarquía funcional. La jerarquía proposicional nunca se requiere en la práctica y sólo tiene interés para la solución de paradojas; por tanto, no es necesario entrar en más detalles en cuanto a los tipos de proposiciones.

VI. El axioma de la Reducibilidad.

Resta por considerar el "axioma de la reducibilidad". Se verá que, de acuerdo con la jerarquía expuesta anteriormente, no puede hacerse una exposición significativa acerca de "todas las funciones-a", en donde a sea un objeto dado. Así, pues, una noción tal como "todas las propiedades de a", significando "todas las funciones que son verdaderas con el argumento a", será ilegítima. Tendremos que distinguir el orden de la función que se considere. Podemos hablar de "todas las propiedades predicativas de a", "todas las propiedades de segundo orden de a", y así sucesivamente. (Si a no es un individual, sino un objeto de orden n, "las propiedades de segundo orden de a" significa "funciones de orden $n+2$ satisfechas por a"). Pero no podemos hablar de "todas las propiedades de a". En algunos casos, podemos ver que alguna expresión será verdadera para "todas las propiedades de orden-n de a", para cualquier valor de n. En tales casos, no se deriva un daño práctico por considerar la expresión como algo relativo a "todas las propiedades de a", con tal que recordemos que es realmente un número de expresiones y no una expresión única de la que pueda considerarse que asigna otra propiedad a a, además de todas las propiedades. Tales casos siempre contendrán alguna ambigüedad sistemática, tal como la que se encuentra en el significado de la palabra "verdad", como se explicó con anterioridad. Debido a esta ambigüedad sistemática, será posible, algunas veces,

juntar en un único enunciado verbal lo que realmente son un número de enunciados diferentes correspondiendo a diferentes órdenes jerárquicos. Esto es ilustra en el caso del mentiroso en donde el enunciado "todas las declaraciones de A son falsas" debe descomponerse en diferentes enunciados referidos a sus declaraciones de varios órdenes, y atribuyendo a cada una la clase apropiada de falsedad.

El axioma de la reducibilidad se introduce a fin de legitimar un gran número de razonamientos, en los cuales, prima facie, nos encontramos con nociones tales como "todas las propiedades de a", o "todas las funciones-a", y en las cuales, no obstante, apenas parece posible sospechar de algún error sustancial. A fin de exponer el axioma debemos en primer lugar definir qué se entiende por "equivalencia formal". Se dice que dos funciones, $\phi\hat{x}$ y $\psi\hat{x}$, son "formalmente equivalentes" cuando, para cada posible argumento x, ϕx es equivalente a ψx, es decir, ϕx y ψx son ambas verdaderas o ambas falsas. Así, pues, dos funciones son formalmente equivalentes cuando ambas se satisfacen con el mismo conjunto de argumentos. El axioma de la reducibilidad es la suposición de que, dada una función $\phi\hat{x}$, hay una función *predicativa* formalmente equivalente; esto es, que hay una función predicativa que es verdadera cuando ϕx es verdadera y falsa cuando ϕx es falsa. Simbólicamente, el axioma es:

$$\vdash : (\exists \psi) : \phi x . \equiv_x . \psi ! x.$$

En el caso de dos variables, requeriremos un axioma similar, a saber: dada una función $\phi(\hat{x}, \hat{y})$, hay una función *predicativa* formalmente equivalente, esto es

$$\vdash : (\exists \psi) : \phi(x, y) . \equiv_{x,y} . \psi ! (x, y).$$

A fin de explicar los objetivos del axioma de la reducibilidad, y la naturaleza de las razones para suponerlo verdadero, lo aclararemos primero aplicándolo a algunos casos particulares.

Si llamamos *predicado* de un objeto a una función predicativa que es una verdad de tal objeto, entonces los predicados de un objeto son sólo alguna de sus propiedades. Tomemos, como ejemplo, una proposición tal como "Napoleón tuvo todas las cualidades que hacen un gran general". Podemos interpretar esto dándole el significado "Napoleón tuvo todos los predicados que hacen un gran general". Aquí hay un predicado que es una variable aparente. Si ponemos "$f(\phi ! \hat{z})$" en lugar de "$\phi ! \hat{z}$ es un predicado que se exige en un gran general", nuestra proposición es

$$\phi : f(\phi ! \hat{z}) \text{ implica } \phi ! (\text{Napoleón})$$

Ya que esto se refiere a una totalidad de predicados, él mismo no es un predicado de Napoleón. De ninguna manera se sigue, sin embargo, que no haya algún predicado común y peculiar en los grandes generales. De hecho, es cierto que hay un predicado tal, puesto que el número de grandes generales es finito, y cada uno de ellos ciertamente poseyó algún predicado no poseido por ningún otro ser humano —por ejemplo, el instante exacto de su nacimiento. La disyunción de tales predica-

dos constituirá un predicado común y peculiar a los grandes generales (31). Si a este predicado le llamamos $\psi\,!\,\hat{z}$, el enunciado que hicimos acerca de Napoleón era equivalente a $\psi\,!$ (Napoleón). Y esta equivalencia se mantiene igualmente si sustituimos Napoleón por cualquier otro gran general. De este modo hemos llegado a un predicado que es siempre equivalente a la propiedad que hemos atribuido a Napoleón, esto es, lo que pertenece a aquellos objetos que tienen esta propiedad y no a otros. El axioma de la reducibilidad establece que un predicado tal existe siempre; esto es, que cualquier propiedad de un objeto pertenece a la misma colección de los objetos que poseen algún predicado.

Podemos seguidamente aclarar nuestro principio por su aplicación a la *identidad.* En relación con esto, presenta una cierta afinidad con el principio de la identidad de los indiscernibles, de Leibniz. Está claro que, si x e y son idénticos, y ϕx es verdadero, entonces ϕy es verdadero. Aquí no puede importar qué clase de función sea $\phi\hat{x}$: el enunciado debe tener validez para *cualquier* función. Pero, a la inversa, no podemos decir: "Si, para todos los valores de ϕ, ϕx implica ϕy, entonces x e y son idénticos", porque es inadmisible el "todos los valores de ϕ". Si deseamos hablar de "todos los valores de ϕ", debemos limitarnos a las funciones de un determinado orden . Podemos limitar ϕ a predicados, o a funciones de segundo orden, o a las funciones de cualquier orden que deseemos. Pero debemos eliminar necesariamente todas las funciones salvo las de un cierto orden. De este modo, obtendremos, por así decir, una jerarquía de diferentes grados de identidad. Podemos decir "todos los predicados de x pertenecen a y", "todas las propiedades de segundo orden de x pertenecen a y", y así sucesivamente. Cada uno de estos enunciados implica a todos sus predecesores: por ejemplo, si todas las propiedades de segundo orden de x pertenecen a y, entonces todos los predicados de x pertenecen a y, pues tener todos los predicados de x es una propiedad de segundo orden y esta propiedad pertenece a x. Pero no podemos, sin la ayuda de un axioma, argüir inversamente que, si todos los predicados de x pertenecen a y, todas las propiedades de segundo orden de x deben también pertenecer a y. Así, pues, no podemos, sin la ayuda de un axioma, estar seguros de que x e y sean idénticos, aunque tengan las mismas propiedades. La identidad de los indiscernibles, de Leibniz, proporcionó este axioma. Debe tenerse en cuenta que por "indiscernibles" él no pudo dar a entender dos objetos que concuerdan en lo que se refiere a *todas* sus propiedades, ya que una de las propiedades de x es ser idéntico a x; y, por tanto, esta propiedad necesariamente debería pertenecer a y, si x e y coincidiesen en *todas* sus propiedades. Alguna limitación de las propiedades comunes necesaria para hacer indiscernibles las cosas está, por lo tanto, implicada por la necesidad de un axioma. Para efectos de aclaración (no de interpretación de Leibniz) podemos suponer que las propiedades comunes requeridas para la indiscernibilidad se limitan a predicados. Entonces, la identidad de los indiscernibles establece que si x e y concuerdan en lo que respecta

(31) Cuando un conjunto (finito) de predicados se da para una enumeración real, su disyunción es un predicado, porque en la disyunción no tiene lugar un predicado como variable aparente.

a sus predicados, son idénticos. Esto puede probarse si damos por supuesto el axioma de la reducibilidad. Pues, en este caso, cada una de las propiedades pertenece a la misma colección de objetos, tal como se definió para cualquier predicado. Por tanto, existe algún predicado común y peculiar en los objetos que son idénticos a x. Este predicado pertenece a x, ya que x es idéntico consigo mismo; por lo tanto pertenece a y, puesto que y tiene todos los predicados de x; luego, y es idéntico a x. De aquí se sigue que podemos *definir* a x y a y como idénticos cuando todos los predicados de x pertenezcan a y; esto es, cuando $(\phi) : \phi ! x . \supset . \phi ! y$. Por lo tanto, adoptamos la siguiente definición para la identidad (32):

$$x = y . =: (\phi) : \phi ! x . \supset . \phi ! y \quad \text{Df.}$$

Pero, dejando aparte el axioma de la reducibilidad o algún otro axioma equivalente, nos vemos obligados a considerar la identidad como indefinible y a admitir (lo que parece imposible) que dos objetos pueden concordar en todos sus predicados sin ser idénticos.

El axioma de la reducibilidad es aún más esencial en la teoría de clases. Deberá observarse, en primer lugar, que, si suponemos la existencia de las clases, el axioma de la reducibilidad puede probarse. Pues en este caso, dada una función $\phi\hat{z}$ de cualquier orden, existe una clase α que se compone exactamente de los objetos que satisfacen a $\phi\hat{z}$. Por tanto, "ϕx" es equivalente a "x pertenece a α". Pero "x pertenece a α" es una expresión que no contiene variable aparente y es, por lo tanto, una función predicativa de x. De aquí que, si suponemos la existencia de las clases, el axioma de la reducibilidad se hace innecesaria. La suposición del axioma de la reducibilidad es, por tanto, una suposición menor que la suposición de que existen las clases. Hasta aquí esta última suposición se ha hecho sin vacilación alguna. Sin embargo, a causa de las contradicciones, (que requieren un tratamiento más complicado en el caso de que se supongan las clases), y debido también a que es siempre preferible hacer la más pequeña suposición requerida para probar nuestros teoremas, preferimos mejor suponer el axioma de la reducibilidad que la existencia de las clases. Pero, a fin de explicar el uso del axioma en relación con las clases, es necesario explicar primero la teoría de clases, lo que es una cuestión que pertenece al Capítulo III. Por tanto, dejamos para ese capítulo la explicación del uso de nuestro axioma en relación con las clases.

Merece la pena observar que todos los objetivos para los que sirve el axioma de la reducibilidad se cumplen igualmente si suponemos que siempre existe una función de orden n (en donde n es fijo) que sea formalmente equivalente a $\phi\hat{x}$, cualquiera que sea el orden de $\phi\hat{x}$. Aquí entenderemos por "función de orden n" a una función de orden n relativa a los argumentos de $\phi\hat{x}$; de este modo, si estos argumentos son absolutamente de orden m, suponemos la existencia de una función formalmente

(32) Obsérvese que en esta definición el segundo signo de igualdad se considera combinado con "Df" para formar un solo símbolo; lo que se define es el signo de igualdad *no* seguido por las letras "Df".

equivalente a $\phi\hat{x}$ cuyo orden absoluto sea $m + n$. El axioma de la reducibilidad en la forma supuesta antes toma el valor $n = 1$, aunque esto no es necesario para el empleo del axioma. Tampoco es necesario que n deba ser el mismo para los distintos valores de m; lo que es necesario es que n sea constante en tanto que m sea constante. Lo que se precisa es que, en donde intervengan funciones de funciones extensionales, seamos capaces de tratar de cualquier función a por medio de alguna función formalmente equivalente de un tipo dado, de manera que sea capaz de obtener resultados que de otra guisa requerirían la noción ilegítima de "todas las funciones-a"; pero no importa cual sea el tipo dado. Sin embargo, no parece que el axioma de la reducibilidad sea apreciablemente considerada como más aceptable por ponerse en la forma más general, aunque más complicada, como se ha puesto arriba.

El axioma de la reducibilidad es equivalente a la suposición de que "cualquier combinación o disyunción de predicados (33) es equivalente a un predicado único"; es decir, a la suposición de que, si aseveramos que x tiene todos los predicados que satisfacen a una función $f(\phi\,!\,\hat{z})$, existe algún predicado que tendrá x, siempre que nuestra aserción sea verdadera, y que no tendrá cuando sea falsa; y, similarmente, si aseveramos que x tiene alguno de los predicados que satisfacen a una función $f(\phi\,!\,\hat{z})$. Mediante esta suposición, el orden de una función no-predicativa puede disminuirse en un grado; por tanto, después de un cierto número finito de pasos, seremos capaces de conseguir desde una función no-predicativa una función predicativa formalmente equivalente. No parece probable que el supuesto anterior pueda sustituirse por el axioma de la reducibilidad en deducciones simbólicas, puesto que su uso requeriría la introducción explícita del posterior supuesto de que mediante un número finito de pasos descendentes podemos pasar de una función cualquiera a una función predicativa, y esta suposición no podría hacerse bien sin los desarrollos que apenas son posibles en una etapa inicial. Pero en las cuestiones anteriores parece claro que, de hecho, si el axioma alternativo de arriba es verdadero, también lo es el axioma de la reducibilidad. La conversa, que completa la prueba de la equivalencia, es, desde luego, evidente.

VII. Razones para la aceptación del Axioma de la Reducibilidad.

Que el axioma de la reducibilidad sea autoevidente es una proposición que difícilmente puede sostenerse. Pero, de hecho, la autoevidencia nunca es más que una parte de la razón para aceptar un axioma, y nunca es indispensable. La razón para aceptar un axioma, como para aceptar cualquier otra proposición, es siempre en gran parte inductiva; es decir, que muchas proposiciones que son casi indubitables pueden deducirse a partir de él, y que no se conoce otro camino igualmente

(33) Aquí se supone que la combinación o disyunción se dan intensionalmente. Si se diese extensionalmente (es decir, por enumeración), no sería necesaria la suposición; pero en este caso el número de predicados que intervienen debe ser finito.

aceptable por el cual estas proposiciones pudieran ser verdaderas si el axioma fuera falso, y que nada que sea probablemente falso pueda deducirse de él. Si el axioma es, en apariencia, autoevidente, eso, en la práctica, significa nada más que es casi indubitable; porque cosas que se han creido que eran autoevidentes, han resultado, sin embargo, ser falsas. Aunque el axioma mismo sea casi indubitable, apenas añade algo a la evidencia inductiva derivada del hecho de que sus consecuencias son casi indubitables; ello no ofrece una evidencia nueva de una clase radicalmente diferente. La infalibilidad nunca es asequible y, por lo tanto, siempre algún elemento de duda vendrá asociado a cada axioma y a todas sus consecuencias. En lógica formal, el elemento de duda es menor que en la mayor parte de las ciencias, pero no carece de él, como lo manifiesta el hecho de que las paradojas resultan de premisas de las que no se sabía de antemano que necesitasen limitaciones. En el caso del axioma de la reducibilidad, la evidencia inductiva en su favor es muy fuerte, ya que los razonamientos que permite y los resultados a los que lleva son todos de tal índole que aparecen como válidos. Pero, aunque parece muy improbable que el axioma pudiera pasar a ser falso, en modo alguno es improbable que debería fundamentarse haciéndolo deducible de algún otro axioma más fundamental y más evidente. Es posible que el uso del principio del círculo vicioso, en cuanto incorporado a la anterior jerarquía de tipos, es más enérgico de lo que necesita ser, y que con un uso menos severo pudo evitarse la necesidad del axioma. Sin embargo, tales cambios no deben hacer falso nada que haya sido aseverado basándose en los principios explicados con anterioridad: ellos simplemente deben ofrecer unas pruebas más sencillas de los mismos teoremas. En consecuencia, parecería no ser sino el más sutil motivo para temer que el empleo del axioma de la reducibilidad pueda conducirnos a error.

VIII. Las Contradicciones

Ahora nos encontramos en disposición de mostrar cómo la teoría de tipos afecta a la solución de las contradicciones contra las que ha luchado la lógica matemática. Con este objeto, comenzaremos por una enumeración de algunas de las más importantes y aclaratorias de estas contradicciones y, a continuación, mostraremos cómo todas ellas entrañan falacias de círculo vicioso y que, por tanto, son todas evitables por medio de la teoría de tipos. Se observará que estas paradojas no se refieren exclusivamente a las ideas del número y de la cantidad. En consecuencia, ninguna solución puede ser adecuada para intentar explicarlas sólo como si fueran el resultado de algún uso incorrecto de estas ideas. La solución debe intentarse mediante su cuidadoso examen de las ideas lógicas fundamentales, tal como se ha pretendido hacer en las páginas precedentes.

1) La contradicción más antigua de la clase bajo consideración es la de *Epiménides*. Epiménides, el cretense, dijo que todos los cretenses eran mentirosos, y que todas las declaraciones hechas por los cretenses eran ciertamente mentiras. ¿Era esto

una mentira? La versión más sencilla de esta contradicción está planteada por el hombre que dice: "Yo estoy mintiendo"; si está mintiendo, está diciendo la verdad, y viceversa.

2) Sea *w* la clase de todas las clases que no son miembros de sí mismas. En este caso, para cualquiera que sea la clase *x*, "*x* es una *w*" es equivalente a "*x* no es una *x*". Por lo tanto, dando a *x* el valor *w*, "*w* es una *w*" es equivalente a "*w* no es una *w*".

3) Sea *T* la relación que subsiste entre dos relaciones *R* y *S*, siempre que *R* no guarde la relación *R* respecto de *S*. Entonces, cualesquiera que sean las relaciones *R* y *S*, "*R* tiene la relación *T* con *S*" es equivalente a "*R* no tiene la relación *R* con *S*". Por tanto, dando el valor *T* tanto a *R* como a *S*, "*T* tiene la relación *T* con *T*" es equivalente a "*T* no tiene la relación *T* con *T*".

4) La contradicción de Burali-Forti (34) puede exponerse de la siguiente manera: Puede mostrarse que a toda serie bien ordenada corresponde un número ordinal tal que la serie de ordinales ascendente –incluyendo al ordinal dado– excede a éste en una unidad, y (apoyándose en ciertos supuestos muy naturales) que la serie de todos los ordinales (en orden de magnitud) está bien ordenada. Resulta que a la serie de todos los ordinales corresponde un número ordinal, digamos Ω. Pero, en este caso, a la serie de todos los ordinales, incluyendo a Ω, corresponde el número ordinal $\Omega + 1$, que habrá de ser mayor que Ω. Por tanto, Ω no es el número ordinal de todos los ordinales.

5) El número de sílabas de los nombres ingleses de los números finitos enteros tiende a aumentar conforme los enteros se hacen mayores, y deben, de forma gradual, incrementarse indefinidamente, ya que sólo un número finito de nombres pueden formarse con un número finito dado de sílabas. Por lo tanto, los nombres de algunos enteros deben constar por los menos de diecinueve sílabas, y de entre estos debe haber un número que sea el menor. Por tanto, "el menor número entero no nombrable con menos de diecinueve sílabas" debe estar designado por un número entero definido; de hecho, este número es el 111,777. Pero "el menor número entero no nombrable con menos de diecinueve sílabas" es en sí mismo un nombre que contiene dieciocho sílabas (35); por lo tanto, el menor entero no expresable con menos de diecinueve sílabas puede decirse con dieciocho sílabas, lo cual es una contradicción" (36).

6) Algunos de entre los ordinales transfinitos pueden definirse, mientras que

---

(34) "Una questione sui numeri transfiniti", *Rendiconti del circolo matematico di Palermo*, Vol. XI. (1897). Véase *256.

(35) Evidentemente el ejemplo sólo es válido en inglés. La frase entrecomillada en el texto inglés es la siguiente: "the least integer not nameable in fewer than nineteen syllables". (N del t).

(36) Esta contradicción nos fue sugerida por Mr. G. G. Berri de la Bodleian Library.

otros no pueden serlo; pues el número total de definiciones posibles es $\aleph_0$ (37), mientras que el número de los ordinales transfinitos excede a $\aleph_0$. Por lo tanto, debe haber ordinales indefinibles, y entre estos debe estar el de número menor. Mas, éste se define como "el menor ordinal indefinible", lo cual constituye una contradicción (38).

7) La paradoja de Richard (39) está emparentada con ésta del último ordinal indefinible. Se plantea de este modo: consideremos todos los números decimales que pueden definirse por medio de un número finito de palabras; sea E la clase de tales decimales. Entonces E tiene $\aleph_0$ términos; por tanto, sus miembros pueden ser ordenados como el 1°, 2°, 3°... Sea N un número definido como sigue: si la cifra n-sima del decimal n-simo es p, hagamos que la cifra n-sima de N sea $p + 1$ (o 0, si $p = 9$). En ese caso, N es diferente de todos los miembros de E ya que, para cualquier valor finito de n, la cifra n-sima de N será diferente de la cifra n-sima del n-simo de los decimales que componen E y, por tanto, N es diferente del decimal n-simo. Sin embargo, hemos definido a N por medio de un número finito de palabras y, en consecuencia, N debe ser un miembro de E. De este modo resulta que N es y no es al propio tiempo miembro de E.

En todas las contradicciones expuestas (que no son más que una selección de entre un número indefinido), se presenta una característica común que podríamos describir como la autorreferencia o reflexividad. La observación de Epiménides debe incluirse a sí misma en su propio alcance. Si *todas* las clases, con tal que no sean miembros de sí mismas, son miembros de w, esto debe también aplicarse a w; y, similarmente, por lo que se refiere a la contradicción análoga de las relaciones. En los casos de nombres y definiciones, las paradojas resultan de considerar a la no-expresabilidad y a la indefinibilidad como elementos de los nombres y definiciones. En el caso de la paradoja de Burali-Forti, la serie cuyo número ordinal provoca la dificultad es la serie de todos los números ordinales. En cada una de las contradicciones se dice algo acerca de *todos* los casos de alguna clase, y de lo que se dice parece que se genera un nuevo caso, que es y no es a la vez de la misma clase que los casos comprendidos, *todos* ellos, en lo que se dijo.

Pero esta es la característica de las totalidades ilegítimas, tal como las hemos definido al exponer el principio del círculo vicioso. Por consiguiente, todas nuestras

(37) $\aleph_0$ es el número de enteros finitos. Véase *123.

(38) Cf. König, "Ueber die Grundlagen der Mengenlehere und das Kontinumproblem", "Math. Annalen, Vol. LXI (1905); A. C. Dixon, "On Wellordered aggrehates", Proc. London Math. Soc. Series 2, Vol. IV. Part I. (1906); y E. W. Hobson, "On the Arithmetic Continuum", ibid. La solución ofrecida en la última de las obras citadas depende de la variación del "aparato de definición", y está, así, dentro del esquema en concordancia con la solución adoptada aquí. Sin embargo esto no invalida lo expresado en el texto, si a "definición" se le da una significación constante.

(39) Cf. Poincaré, "Les mathématiques et la logique", *Revue de Métaphysique et de Morale,* Mai 1906, especialmente las secciones VII y IX; también Peano, *Revista de Mathematica.* Vol. VIII. N.° 5 (1906), pág. 149 y ss.

contradicciones son ejemplos de falacias del círculo vicioso. Sólo queda por ver, por tanto, que las totalidades ilegítimas en cuestión están excluidas por la jerarquía de tipos que hemos construido.

1) Cuando un hombre diga "estoy mintiendo", podemos interpretar este enunciado como: "Hay una proposición que yo estoy afirmando y que es falsa". Es decir, él está afirmando la verdad de un valor de la función "yo afirmo p, y p es falsa". Pero vimos que la palabra "falso" es ambigua y que, a fin de conseguir que no lo sea, debemos especificar el orden de la falsedad o, lo que viene a ser lo mismo, el orden de la proposición a la que se le atribuyó la falsedad. También vimos que, si p es una proposición de orden n-simo, una proposición en la que intervenga p como variable aparente no es de orden n-simo, sino de un orden más alto. Por lo tanto, la clase de verdad o falsedad que pueda pertenecer al enunciado "hay una proposición p que yo estoy afirmando y la cual tiene una falsedad de orden n-simo" tiene una verdad o falsedad de un orden superior al n-simo. Por tanto, el enunciado de Epiménides no cae dentro de su propio alcance y, por consiguiente, no surge contradicción.

Si consideramos el enunciado "estoy mintiendo" como una forma condensada de ofrecer simultáneamente todos estos enunciados: "yo estoy afirmando una proposición falsa de primer orden", "yo estoy afirmando una proposición falsa de segundo orden", y así sucesivamente, nos encontramos con el siguiente estado curioso de cosas: como no se está afirmando una proposición de primer orden "yo estoy afirmando una proposición falsa de primer orden" es falsa. Este enunciado es de orden segundo, luego el enunciado "yo estoy haciendo una declaración falsa de segundo orden" es verdadero. Este es un enunciado de tercer orden, y es el único enunciado de tercer orden que se ha hecho. Por lo tanto, el enunciado "yo estoy haciendo un enunciado falso de tercer orden" es falso. Así, pues, vemos que el enunciado "yo estoy haciendo un enunciado falso de orden $2n + 1$" es falso, mientras que el enunciado "yo estoy haciendo un enunciado falso de orden $2n$" es verdadero. En este estado de cosas no existe contradicción.

2) A fin de resolver la contradicción acerca de la clase de clases que no sean miembros de sí mismos, supondremos –lo cual se explicará en el siguiente capítulo– que una proposición acerca de una clase debe siempre reducirse a un enunciado acerca de una función que defina la clase; esto es, sobre una función que quede satisfecha por los miembros de la clase y no por otros argumentos. Así, pues, una clase es un objeto derivado de una función y presuponiendo la función exactamente como, por ejemplo, $(x) \cdot \phi x$ presupone a la función $\phi\hat{x}$. Por lo tanto, una clase no puede, en virtud del principio del círculo vicioso, ser el argumento –con significación– de su función de definición; es decir, que si representamos por "$\hat{z}\,(\phi z)$" a la clase definida por $\phi\hat{z}$, el símbolo "$\phi\{\hat{z}\,(\phi z)\}$" debe carecer de sentido. Por eso, una clase ni satisface ni no satisface a su función de definición y, por lo tanto, (como se verá de un modo más completo en el Capítulo III), ni es un miembro de sí mismo ni no es un miembro de sí mismo. Esta es una consecuencia inmediata de la limitación a los posibles argumentos de una función que fue explicada al principio

de este capítulo. Así, pues, si α es una clase, el enunciado "α no es un miembro de α" es siempre un sin-sentido y, por lo tanto, carece de sentido en la frase "la clase de aquellas clases que no son miembros de sí mismas". De este modo, desaparece la contradicción que resulta de suponer que existe una clase de esa peculiaridad.

3) Observaciones semejantes se aplican a "la relación que se cumple entre R y S, siempre que R no tenga la relación R con S". Supongamos que la relación R se define por una función $\phi(x, y)$; esto es, que R es válido entre x e y, siempre que $\phi(x, y)$ sea verdadero, pero no en otro caso. Entonces, a fin de interpretar "R tiene la relación R con S", tendremos que suponer que R y S pueden, significativamente, ser los argumentos de ϕ. Pero (suponiendo, como se verá en el Capítulo III, que R presupone su función de definición) esto requeriría que ϕ fuese capaz de tomar como argumento un objeto que se defina en términos de ϕ, y esto no puede dar una función, como vimos al principio de este capítulo. Por consiguiente, "R tiene la relación R con S" es un sin-sentido, y la contradicción desaparece.

4) La relación de la contradicción de Burali-Forti requiere un desarrollo posterior para su solución. En esta etapa, debe ser suficiente observar que una serie es una relación y que un número ordinal es una clase de series. (Estos enunciados se justifican a lo largo del libro). Por tanto, una serie de números ordinales es una relación entre clases de relaciones, y es de un tipo superior al de cualquier serie que sea miembro de los números ordinales en cuestión. El "número ordinal de todos los ordinales", de Burali-Forti, debe ser el número ordinal de todos los ordinales de un tipo dado y, por lo tanto, debe ser un tipo superior al de cualquiera de estos ordinales. Por ende, no es ninguno de estos ordinales, y no existe contradicción en que sea mayor que cualquiera de ellos (40).

5) La paradoja acerca de "el menor entero no nombrable con menos de diecinueve sílabas" incorpora, como es obvio, una falacia de círculo vicioso. Por lo que respecta a la palabra "nombrable", hace referencia a la totalidad de los nombres y, sin embargo, se le puede admitir que se presente manifestando ser uno entre nombres. Por consiguiente, no puede haber algo que sea una totalidad de nombres, en el sentido en el que la paradoja habla de "nombres". Es fácil ver que, en virtud de la jerarquía de funciones, la teoría de tipos ofrece una totalidad de "nombres" imposible. Podemos, de hecho, distinguir nombres de diferentes órdenes de la manera siguiente: (*a*) Nombres elementales, que serán verdaderos del mismo modo que lo son los "nombres propios"; esto es, apelativos convencionales que no entrañan ninguna descripción. (*b*) Nombres de primer orden, que son los que contienen una descripción por medio de una función de primer orden; es decir, si $\phi!x$ es una función de primer orden, "el término que satisface a $\phi!x$" será un nombre de primer orden, aunque no siempre exista un objeto denominado por este nombre. (*c*) Nombres de segundo orden, que son aquellos que abarcan una descripción por medio de una función de segundo orden; entre tales nombres se encuen-

(40) La solución de la paradoja de Burali-Forti por medio de la teoría de tipos se ofrece con detalle en *256.

tran aquellos que contienen una referencia a la totalidad de los nombres de primer orden. Con lo cual podemos proceder a través de una jerarquía total. Pero en esta etapa no podemos dar un significado a la palabra "nombrable" a no ser que especifiquemos el orden los nombres a emplear; y cualquier nombre en el que intervenga la frase "nombrable por nombres de orden n" es necesariamente de un orden superior al n-simo. Así, pues, la paradoja desaparece.

Las soluciones de la paradoja sobre el menor ordinal indefinible y de la paradoja de Richard son muy parecidas a la precedente. La noción de "definible", que se presenta en ambas, es aproximadamente la misma que la de "nombrable" que aparece en nuestra quinta paradoja: "definible" representa lo que "nombrable" viene a ser cuando se excluyen los nombres elementales; esto es, "definible" significa "nombrable por un nombre que no es elemental". Pero aquí, por lo que respecta al tipo, hay la misma ambigüedad que había antes, así como la misma necesidad en cuanto a la adición de palabras que especifiquen el tipo al cual deben pertenecer la definición. Y aún cuando pueda especificarse el tipo, "el menor ordinal no definible por las definiciones de este tipo" es una definición de un tipo superior; y en la paradoja de Richard, cuando nos ceñimos, como debemos, a decimales que tengan una definición de un tipo dado, el número N, que causa la paradoja, se encuentra que tiene una definición que pertenece a un tipo superior y que, de este modo, no entra dentro del alcance de nuestras definiciones previas.

Fácilmente puede construirse un número indefinido de otras contradicciones de naturaleza semejante a las de las siete expuestas. En todas ellas, la solución es del mismo tipo. En todas ellas, la apariencia de contradicción se debe a la presencia de alguna palabra que tiene ambigüedad sistemática de tipo, tales como *verdad, falsedad, función, propiedad, clase, relación, cardinal, ordinal, nombre, definición.* Cualquiera de estas palabras, si se pasa por alto su típica ambigüedad, en apariencia generaría una totalidad que contiene miembros definidos en términos de sí mismo, y, así, daría origen a falacias de círculo vicioso. En la mayoría de los casos, las conclusiones de los argumentos que incluyen falacias de círculo vicioso no serán autocontradictorias; pero dondequiera que tengamos una totalidad ilegítima, una pequeña ingenuidad nos capacitará para construir una falacia de círculo vicioso, llevando a una contradicción que desaparece tan pronto como las palabras típicamente ambiguas se vuelven típicamente definidas; esto es, se determinan como pertenecientes a éste o aquel tipo.

Así, pues, la apariencia de contradicción siempre se debe a la presencia de palabras que incorporan una ambigüedad típica que está encubierta; asimismo, la solución de la contradicción que aparece estriba en descubrir la ambigüedad oculta.

A pesar de las contradicciones que resultan de ambigüedades típicas que pasan desapercibidas, no es deseable rehuir de las palabras y símbolos que tengan una ambigüedad típica. Tales palabras y símbolos abarcan prácticamente todas las ideas por las que se interesa la matemática y la lógica matemática: la ambigüedad sistemática es el resultado de una analogía sistemática. Es decir, en casi todos los

razonamientos que constituyen a la matemática y a la lógica matemática, estamos utilizando ideas que pueden admitir una cualquiera de entre un número infinito de diferentes determinaciones típicas, una de las que permitan el razonamiento válido. Así, pues, por medio del empleo de palabras y símbolos típicamente ambiguos, somos capaces de realizar una cadena de razonamientos aplicable a un caso cualquiera entre infinitos, lo cual no hubiese sido posible si hubiésemos rechazado el uso de las palabras y símbolos típicamente ambiguos.

Entre las proposiciones expresadas en la práctica de una manera total en términos de nociones típicamente ambiguas, las únicas que pueden diferir, con respecto a la verdad o falsedad, de acuerdo a la determinación típica que recibieron están los teoremas de existencia. Si suponemos que el número total de individuales es n, entonces el número total de clases de individuales es 2^n, el número total de clases de clases de individuales es 2^{2^n}, y así sucesivamente. Aquí, n puede ser finito o infinito, y, en cualquier caso, $2^n > n$. Así, pues, números cardinales mayores que n pero no mayores que 2^n existen en cuanto que aplicados a clases de clases, pero no como aplicados a clases de individuales, de tal manera que, cualquiera que sea el número de individuales que supongamos, habrá teoremas de existencia que son válidos para tipos superiores pero no para los inferiores. Hasta aquí, sin embargo, en tanto que no se asevera el número de individuales, sino que sólo se asume hipotéticamente, podemos sustituir el tipo de los individuales por cualquier otro tipo, con tal que hagamos el correspondiente cambio en los demás tipos que intervienen en el mismo contexto. Esto es, podemos dar el nombre de "individuales relativos" a los miembros de un tipo τ elegido arbitrariamente, y el nombre de "clases relativas de individuales" a las clases de "individuales relativos", y así sucesivamente. Así, pues, en tanto que sólo competen las hipotéticas, en las que los teoremas de existencia para un tipo se ve que están implicados por teoremas de existencia para otro tipo, sólo los tipos *relativos* son relevantes aún en los teoremas de existencia. Esto se aplica también a los casos en los que la hipótesis (y, por lo tanto, la conclusión) está *aseverada,* supuesto que la aseveración vale para cualquier tipo que se elija. Por ejemplo, cualquier tipo tiene por lo menos un miembro; luego, un tipo que consista en clases, de cualquier orden, tiene por lo menos dos miembros. Pero el interés adicional por estas cuestiones debe quedar al margen del contenido de este trabajo.

CAPITULO III

SIMBOLOS INCOMPLETOS

1) *Descripciones.* Por símbolo "incompleto" entendemos un símbolo del que se supone que no tiene ningún significado aisladamente, sino que sólo se define en ciertos contextos. En la matemática ordinaria, por ejemplo, $\frac{d}{dx}$ y $\int_a^b$ son símbolos incompletos: con anterioridad debe facilitarse algo para que nos resulten significantes. Tales símbolos pueden denominarse "definición de uso". Así, si ponemos

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{Df},$$

definimos el *uso* de ∇^2, aunque ∇^2 por sí misma permanece sin significado. Esto distingue a tales símbolos de los que (en un sentido generalizado) podemos llamar *nombres propios*; "Sócrates", por ejemplo, significa una cierta persona, y por tanto tiene un significado por sí mismo sin necesidad de un contexto. Si proporcionamos un contexto, tal como "Sócrates es mortal", estas palabras expresan un hecho del cual el propio Sócrates es un constituyente: existe un cierto objeto, llamado Sócrates, que tiene la propiedad de la mortalidad, y este objeto es un constituyente del hecho complejo que aseveramos cuando decimos "Sócrates es mortal". Pero, en otros casos, este análisis simple no nos sirve. Supóngase que decimos: "el cuadrado redondo no existe". Parece claro que ésta es una proposición verdadera, aunque no podemos entenderla como la negación de la existencia de un cierto objeto llamado "el cuadrado redondo". Si hubiese un objeto tal, existiría: no podemos suponer primero que hay un objeto cierto y entonces proceder a negar que haya tal objeto. Siempre que el sujeto gramatical de una proposición no pueda suponerse que exista sin convertir la proposición en un sin-sentido está claro que el sujeto gramatical no es un nombre en sentido propio; es decir, no es un nombre que represente directamente a un objeto. Así, en todos los casos de este tipo, la proposición debe ser capaz de ser analizada de manera que lo que era sujeto gramatical debe haber desaparecido. De este modo, cuando decimos que "el cuadrado redondo no existe" podemos, como primera tentativa en tal análisis, sustituirlo por "es falso que haya un objeto x que sea, a la vez, redondo y cuadrado". Generalmente cuando se dice que "tal cosa" no existe, tenemos una proposición de la forma (41).

es decir,

$$\text{"}\sim \mathrm{E}!(\imath x)(\phi x)\text{,"}$$
$$\sim\{(\exists c) : \phi x \,.\equiv_x .\, x = c\}.$$

(41) Cf. pp. 85, 86.

a alguna equivalente. Aquí, el sujeto gramatical aparente $(\imath x)(\phi x)$ ha desaparecido completamente; así, en "$\sim$ E ! $(\imath x)(\phi x)$", $(\imath x)(\phi x)$ es un símbolo *incompleto.*

Por una extensión del argumento anterior, puede fácilmente mostrarse que $(\imath x)(\phi x)$ es *siempre* un símbolo incompleto. Tomemos, por ejemplo, la siguiente proposición: "Scott es el autor de Waverley". [Aquí "el autor de Waverley" es $(\imath x)$ (x escribió Waverley)]. Esta proposición expresa una identidad; así, pues, si "el autor de Waverley" pudo tomarse como un nombre propio y suponer que significa un objeto c, la proposición sería "Scott es c". Pero si c es cualquier cosa excepto Scott, esta proposición es falsa; mientras que si c *es* Scott, la proposición es "Scott es Scott", lo cual es trivial y claramente diferente de "Scott es el autor de Waverley". Generalizando, vemos que la proposición

$$a = (\imath x)(\phi x)$$

es algo que puede ser verdadero o falso, pero nunca es meramente trivial, como $a = a$; mientras que si $(\imath x)(\phi x)$ fuese un nombre propio, $a = (\imath x)(\phi x)$ necesariamente sería o falso o lo mismo que la proposición trivial $a = a$. Podemos expresar esto diciendo que $a = (\imath x)(\phi x)$ no es un valor de la función proposicional $a = y$, de la cual resulta que $(\imath x)(\phi x)$ no es un valor de y. Pero ya que y puede ser cualquier cosa, resulta que $(\imath x)(\phi x)$ no es nada. Por tanto, ya que tiene significado en uso, debe ser un símbolo incompleto.

Podría sugerirse que "Scott es el autor de Waverley" afirma que "Scott" y "el autor de Waverley" son dos nombres del mismo objeto. Pero una breve reflexión mostrará que esto sería un error. Pues, si ése fuera el significado de "Scott es el autor de Waverley", lo que sería necesario para su verdad sería que Scott debería haber sido *llamado* el autor de Waverley: si él también se hubiese llamado así, la proposición sería verdadera, aun cuando cualquier otro hubiese escrito Waverley; mientras que si nadie dice que sea el autor la proposición sería falsa, aun cuando él hubiese escrito el Waverley. Pero de hecho él fue el autor de Waverley en una ocasión en que nadie lo llamaba así, y él no habría sido el autor, aunque todos lo hubiesen llamado así, si otro hubiese escrito el Waverley. De este modo, la proposición "Scott es el autor de Waverley" no es una proposición acerca de nombres, como "Napoleón es Bonaparte"; y esto ilustra el sentido en el que "el autor de Waverley" difiere de un verdadero nombre propio.

Así, pues, todas las frases (salvo las proposiciones) que contengan la palabra *el* (en singular) son símbolos incompletos: tienen un significado en uso, pero no aisladamente. Pero "el autor de Waverley" no puede significar lo mismo que "Scott", o "Scott es el autor de Waverley" debe significar lo mismo que "Scott es Scott", lo que claramente se ve que no; ni puede "el autor de Waverley" significar otra cosa que "Scott", o "Scott es el autor de Waverley" sería falso. De aquí que "el autor de Waverley" no significa nada.

De lo dicho resulta que no debemos intentar definir "$(\imath x)(\phi x)$"; sino que debemos definir los *usos* de este símbolo, es decir, las proposiciones en cuya

expresión simbólica intervienen. Ahora, al tratar de definir los usos de este símbolo, es importante observar la importancia de las proposiciones en las que interviene. Tomemos como ilustración: "El autor de Waverley fue un poeta".

Esto implica (1) que Waverley fue escrito, (2) que fue escrito por un hombre y no en colaboración, (3) que el hombre que lo escribió fue un poeta. Si algunas de éstas falla, la proposición es falsa. Así, pues, "el autor de 'Slawkenburgius on Noses' fue un poeta" es falso, porque tal libro nunca fue escrito; "el autor de 'The Maid's Tragedy' fue un poeta" es falso, porque esta obra fue escrita juntamente por Beaumont y Fletcher. Estas dos posibilidades de falsedad no aparecen si decimos "Scott fue un poeta". Así, pues, nuestra interpretación de los usos de $(\imath x)\,(\phi x)$ debe ser tal como para dedicarle un tiempo a ellos. Tomando ahora ϕx para sustituir a "x escribió Waverley", es obvio que cualquier expresión clara acerca de $(\imath x)\,(\phi x)$ exige: (1) $(\exists x)\,.\,(\phi x)$ y (2) $\phi x\,.\,\phi y\,.\supset_{x,y}.\,x = y$; aquí (1) manifiesta que *por lo menos* un objeto satisface a ϕx, mientras que (2) declara que *a lo sumo* un objeto satisface a ϕx. Ambas juntas equivalen a

$$(\exists c) : \phi x\,.\equiv_x .\, x = c,$$

que definimos como $\qquad \mathrm{E}!\,(\imath x)\,(\phi x).$

Así, pues, "E ! $(\imath x)\,(\phi x)$" debe ser parte de lo que se afirma mediante una proposición acerca de $(\imath x)\,(\phi x)$. Si nuestra proposición es $f\{(\imath x)\,(\phi x)\}$, lo que se afirma además es fc, si $\phi x\,.\equiv_x .\, x = c$. Por tanto, tenemos

$$f\{(\imath x)\,(\phi x)\}\,.=:(\exists c) : \phi x\,.\equiv_x .\, x = c : fc \quad \mathrm{Df},$$

es decir, "la x que satisface a ϕx satisface a fx" significa: "Existe un objeto c tal que ϕx es verdadero cuando, y sólo cuando, x sea c, y fc sea verdadero"; o, más exactamente: "hay una c tal que 'ϕx' es siempre equivalente a 'x es c', y fc". En ésta, "$(\imath x)\,(\phi x)$" ha desaparecido completamente; por tanto, "$(\imath x)\,(\phi x)$" es meramente simbólica y no representa directamente a un objeto, como se suponen que hacen las letras latinas minúsculas (42).

Fácilmente se muestra que la proposición "$a = (\imath x)\,(\phi x)$ es equivalente a "$\phi x\,.\equiv_x .\, x = a$". Por definición es

$$(\exists c) : \phi x\,.\equiv_x .\, x = c : a = c,$$

esto es, "existe una c para la cual $\phi x\,.\equiv_x .\, x = c$, y esta c es a", lo que es equivalente a "$\phi x\,.\equiv_x .\, x = a$". Por tanto, "Scott es el autor de Waverley" es equivalente a:

" 'x escribió Waverley' es siempre equivalente a 'x es Scott' ",

es decir, "x escribió Waverley" es verdadera cuando x es Scott y falsa cuando x no sea Scott.

---

(42) En lo sucesivo, generalmente, preferimos escribir "$f\,(\imath x)\,(\phi x)$" en vez de "$f\{(\imath x)\,(\phi x)\}$".

De este modo, aunque "$(\imath x)(\phi x)$" no tiene significación por sí misma, puede sustituirse por y en cualquier función proposicional fy, obteniendo una proposición significante, aunque no un valor de fy.

Cuando $f\{(\imath x)(\phi x)\}$, tal como fue definida anteriormente, forme parte de otra proposición, diremos que $(\imath x)(\phi x)$ tiene una ocurrencia *secundaria*. Cuando $(\imath x)(\phi x)$ tiene una ocurrencia secundaria, una proposición en la cual se presente puede ser verdadera incluso cuando $(\imath x)(\phi x)$ no exista. Esto se aplica, por ejemplo, a la proposición "No existe una persona tal que sea el Rey de Francia". Podemos interpretar esto como

$$\sim\{\mathrm{E}!(\imath x)(\phi x)\},$$

o como

$$\sim\{(\exists c).c=(\imath x)(\phi x)\},$$

si "ϕx" significa "x es el rey de Francia". En otro caso lo que se afirma es que una proposición p en la cual interviene $(\imath x)(\phi x)$ es falsa, y que esta proposición p es, de este modo, parte de una proposición más grande. Lo mismo se aplica a una proposición tal como la siguiente: "Si Francia fuese una monarquía, el rey de Francia sería de la Casa de Orleans".

Debe observarse que una proposición tal como

$$\sim f\{(\imath x)(\phi x)\}$$

es ambigua; ello puede negar $f\{(\imath x)(\phi x)\}$, en cuyo caso será verdadera si $(\imath x)(\phi x)$ no existe, o puede significar

$$(\exists c):\phi x.\equiv_x.x=c:\sim fc,$$

en cuyo caso sólo puede ser verdadero si $(\imath x)(\phi x)$ existe. En el lenguaje común debería adoptarse ordinariamente la última interpretación. Por ejemplo, la proposición "el rey de Francia no es calvo" ordinariamente debería rechazarse como falsa, manteniéndose la significación "el rey de Francia existe y no es calvo". Cuando $(\imath x)(\phi x)$ existe, las dos interpretaciones de la ambigüedad dan resultados equivalentes; pero cuando $(\imath x)(\phi x)$ no existe, una interpretación es verdadera y la otra es falsa. Es necesario poder distinguirlas en nuestra notación; y generalmente si tenemos proposiciones tales como

$$\psi(\imath x)(\phi x).\supset.p,$$
$$p.\supset.\psi(\imath x)(\phi x),$$
$$\psi(\imath x)(\phi x).\supset.\chi(\imath x)(\phi x),$$

y así sucesivamente, debemos ser capaces mediante nuestra notación de distinguir si la totalidad o sólo parte de la proposición en cuestión debe ser considerada como la "$f(\imath x)(\phi x)$" de nuestra definición. Con este objeto pondremos "$[(\imath x)(\phi x)]$" seguido de puntos al comienzo de la parte (o totalidad) que sea considerada como $f(\imath x)(\phi x)$, siendo el número de los puntos suficiente para eximir de paréntesis al $f(\imath x)(\phi x)$; es decir que $f(\imath x)(\phi x)$ afecta a cuanto sigue a los puntos hasta alcanzar un número de puntos igual, no significando ni un producto lógico, ni un mayor

número en caso de significar un producto lógico, ni final de la frase, ni el final de un corchete que encierra "$[(\imath x)(\phi x)]$". Así, pues,

$$[(\imath x)(\phi x)] . \psi(\imath x)(\phi x) . \supset . p$$

significa $(\exists c) : \phi x . \equiv_x . x = c : \psi c : \supset . p,$

pero $[(\imath x)(\phi x)] : \psi(\imath x)(\phi x) . \supset . p$

significa $(\exists c) : \phi x . \equiv_x . x = c : \psi c . \supset . p.$

Es importante distinguir estas dos proposiciones, pues si $(\imath x)(\phi x)$ no existe, la primera es verdadera y la segunda falsa. De nuevo

$$[(\imath x)(\phi x)] . \sim \psi(\imath x)(\phi x)$$

significa $(\exists c) : \phi x . \equiv_x . x = c : \sim \psi c,$

mientras que $\sim \{[(\imath x)(\phi x)] . \psi(\imath x)(\phi x)\}$

significa $\sim \{(\exists c) : \phi x . \equiv_x . x = c : \psi c\}.$

Aquí de nuevo, cuando $(\imath x)(\phi x)$ no exista, la primera será falsa y la segunda verdadera.

A fin de evitar esta ambigüedad en las proposiciones que contengan $(\imath x)(\phi x)$, reformamos nuestra definición —o más bien nuestra notación— poniendo:

$$[(\imath x)(\phi x)] . f(\imath x)(\phi x) . = : (\exists c) : \phi x . \equiv_x . x = c : fc \quad \text{Df.}$$

Por medio de esta definición, evitamos cualquier duda en cuanto a la parte de la proposición aseverada en su totalidad que debe considerarse como el "$f(\imath x)(\phi x)$" de la definición. Esta parte se llamará el *alcance* de $(\imath x)(\phi x)$. Así, en

$$[(\imath x)(\phi x)] . f(\imath x)(\phi x) . \supset . p$$

el alcance de $(\imath x)(\phi x)$ es $f(\imath x)(\phi x)$; pero en

$$[(\imath x)(\phi x)] : f(\imath x)(\phi x) . \supset . p$$

el alcance es $f(\imath x)(\phi x) . \supset . p;$

en $\sim \{[(\imath x)(\phi x)] . f(\imath x)(\phi x)\}$

el alcance es $f(\imath x)(\phi x)$; pero en

$$[(\imath x)(\phi x)] . \sim f(\imath x)(\phi x)$$

el alcance es $\sim f(\imath x)(\phi x).$

Se verá que cuando $(\imath x)(\phi x)$ tiene la totalidad de la proposición abarcada por su alcance, la proposición en cuestión no puede ser verdadera salvo que E ! $(\imath x)(\phi x)$; pero cuando $(\imath x)(\phi x)$ tiene solamente una parte de la proposición abarcada por su alcance, puede con frecuencia ser verdadera aun cuando no exista $(\imath x)(\phi x)$. Además, se verá que cuando E ! $(\imath x)(\phi x)$, podemos ampliar o reducir el alcance de $(\imath x)(\phi x)$ tanto como gustemos sin que se altere el valor de verdad de la proposición en la que esto ocurra.

Si una proposición contiene dos descripciones, digamos $(\imath x)(\phi x)$ y $(\imath x)(\psi x)$,

hemos de distinguir cuál de ellas tiene mayor alcance; es decir, hemos de discernir entre

(1) $$[(\imath x)(\phi x)] : [(\imath x)(\psi x)] . f\{(\imath x)(\phi x), (\imath x)(\psi x)\},$$

(2) $$[(\imath x)(\psi x)] : [(\imath x)(\phi x)] . f\{(\imath x)(\phi x), (\imath x)(\psi x)\}.$$

La primera de éstas, eliminando $(\imath x)(\phi x)$, se convierte en

(3) $$(\exists c) : \phi x . \equiv_x . x = c : [(\imath x)(\psi x)] . f\{c, (\imath x)(\psi x)\},$$

la cual, eliminando $(\imath x)(\psi x)$, se convierte en

(4) $$(\exists c) :. \phi x . \equiv_x . x = c :. (\exists d) : \psi x . \equiv_x . x = d : f(c, d),$$

y la misma proposición resulta si, en (1) eliminamos primero $(x)(\psi x)$ y después $(\imath x)(\phi x)$. Análogamente, (2), cuando se eliminan $(\imath x)(\phi x)$ y $(\imath x)(\psi x)$, se convierte en

(5) $$(\exists d) :. \psi x . \equiv_x . x = d :. (\exists c) : \phi x . \equiv_x . x = c : f(c, d).$$

(4) y (5) son equivalentes, de forma que el valor de verdad de una proposición que contiene dos descripciones es independiente de la cuestión de cuál de ellas tiene mayor alcance.

Se encontrará que, en muchos casos en los que intervienen descripciones, su alcance es, en la práctica, la más pequeña proposición contenida entre puntos u otros corchetes en las que ellas se contienen. Así, por ejemplo

$$[(\imath x)(\phi x)] . \psi(\imath x)(\phi x) . \supset . [(\imath x)(\phi x)] . \chi(\imath x)(\phi x)$$

aparecerá mucho más frecuentemente que

$$[(\imath x)(\phi x)] : \psi(\imath x)(\phi x) . \supset . \chi(\imath x)(\phi x).$$

Por esta razón, es conveniente decidir que, cuando el alcance de una ocurrencia de $(\imath x)(\phi x)$ es la proposición más pequeña, encerrada entre puntos o corchetes, en la cual está contenida dicha ocurrencia, el alcance no necesita ser indicado por "$[(\imath x)(\phi x)]$". Así, por ejemplo

$$p . \supset . a = (\imath x)(\phi x)$$

significa $$p . \supset . [(\imath x)(\phi x)] . a = (\imath x)(\phi x);$$

y $$p . \supset . (\exists a) . a = (\imath x)(\phi x)$$

significa $$p . \supset . (\exists a) . [(\imath x)(\phi x)] . a = (\imath x)(\phi x);$$

y $$p . \supset . a \neq (\imath x)(\phi x)$$

significa $$p . \supset . [(\imath x)(\phi x)] . \sim \{a = (\imath x)(\phi x)\};$$

pero $$p . \supset . \sim \{a = (\imath x)(\phi x)\}$$

significa $$p . \supset . \sim \{[(\imath x)(\phi x)] . a = (\imath x)(\phi x)\}.$$

Esta convención nos permite, en la mayoría de los casos que se presentan, hacer caso omiso de la indicación explícita del alcance de un símbolo descriptivo; y se encontrará que la convención concuerda muy estrechamente con la convención

tácita del lenguaje ordinario sobre este asunto. Así, por ejemplo, si "$(\imath x)(\phi x)$" es "fulano de tal" "$a \neq (\imath x)(\phi x)$", se leerá "$a$ no es fulano de tal", lo cual ordinariamente se considera como que da a entender que "fulano de tal" existe; pero "$\sim \{a = (\imath x)(\phi x)\}$" se lee "no es verdad que a sea fulano de tal", lo cual generalmente debe considerarse válida si es que "fulano de tal" no existe. El lenguaje ordinario es, desde luego, más bien libre y fluctuante en sus implicaciones sobre esta materia; pero sin prejuicio de la exigencia de la exactitud, nuestra convención parece que se mantiene lo más cercana posible al lenguaje ordinario.

En el caso de que la proposición más pequeña situada entre puntos o paréntesis contenga dos o más descripciones, supondremos —si no hay indicación de lo contrario— que lo que se presente tipográficamente primero tiene un alcance mayor que lo que aparezca tipográficamente después. Así, pues,

$$(\imath x)(\phi x) = (\imath x)(\psi x)$$

significa $(\exists c) : \phi x . \equiv_x . x = c : [(\imath x)(\psi x)] . c = (\imath x)(\psi x),$

mientras que $(\imath x)(\psi x) = (\imath x)(\phi x)$

significa $(\exists d) : \psi x . \equiv_x . x = d : [(\imath x)(\phi x)] . (\imath x)(\phi x) = d.$

Fácilmente se observa que estas dos proposiciones son equivalentes.

2) *Clases.* Los símbolos para clases, al igual que los símbolos para las descripciones son, en nuestro sistema, símbolos incompletos; sus *usos* están delimitados, pero en sí mismos no conllevan significación alguna. Es decir, los usos de tales símbolos están tan determinados que, cuando el *definiens* se sustituye por el *definiendum,* ya no permanece el símbolo que se suponía que representaba a una clase. Así, pues, las clases —hasta el punto en que las hemos introducido— son convenciones meramente simbólicas o lingüísticas, y no objetos genuinos como lo son sus miembros si son individuales.

Existe una antigua discusión acerca de si la lógica formal debería ocuparse principalmente de las intensiones o de las extensiones. En general, los lógicos cuya formación fue preferentemente filosófica han optado por las intensiones, mientras que los de formación principalmente matemática se han decidido por las extensiones. Los hechos parecen ser que, mientras los lógicos matemáticos prefieren las extensiones, los lógicos filosóficos declinan a ofrecer cualquier cosa que no sean las intensiones. Nuestra teoría de clases admite y reconcilia estas dos actitudes aparentemente opuestas, mostrando que una extensión (que es lo mismo que una clase) es un símbolo incompleto, cuyo uso siempre consigue su significación a través de una referencia a la intensión.

En el caso de las descripciones fue posible *probar* que son símbolos incompletos. En cuanto a las clases, no sabemos de ninguna prueba igualmente determinada, aunque argumentos de mayor o menor fuerza lógica pueden obtenerse del viejo

problema del Uno y el Muchos (43). No obstante, para nuestro objetivo, no es preciso afirmar dogmáticamente que no existen cosas tales como las clases. Sólo nos es necesario mostrar que los símbolos incompletos que introducimos como representantes de las clases producen todas las proposiciones, a causa de lo cual las clases pueden considerarse esenciales. Cuando se ha mostrado esto, el mero principio de economía de las ideas primitivas nos lleva a no introducir las clases salvo como símbolos incompletos.

Para explicar la teoría de clases es necesario explicar primero la diferencia que existe entre las funciones *extensionales* y las *intensionales.* Esto se lleva a cabo por medio de las siguientes definiciones:

El *valor de verdad* de una proposición es la verdad si es verdadera y es la falsedad si es falsa. (Esta proposición se debe a Frege).

Dos proposiciones se dice que son *equivalentes* cuando tienen el mismo valor de verdad; es decir, cuando ambas son verdaderas o ambas son falsas.

Se dice que dos proposiciones son *formalmente equivalentes* cuando son equivalentes para todo argumento posible; esto es, cuando cualquier argumento que satisface a una satisface también a la otra, y viceversa. Así, pues, "$\hat{x}$ es un hombre" es formalmente equivalente a "$\hat{x}$ es un bípedo implume"; "$\hat{x}$ es un primo par" es formalmente equivalente a "x es idéntico a 2".

Una función de función se llama *extensional* cuando su valor de verdad para cualquier argumento es el mismo que para cualquier argumento formalmente equivalente. Es decir, $f(\phi\hat{z})$ es una función extensional de $\phi\hat{z}$ si —dado que $\psi\hat{z}$ es formalmente equivalente a $\phi\hat{z}$—, $f(\phi z)$ es equivalente a $f(\psi\hat{z})$. Aquí, las variables aparentes ϕ y ψ son necesariamente del mismo tipo que tienen los argumentos que significativamente puede tener f. No consideramos necesario emplear como variables aparentes funciones de tipos no predicativos; de acuerdo con esto, en lo sucesivo, todas las funciones extensionales se considerarán de hecho como funciones de funciones predicativas (44).

Una función de función se dice que es *intensional* cuando no es extensional.

La naturaleza e importancia de la distinción entre funciones intensionales y extensionales se aclarará mediante algunos ejemplos. La proposición " 'x es un hombre' implica siempre 'x es mortal' " es una función extensional de la función "$\hat{x}$ es un hombre", porque podemos sustituir "x es un hombre" por "x es un bípedo implume" o por cualquier otra expresión que sea aplicable a los mismos objetos a los que se puede aplicar "x es un hombre" y no a otros objetos. Sin embargo, la

(43) En pocas palabras, estos argumentos se reducen al siguiente: si existe un objeto tal como una clase, en algún sentido debe ser *un* objeto. Aunque sólo sea de las clases de las que pueden predicarse el *muchos.* Por lo tanto, si admitimos las clases como objetos, debemos suponer que el mismo objeto puede ser a la vez uno y muchos, lo cual parece imposible.

(44) Cf. p. 110.

proposición "*A* cree que '*x* es un hombre' implica siempre a '*x* es mortal' " es una función intensional de '$\hat{x}$ es un hombre', porque *A* pudo no haber considerado nunca la cuestión de si los bípedos implumes son mortales, o puede creer erróneamente que hay bípedos implumes que no son mortales. Así, pues, aún cuando "*x* es un bípedo implume" es formalmente equivalente a "*x* es un hombre", de ningún modo se sigue de ello que una persona crea que todos los hombres son mortales debe creer que todos los bípedos implumes son mortales, ya que pudo no haber pensado nunca acerca de los bípedos implumes, o haber supuesto que los bípedos implumes no siempre son hombres. Una vez más, la proposición "el número de argumentos que satisface la función $\phi ! \hat{z}$ es *n*" es una función extensional de $\phi ! \hat{z}$ porque su verdad o falsedad es incambiable si sustituimos en lugar de $\phi ! \hat{z}$ cualquier otra función que sea verdadera siempre que $\phi ! \hat{z}$ sea verdadera, y falsa siempre que $\phi ! \hat{z}$ sea falsa. Sin embargo, la proposición "*A* afirma que el número de argumentos que satisfacen a $\phi ! \hat{z}$ es *n*" es una función intensional de $\phi ! \hat{z}$, ya que si *A* afirma esto, que se refiere a $\phi ! \hat{z}$, él ciertamente no puede afirmarlo refiriéndolo a todas las funciones predicativas que son equivalentes a $\phi ! \hat{z}$, porque la vida es demasiado breve. Consideremos, de nuevo, la proposición "dos blancos pretenden haber alcanzado el Polo Norte". Esta proposición manifiesta que "dos argumentos satisfacen a la función '$\hat{x}$ es un blanco que pretende haber alcanzado el Polo Norte' ". La verdad o falsedad de esta proposición no queda afectada si sustituimos "$\hat{x}$ es un blanco que pretende haber alcanzado el Polo Norte" por cualquier otra expresión que sea válida para los mismos argumentos, y no para otros. Por lo tanto, es una función extensional. Pero la proposición "existe una rara coincidencia en que dos blancos hayan pretendido haber alcanzado el Polo Norte", lo cual indica que "existe una rara coincidencia en que dos argumentos deban satisfacer la función '$\hat{x}$ es un blanco que pretende haber alcanzado el Polo Norte' " no es equivalente a "existe una rara coincidencia en que dos argumentos deban satisfacer la función '$\hat{x}$ es el Dr. Cook o el Comandante Peary' ". Así, pues, "existe una rara coincidencia en que $\phi ! \hat{x}$ deba ser satisfecha por dos argumentos" es una función intensional de $\phi ! \hat{x}$.

Los ejemplos anteriores ponen de manifiesto el hecho de que las funciones de funciones que interesan especialmente a los matemáticos son extensionales, mientras que las funciones de funciones que sean intensionales sólo se presentan cuando se introducen ideas no-matemáticas, tales como lo que alguien cree o afirma, o las emociones suscitadas por algún hecho. Por lo tanto, es natural en una lógica matemática insistir de una manera especial en las funciones de funciones que sean *extensionales.*

Cuando dos funciones son formalmente equivalentes, podemos decir que ambas *tienen la misma extensión.* En esta definición estamos en total acuerdo con el uso. No suponemos que haya algo tal como la extensión: sólo definimos la frase completa "teniendo la misma extensión". Ahora no podemos decir que una función extensional de una función es aquella cuya verdad o falsedad dependa únicamente de la extensión de sus argumentos. En un caso así, es conveniente tratar el

enunciado en cuestión bajo el punto de vista de la extensión. Puesto que las funciones extensionales son numerosas e importantes, es natural considerar la extensión como un objeto al que llamamos *clase*, y que se supone que sea el sujeto de todos los enunciados equivalentes relativos a las funciones formalmente equivalentes. Así, por ejemplo, si decimos "hubo doce Apóstoles", es natural considerar este enunciado como algo al que se le atribuye la propiedad de que sean doce a una cierta colección de hombres (a saber, aquellos que fueron los Apóstoles), mejor que atribuirle la propiedad de que la función "$\hat{x}$ era un Apóstol" sea satisfecha por doce argumentos. Este punto de vista queda reforzado por el sentimiento de que hay algo que es idéntico en el caso de dos funciones que "tienen la misma extensión". Y si tomamos problemas tan simples como "¿cuántas combinaciones pueden hacerse con n cosas? ", a primera vista parece necesario que cada "combinación" deba ser un objeto único que pueda contarse como uno. Esto, sin embargo, no es técnicamente necesario, y no vemos razón alguna para suponer que sea filosóficamente verdadera. El procedimiento técnico por el que se supera esta aparente dificultad es como se explica a continuación.

Hemos visto que una función extensional de una función puede considerarse como una función de la clase determinada por la función-argumento, pero que no puede serlo una función intensional. A fin de evitar la necesidad de dar un tratamiento diferente a funciones de funciones intensionales de las que sean extensionales, construimos una función extensional derivada de una función de función predicativa, $\psi\,!\,\hat{z}$, que tenga la propiedad de ser equivalente a la función de la que se deriva, ya que esta función es extensional, así como a la propiedad de ser significante (merced a la ayuda de la ambigüedad sistemática de la equivalencia) con cualquier argumento $\phi\hat{z}$, con tal que estos argumentos sean del mismo tipo que los de $\psi\,!\,\hat{z}$. La función derivada, escrita como "$f\{\hat{z}(\phi z)\}$", se define de la siguiente manera: Dada una función $f(\psi\,!\,\hat{z})$, nuestra función derivada viene a ser "hay una función predicativa que es formalmente equivalente a $\phi\hat{z}$ y que satisface a f". Si $\phi\hat{z}$ es una función predicativa, nuestra función derivada será verdadera siempre que $f(\phi\hat{z})$ sea verdadera. Si $f(\phi\hat{z})$ es una función extensional, y $\phi\hat{z}$ es una función predicativa, nuestra función derivada no será verdadera salvo que $f(\phi\hat{z})$ sea verdadera; así, pues, en este caso, nuestra función derivada es equivalente a $f(\phi\hat{z})$. Si $f(\phi\hat{z})$ no es una función extensional, y si $\phi\hat{z}$ es una función predicativa, nuestra función derivada puede algunas veces ser verdadera cuando la función original sea falsa. Pero, en cualquier caso, la función derivada es siempre extensional.

A fin de que la función derivada sea significante para una función $\phi\hat{z}$, de cualquier orden, con tal que tome argumentos del tipo correcto, es necesario y suficiente que $f(\psi\,!\,\hat{z})$ sea significante, en donde $\psi\,!\,z$ es una función *predicativa* cualquiera. La razón de esto es que, con respecto a un argumento $\phi\hat{z}$, sólo necesitamos la hipótesis de que sea formlamente equivalente para alguna función predicativa $\psi\,!\,\hat{z}$, y que la equivalencia formal tenga la misma clase de ambigüedad sistemática en cuanto al tipo que pertenece a la verdad y falsedad, y pueda, por tanto, tener validez entre funciones de dos tipos diferentes, supuesto que las

funciones toman argumentos del mismo tipo. Así, pues, por medio de nuestra función derivada no sólo hemos ofrecido funciones extensionales en todos los sitios en lugar de funciones intensionales, sino que *prácticamente* hemos eliminado la necesidad de considerar las diferencias de tipo entre funciones cuyos argumentos son del mismo tipo. Esto da lugar a la misma clase de simplificación en nuestra jerarquía que la que resultaría de no haber considerado nada más que funciones predicativas.

Si $f(\psi ! \hat{z})$ puede constituirse por medio de las ideas primitivas de disyunción, negación, $(x) . \phi x$, y $(\exists x) . \phi x$, (como en el caso de todas las funciones de funciones que se presentan explícitamente en este trabajo) se encontrará que, en virtud de la ambigüedad sistemática de las ideas primitivas expuestas anteriormente, cualquier función $\phi\hat{z}$ cuyos argumentos sean del mismo tipo que los de $\psi ! \hat{z}$ pueden sustituirse significativamente por $\psi ! \hat{z}$ en f sin hacer ningún otro cambio en el simbolismo. Así, pues, en un caso tal como el dicho, y que lo sea simbólicamente, aunque no realmente, la misma función f puede recibir como argumentos funciones de varios tipos distintos. Si, con un argumento dado $\phi\hat{z}$, la función $f(\phi\hat{z})$, interpretada así, es equivalente a $f(\psi ! \hat{z})$, siempre que $\psi ! \hat{z}$ sea formalmente equivalente a $\phi\hat{z}$, entonces $f\{\hat{z}(\phi z)\}$ es equivalente a $f(\phi\hat{z})$, puesto que hay una función predicativa formalmente equivalente a $\phi\hat{z}$. En este punto, hacemos uso del axioma de la reducibilidad, de acuerdo con el cual siempre hay una función predicativa formalmente equivalente a $\phi\hat{z}$.

Como fue explicado con anterioridad, es conveniente considerar a una función de función, extensional, como la que tiene por argumento no la función sino la clase determinada por la función. Ahora hemos visto que nuestra función derivada es siempre extensional. Por lo tanto, si nuestra función original fuese $f(\psi ! \hat{z})$, escribimos la función derivada $f\{\hat{z}(\phi z)\}$, en donde "$\hat{z}(\phi z)$" puede leerse como "la clase de los argumentos que satisfacen a ϕz"; o dicho más simplemente, "la clase determinada por $\phi\hat{z}$". Así, pues, "$f\{\hat{z}(\phi z)\}$" significa: "Hay una función predicativa, $\psi ! \hat{z}$, que es formalmente equivalente a $\phi\hat{z}$ y es tal que $f(\psi ! \hat{z})$ es verdadera". En realidad ésta es una función de $\phi\hat{z}$, pero la tratamos simbólicamente como si tuviese un argumento $\hat{z}(\phi z)$. Con ayuda del axioma de la reducibilidad descubrimos que se obtienen las propiedades usuales de las clases. Por ejemplo, dos funciones formalmente equivalentes determinan la misma clase y, a la inversa, dos funciones que determinan la misma clase son formalmente equivalentes. También, decir que x es un miembro de $\hat{z}(\phi z)$, esto es, de la clase determinada por $\phi\hat{z}$, es verdadero cuando ϕx sea verdadero y falso cuando ϕx sea falso. Así, pues, todos los objetivos matemáticos en los que parece que se requieren las clases se verifican mediante los objetos puramente simbólicos $\hat{z}(\phi z)$, ya que damos por supuesto el axioma de la reducibilidad.

En virtud del axioma de la reducibilidad, si $\phi\hat{z}$ es una función cualquiera, existe una función predicativa formalmente equivalente, $\psi ! \hat{z}$, entonces, la clase $\hat{z}(\phi z)$ es idéntica a la clase $\hat{z}(\psi ! z)$, de forma que cada clase puede definirse por una función *predicativa*. Por tanto, la totalidad de las *clases* de las que se puede decir

significativamente que un término dado pertenece o no pertenece es una totalidad legítima, aunque la totalidad de las *funciones* de las cuales se puede decir que un término dado satisface o no satisface no sea una totalidad legítima. Las clases a las que un término dado a pertenece o no pertenece son clases definidas como funciones-a; ellas son también clases definidas como funciones-a *predicativas.* Llamémoslas clases-a. Entonces, las "clases-a" forman una totalidad legítima derivada de las funciones-a predicativas. Por consiguiente, resultan posibles muchas clases de expresiones generales que, de otro modo, entrañarían paradojas de círculo vicioso. Ninguna de estas expresiones generales son de la clase que llevan a contradicciones, y gran parte de ellas son tales que es muy difícil suponerlas ilegítimas. El hecho de que ellas se vuelvan posibles por el axioma de la reducibilidad, y que de otro modo deberían excluirse por el principio del círculo vicioso, debe considerarse como un argumento en favor del axioma de la reducibilidad.

La definición anterior de "la clase definida por la función $\phi\hat{z}$", o mejor, de una proposición en la que tenga lugar esta frase, es, expresada en símbolos, así:

$$f\{\hat{z}(\phi z)\} . = : (\exists \psi) : \phi x . \equiv_x . \psi ! x : f\{\psi ! \hat{z}\} \quad \text{Df.}$$

A fin de recomendar esta definición, enumeraremos cinco requisitos que deben satisfacer una definición de clases, y, entonces, mostraremos que la definición anterior cumple estos cinco requisitos.

Exigimos de las clases, si han de servir para los objetivos para los que comúnmente se emplean, que tengan ciertas propiedades que pueden enumerarse de manera siguiente. 1) Cada función proposicional debe determinar a una clase que puede considerarse como la colección de todos los argumentos que satisfacen a la función en cuestión. Este principio debe tener validez cuando la función se satisfaga por un número infinito de argumentos tan bien como se satisface por un número finito. Debe ser igualmente válido incluso cuando no haya argumentos que satisfagan la función; esto es, la "clase nula" debe ser exactamente una clase tan legítima como cualquier otra. 2) Dos funciones proposicionales que sean formalmente equivalentes, esto es, tales que cada argumento que satisfaga a una también satisface a la otra, deben determinar a la misma clase; es decir, una clase debe ser algo completamente determinado por sus miembros, de forma que, por ejemplo, la clase de "los bípedos implumes" es idéntica a la clase de "los hombres", y la clase de "los números primos pares" es idéntica a la clase "los números idénticos al 2". 3) Por el contrario, dos funciones proposicionales que determinen la misma clase deben ser formalmente equivalentes; en otras palabras, cuando se da la clase, el conjunto de miembros está determinado: dos conjuntos de objetos diferentes no pueden producir la misma clase. 4) En el mismo sentido en el que hay clases (cualquiera que pueda ser este sentido), o en algún sentido cercanamente análogo, debe haber también clases de clases. Así, por ejemplo, "las combinaciones de n cosas tomadas de m en m", en donde las n cosas forman una clase dada, es una clase de clases; cada combinación de m cosas es una clase, y cada clase de éstas es un miembro del especificado conjunto de combinaciones, cuyo conjunto es, por lo tanto, una clase

cuyos miembros son clases. De nuevo, la clase de las clases unitarias, o la de pares, es absolutamente indispensable; el primero es el número 1, el último el número 2. Así, pues, sin clases de clases se hace imposible la aritmética. 5) Bajo todas las circunstancias debe carecer de sentido el suponer que una clase sea idéntica a uno de sus miembros. Pero si esa suposición tuviese algún significado, entonces "$\alpha \in \alpha$" debería ser una función proposicional significante (45), así como también lo debería ser "$\alpha \sim \in \alpha$". Por consiguiente, por 1) y 4), debe haber una clase de clases que satisfaga a la función "$\alpha \sim \in \alpha$". Si a esta clase la llamamos κ, tendremos

$$\alpha \in \kappa \,.\equiv_{\alpha}.\, \alpha \sim \in \alpha.$$

Dado que, por hipótesis nuestra, "$\kappa \in \kappa$" se supone significante, la equivalencia anterior, que es válida para todos los posibles valores de α, también es válida para todos los posibles valores de κ; esto es

$$\kappa \in \kappa \,.\equiv.\, \kappa \sim \in \kappa.$$

Pero esto es una contradicción (46). Por lo tanto, "$\alpha \in \alpha$" y "$\alpha \sim \in \alpha$" deben ser siempre unos sin-sentidos. En general, no existe ninguna sorpresa sobre esta conclusión, pero tiene dos consecuencias que merecen especial atención. En primer lugar, una clase que se componga de un miembro sólo no debe ser idéntica a ese miembro; es decir, no debemos tener $\iota' x = x$. No obstante, tenemos $x \in \iota' x$ y, por lo tanto, si $x = \iota' x$, tenemos $\iota' x \in \iota' x$, que vemos que carece de sentido. Se sigue que "$x = \iota' x$" debe ser absolutamente sin-sentido y no simplemente falsa. En segundo lugar, pudiera parecer como si la clase de todas las clases fuese una clase; esto es, como si (escribiendo "Cls" por "clase") "Cls $\in$ Cls" fuese una proposición verdadera. Pero esta combinación de símbolos debe carecer de sentido, a no ser que, en efecto, exista una ambigüedad en el significado de "Cls", de forma que, en "Cls $\in$ Cls" la primera "Cls" puede suponerse que tenga un significado diferente de la segunda.

Por lo que se refiere a los requisitos anteriores, está claro, para empezar, que, de acuerdo con nuestra definición, cada función proposicional $\phi\hat{z}$ determina a una clase $\hat{z}\,(\phi z)$. Asumiendo el axioma de la reducibilidad, siempre debe haber proposiciones verdaderas sobre $\hat{z}\,(\phi z)$; esto es, proposiciones verdaderas de la forma $f\{\hat{z}\,(\phi z)\}$. Supongamos que $\phi\hat{z}$ es formalmente equivalente a $\psi ! \hat{z}$, y supongamos que $\psi ! \hat{z}$ satisface a alguna función f. Entonces, $\hat{z}\,(\phi z)$ también satisface a f. Por lo tanto, dada una función $\phi\hat{z}$, hay proposiciones verdaderas de la forma $f\{\hat{z}\,(\phi z)\}$, esto es, proposiciones verdaderas en las que "la clase determinada por ϕz" es gramaticalmente el sujeto. Esto muestra que nuestra definición cumple con el primero de nuestros cinco requisitos.

El segundo y tercer requisitos reclaman juntamente que las clases $\hat{z}\,(\phi z)$ y $\hat{z}\,(\psi z)$

(45) Como se explicó en el capítulo I (p. 79), "$x \in \alpha$" significa "x es un miembro de la clase α" o, más brevemente, "x es una α". La definición de esta expresión en términos de nuestra teoría de clases se ofrecerá en breve.

(46) Esta es la segunda de las contradicciones discutidas al final del Capítulo II.

sean idénticas cuando, y sólo cuando, sus funciones de definición sean formalmente equivalentes; es decir, que debemos tener

$$\hat{z}(\phi z) = \hat{z}(\psi z) . \equiv : \phi x . \equiv_x . \psi x.$$

Aquí, el significado de "$\hat{z}(\phi z) = \hat{z}(\psi z)$" debe derivarse, por medio de una aplicación doble de la definición de $f\{\hat{z}(\phi z)\}$, de la definición de

$$\text{"}\chi ! \hat{z} = \theta ! \hat{z},\text{"}$$

que es
$$\chi ! \hat{z} = \theta ! \hat{z} . = : (f) : f ! \chi ! \hat{z} . \supset . f ! \theta ! \hat{z} \quad \text{Df}$$

por medio de la definición general de la identidad.

Al interpretar "$\hat{z}(\phi z) = \hat{z}(\psi z)$", adoptaremos el mismo criterio que hemos adoptado, con respecto a $(x)(\phi x)$ y a $(x)(\psi x)$, a saber, que el símbolo incompleto que se presente en primer lugar debe tener el alcance mayor. Así, pues, $\hat{z}(\phi z) = \hat{z}(\psi z)$ viene a ser, por nuestra definición

$$(\exists \chi) : \phi x . \equiv_x . \chi ! x : \chi ! \hat{z} = \hat{z}(\psi z),$$

la cual, por eliminación de $\hat{z}(\phi z)$, se convierte en

$$(\exists \chi) :. \phi x . \equiv_x . \chi ! x :. (\exists \theta) : \psi x . \equiv_x . \theta ! x : \chi ! \hat{z} = \theta ! \hat{z},$$

que es equivalente a

$$(\exists \chi, \theta) : \phi x . \equiv_x . \chi ! x : \psi x . \equiv_x . \theta ! x : \chi ! \hat{z} = \theta ! \hat{z},$$

la cual, de nuevo, es equivalente a

$$(\exists \chi) : \phi x . \equiv_x . \chi ! x : \psi x . \equiv_x . \chi ! x,$$

que, en virtud del axioma de la reducibilidad, es equivalente a

$$\phi x . \equiv_x . \psi x.$$

Así, pues, nuestra definición del uso de $\hat{z}(\phi z)$ es tal que satisface las condiciones 2) y 3) que impusimos para las clases; esto es, tenemos

$$\vdash :. \hat{z}(\phi z) = \hat{z}(\psi z) . \equiv : \phi x . \equiv_x . \psi x.$$

Antes de considerar las clases de clases convendrá definir el conjunto de miembros de una clase; esto es, definir el símbolo "$x \in \hat{z}(\phi z)$", que puede leerse como "x es un miembro de la clase determinada por $\phi \hat{z}$". Ya que ésta es una función de la forma $f\{\hat{z}(\phi z)\}$, debe derivarse, por medio de nuestra definición general de tales funciones, de la función correspondiente $f\{\psi ! z\}$. Por lo tanto, proponemos

$$x \in \psi ! \hat{z} . = . \psi ! x \quad \text{Df.}$$

Esta definición sólo es necesaria a fin de dar un significado a "$x \in \hat{z}(\phi z)$"; el significado que da es, en virtud de la definición de $f\{\hat{z}(\phi z)\}$,

$$(\exists \psi) : \phi y . \equiv_y . \psi ! y : \psi ! x.$$

Así, pues, ocurre que "$x \in \hat{z}\,(\phi z)$" implica ϕx, ya que ello implica $\psi ! x$, y $\psi ! x$ es equivalente a ϕx; también, en virtud del axioma de la reducibilidad, ϕx implica "$x \in \hat{z}\,(\phi x)$", ya que hay una función predicativa ψ formalmente equivalente a ϕ, y x debe satisfacer a ψ, puesto que x (*ex hypothesi*) satisface a ϕ. Así, pues, en virtud del axioma de la reducibilidad, tenemos

$$\vdash : x \in \hat{z}\,(\phi z) . \equiv . \phi x,$$

esto es, x es un miembro de la clase $\hat{z}\,(\phi z)$ cuando, y sólo cuando, x satisfaga la función ϕ que define a la clase.

Seguidamente tenemos que considerar cómo interpretar una clase de clases. Como hemos definido $f\{\hat{z}\,(\phi z)\}$, consideraremos, naturalmente, a una clase de clases como la constituida por aquellos valores de $\hat{z}\,(\phi z)$ que satisfacen a $f\{\hat{z}\,(\phi z)\}$. Escribamos α en lugar de $\hat{z}\,(\phi z)$; entonces, podemos escribir $\hat{\alpha}\,(f\alpha)$ por la clase de los valores de α que satisfacen a $f\alpha$ (47). Aplicaremos la misma definición, y ponemos

$$F\{\hat{\alpha}\,(f\alpha)\} . = : (\exists g) : f\beta . \equiv_{\beta} . g ! \beta : F\{g ! \hat{\alpha}\} \quad \text{Df},$$

en donde "β" significa cualquier expresión de la forma $\hat{z}\,(\psi ! z)$.

Tengamos "$\gamma \in \hat{\alpha}\,(f\alpha)$" como un ejemplo de $F\{\hat{\alpha}\,(f\alpha)\}$. Entonces

$$\vdash :. \gamma \in \hat{\alpha}\,(f\alpha) . \equiv : (\exists g) : f\beta . \equiv_{\beta} . g ! \beta : \gamma \in g ! \hat{\alpha}.$$

Del mismo modo que ponemos $\quad x \in \psi ! \hat{z} . = . \psi ! x \quad \text{Df},$

también ponemos $\quad \gamma \in g ! \hat{\alpha} . = . g ! \gamma \quad \text{Df}.$

De este modo, llegamos a

$$\vdash :. \gamma \in \hat{\alpha}\,(f\alpha) . \equiv : (\exists g) : f\beta . \equiv_{\beta} . g ! \beta : g ! \gamma.$$

Si, ahora, extendemos el axioma de la reducibilidad de manera que sea aplicable a funciones de funciones, es decir, si suponemos

$$(\exists g) : f(\psi ! \hat{z}) . \equiv_{\psi} . g ! (\psi ! \hat{z}),$$

fácilmente deducimos que

$$\vdash : (\exists g) : f\{\hat{z}\,(\psi ! z)\} . \equiv_{\psi} . g ! \{\hat{z}\,(\psi ! z)\},$$

esto es $\quad \vdash : (\exists g) : f\beta . \equiv_{\beta} . g ! \beta.$

Así, pues, $\quad \vdash : \gamma \in \hat{\alpha}\,(f\alpha) . \equiv . f\gamma.$

Por consiguiente, cada función que pueda tomar clases como argumentos, esto es, cada función de funciones, determina una clase de clases cuyos miembros son

(47) El uso de una letra única, tal como α o β, para representar una clase variable, se explicará brevemente más adelante.

aquellas clases que satisfacen a la función determinante. Por tanto, la teoría de las clases de clases no ofrece dificultad.

Hemos de considerar a continuación nuestro quinto requisito, a saber, que "$\hat{z}(\phi z) \in \hat{z}(\phi z)$" debe ser un sin-sentido. Aplicando nuestra definición de $f\{\hat{z}(\phi z)\}$ encontramos que, si esta colección de símbolos tuviese un significado, debe significar

$$(\exists\psi) : \phi x \,.\equiv_x.\, \psi!\, x : \psi!\, \hat{z} \in \psi!\, \hat{z},$$

esto es, en virtud de la definición,

$$x \in \psi!\, \hat{z} \,.=.\, \psi!\, x \quad \text{Df},$$

debe significar $\quad (\exists\psi) : \phi x \,.\equiv_x.\, \psi!\, x : \psi!\, (\psi!\, \hat{z}).$

Pero aquí interviene el símbolo "$\psi\,!\,(\psi\,!\,\hat{z})$" que asigna una función como argumento de sí mismo. Un símbolo así siempre carece de sentido, por las razones que se dieron al comienzo del Capítulo II (pp. 94-98). Por lo tanto, "$\hat{z}(\phi z) \in \hat{z}(\phi z)$" es un sin-sentido, y nuestro quinto y último requisito se cumple.

En el caso de $f(\imath x)(\phi x)$, así como en el de $f\{\hat{z}(\phi z)\}$, existe una ambigüedad por lo que respecta al alcance de $\hat{z}(\phi z)$ si interviene en una proposición que, a su vez, es parte de una proposición más larga. Pero en el caso de las clases, puesto que contamos con el axioma de la reducibilidad, a saber,

$$(\exists\psi) : \phi x \,.\equiv_x.\, \psi!\, x,$$

que sustituye a E ! $(\imath x)(\phi x)$, resulta que el valor de verdad de cualquier proposición en la que se presente $\hat{z}(\phi z)$ es el mismo, cualquiera que sea el alcance que le demos a $\hat{z}(\phi z)$, con tal que la proposición sea una función extensional de cuanta función pueda contener. Por eso podemos adoptar la convención de que el alcance sea siempre la proposición más pequeña encerrada por puntos o por corchetes en la que aparezca $\hat{z}(\phi z)$. Si en algún momento se requiere un alcance mayor, podemos indicarlo por "$[\hat{z}(\phi z)]$" seguido de puntos, de la misma forma que hicimos para $[(\imath x)(\phi x)]$.

Similarmente, cuando aparecen dos símbolos de clases, como p. ej. en una proposición de la forma $f\{\hat{z}(\phi z), \hat{z}(\psi z)\}$, no necesitamos recordar las reglas para los alcances de los dos símbolos, ya que todas las alternativas dan resultados equivalentes, como es fácil probar. En cuanto a las proposiciones preliminares es deseable tener una regla para que podamos decidir sobre qué clase de símbolo se presenta primero, a fin de que, al escribirlo, tenga el alcance más largo.

La representación de una clase por una letra única α no puede entenderse en este momento. No obstante, el símbolo α es ambiguo, en tanto que esté sin decidir cuál es el significado de los símbolos $\hat{z}(\phi z), \hat{z}(\psi z), \hat{z}(\chi z)$, etc., en donde $\phi\hat{z}$, $\psi\hat{z}$, $\chi\hat{z}$, etc., son las diversas funciones determinantes de las clases. Según cuál sea la elección tomada, resultan diferentes proposiciones. Pero todas las proposiciones que resulten son equivalentes en virtud de la siguiente proposición que se puede probar fácilmente:

$$\text{"}\vdash : \phi x \equiv_x \psi x \,.\supset.\, f\{\hat{z}(\phi z)\} \equiv f\{\hat{z}(\psi z)\}.\text{"}$$

Desde ahora, salvo que deseemos tratar de la propia función determinante, de suerte que la noción de clase no se presente en la realidad de una manera adecuada, la ambigüedad en la simbolización de α carece totalmente de importancia, si bien —como veremos inmediatamente— nos veamos obligados a limitarnos a funciones determinantes predicativas. Así, pues, "$f(\alpha)$", en donde α es una clase variable, es realmente "$f\{\hat{z}(\phi z)\}$", en donde ϕ es una función variable; o sea, es

$$"(\exists\psi) \cdot \phi x \equiv_x \psi! x \cdot f\{\psi!\hat{z}\},"$$

en donde ϕ es una función variable. Pero aquí se presenta una dificultad que se supera por una limitación impuesta a nuestra práctica, así como por el axioma de la reducibilidad. No obstante, las funciones determinantes, $\phi\hat{z}$, $\psi\hat{z}$, etc., serán de tipos diferentes aunque el axioma de la reducibilidad asegure que algunas son funciones predicativas. Entonces, al interpretar a α como una variable en términos de la variación de cualquier función determinante, caeríamos en errores salvo que nos limitemos a las funciones determinantes predicativas. Estos errores aparecen especialmente en la transición a la variación total (cf. pp. 70, 71). Consiguientemente

$$f\alpha = \cdot (\exists\psi) \cdot \phi! x \equiv_x \psi! x \cdot f\{\psi!\hat{z}\} \quad \text{Df.}$$

La peculiaridad de una definición del uso de una letra única [a saber, α] en lugar de un símbolo variable incompleto es que, aunque en cierto sentido sea sólo una variable real, se presenta sólo en el *definiendum*, mientras que "ϕ", aun cuando sea una variable real, aparece sólo en el *definiens*.

Así, pues, "$f\hat{\alpha}$" significa

$$"(\exists\psi) \cdot \hat{\phi}! x \equiv_x \psi! x \cdot f\{\psi!\hat{z}\},"$$

y "$(\alpha), f\alpha$" significa

$$"(\phi) : (\exists\psi) \cdot \phi! x \equiv_x \psi! x \cdot f\{\psi!\hat{z}\}."$$

Por consiguiente, en los razonamientos matemáticos podemos prescindir del aparato completo de las funciones, y pensar sólo en las clases como "quasi-cosas" capaces de representación inmediata mediante un nombre único. La ventaja es doble: 1) las clases están determinadas por sus miembros, de forma que para un conjunto de miembros existe una clase; 2) el "tipo" de una clase queda completamente definido por el tipo de sus miembros.

Una función predicativa de una clase también se puede definir así:

$$f!\alpha = \cdot (\exists\psi) \cdot \phi! x \equiv_x \psi! x \cdot f!\{\psi!\hat{z}\} \quad \text{Df.}$$

Así, pues, una función predicativa de una clase es siempre una función predicativa de cualquier función determinante predicativa de la clase, aunque la conversa no lo sea.

3) *Las relaciones.* Con respecto a las relaciones contamos con una teoría absolutamente análoga a la que acabamos de explicar con respecto a las clases. Las relaciones en extensión, al igual que ocurría en las clases, son símbolos incompletos.

Necesitamos una división de funciones de dos variables en funciones predicativas y no-predicativas, por las mismas razones que hemos expuesto en el Capítulo II. Empleamos la notación "$\phi\,!\,(x, y)$" para simbolizar una función *predicativa* de x e y.

Usamos "$\phi\,!\,(\hat{x}, \hat{y})$" para simbolizar la función como opuesta a sus valores; y usamos "$\hat{x}\hat{y}\,\phi\,(x, y)$" para la relación (en intensión) determinada por $\phi\,(x, y)$. Proponemos

$$f\{\hat{x}\hat{y}\,\phi\,(x, y)\}\,.=:(\exists\psi):\phi\,(x, y)\,.\equiv_{x,y}.\,\psi!\,(x, y):f\{\psi!\,(\hat{x}, \hat{y})\}\quad \text{Df.}$$

Así, pues, aun cuando $f\{\psi\,!\,(\hat{x}, \hat{y})\}$ no sea una función extensional de ψ, $f\{\hat{x}\hat{y}\,\phi\,(x, y)\}$ es una función extensional de ϕ. Por lo tanto, al igual que en el caso de las clases, deducimos

$$\vdash :.\,\hat{x}\hat{y}\,\phi\,(x, y)=\hat{x}\hat{y}\,\psi\,(x, y)\,.\equiv:\phi\,(x, y)\,.\equiv_{x,y}.\,\psi\,(x, y),$$

esto es, una relación está determinada por su extensión, y viceversa.

Sobre la analogía de la definición de "$x\,\epsilon\,\psi\,!\,\hat{z}$", presentamos

$$x\,\{\psi!\,(\hat{x}, \hat{y})\}\,y\,.=.\,\psi!\,(x, y)\quad \text{Df (48).}$$

Esta definición, al igual que la de "$x\,\epsilon\,\psi\,!\,\hat{z}$", no se introduce por causa propia, sino a fin de dar un significado a

$$x\,\{\hat{x}\hat{y}\,\phi\,(x, y)\}\,y.$$

En virtud de nuestras definiciones, este significado es

$$(\exists\psi):\phi\,(x, y)\,.\equiv_{x,y}.\,\psi!\,(x, y):x\,\{\psi!\,(\hat{x}, \hat{y})\}\,y,$$

esto es

$$(\exists\psi):\phi\,(x, y)\,.\equiv_{x,y}.\,\psi!\,(x, y):\psi!\,(x, y),$$

y ésta, en virtud del axioma de la reducibilidad

$$\text{"}(\exists\psi):\phi\,(x, y)\,.\equiv_{x,y}.\,\psi!\,(x, y),\text{"}$$

es equivalente a

$$\phi\,(x, y).$$

Así, pues, siempre tenemos

$$\vdash :x\,\{\hat{x}\hat{y}\,\phi\,(x, y)\}\,y\,.\equiv.\,\phi\,(x, y).$$

Siempre que la función determinante de una relación no sea relevante, podemos sustituir $\hat{x}\hat{y}\,\phi\,(xy)$ por una letra mayúscula única. En virtud de la proposición anterior,

$$\vdash :.\,R=S\,.\equiv:xRy\,.\equiv_{x,y}.\,xSy,$$

$$\vdash :.\,R=\hat{x}\hat{y}\,\phi\,(x, y)\,.\equiv:xRy\,.\equiv_{x,y}.\,\phi\,(x, y),$$

y

$$\vdash .\,R=\hat{x}\hat{y}\,(xRy).$$

---

(48) Esta definición suscita ciertas cuestiones en cuanto a los dos sentidos de una relación, que se tratarán en el *21.

Las clases de relaciones y las relaciones de relaciones pueden tratarse como se trataron antes las clases de clases.

Del mismo modo que una clase no debe ser capaz de ser o no ser un miembro de ella misma, así también una relación no debe ser ni no ser relacionante ni relacionado con respecto a sí misma. Esto viene a ser equivalente a la afirmación de que $\phi ! (\hat{x}, \hat{y})$ no puede ser, significativamente, de los argumentos x o y en $\phi ! (x, y)$. Este principio, igualmente, resulta de la limitación a los posibles argumentos de una función expuesta al comienzo del Capítulo II.

Podemos recapitular toda la discusión acerca de los símbolos incompletos con lo que exponemos a continuación.

El uso del símbolo "$(\imath x)(\phi x)$", como si en "$f(\imath x)(\phi x)$" representase *directamente* a un argumento de la función $f\hat{z}$ se hizo posible merced a los teoremas

$$\vdash :. \mathrm{E}!(\imath x)(\phi x) . \supset : (x) . fx . \supset . f(\imath x)(\phi x),$$
$$\vdash : (\imath x)(\phi x) = (\imath x)(\psi x) . \supset . f(\imath x)(\phi x) \equiv f(\imath x)(\psi x),$$
$$\vdash : \mathrm{E}!(\imath x)(\phi x) . \supset . (\imath x)(\phi x) = (\imath x)(\phi x),$$
$$\vdash : (\imath x)(\phi x) = (\imath x)(\psi x) . \equiv . (\imath x)(\psi x) = (\imath x)(\phi x),$$
$$\vdash : (\imath x)(\phi x) = (\imath x)(\psi x) . (\imath x)(\psi x) = (\imath x)(\chi x) . \supset . (\imath x)(\phi x) = (\imath x)(\chi x).$$

El uso del símbolo "$\hat{x}(\phi x)$" (o de una letra única, tal como α, para representar dicho símbolo) como si, en "$f\{\hat{x}(\phi x)\}$", representase *directamente* a un argumento α para una función $f\hat{\alpha}$, se hizo posible por los teoremas

$$\vdash : (\alpha) . f\alpha . \supset . f\{\hat{x}(\phi x)\},$$
$$\vdash : \hat{x}(\phi x) = \hat{x}(\psi x) . \supset . f\{\hat{x}(\phi x)\} \equiv f\{\hat{x}(\psi x)\},$$
$$\vdash . \hat{x}(\phi x) = \hat{x}(\phi x),$$
$$\vdash : \hat{x}(\phi x) = \hat{x}(\psi x) . \equiv . \hat{x}(\psi x) = \hat{x}(\phi x),$$
$$\vdash : \hat{x}(\phi x) = \hat{x}(\psi x) . \hat{x}(\psi x) = \hat{x}(\chi x) . \supset . \hat{x}(\phi x) = \hat{x}(\chi x).$$

Se debe suponer que, a lo largo de estas proposiciones, los tipos están debidamente ajustados, allí donde fuese posible alguna ambigüedad.

El uso del símbolo "$\hat{x}\hat{y}\{\phi(x, y)\}$" (o de una letra única, tal como la R, para representar a dicho símbolo) como si, en "$f\{\hat{x}\hat{y}\,\phi(x, y)\}$" representase *directamente* a un argumento R para una función fR, se hizo posible por los teoremas

$$\vdash : (R) . fR . \supset . f\{\hat{x}\hat{y}\,\phi(x, y)\},$$
$$\vdash : \hat{x}\hat{y}\,\phi(x, y) = \hat{x}\hat{y}\,\psi(x, y) . \supset . f\{\hat{x}\hat{y}\,\phi(x, y)\} \equiv f\{\hat{x}\hat{y}\,\psi(x, y)\},$$
$$\vdash . \hat{x}\hat{y}\,\phi(x, y) = \hat{x}\hat{y}\,\phi(x, y),$$
$$\vdash : \hat{x}\hat{y}\,\phi(x, y) = \hat{x}\hat{y}\,\psi(x, y) . \equiv . \hat{x}\hat{y}\,\psi(x, y) = \hat{x}\hat{y}\,\phi(x, y),$$
$$\vdash : \hat{x}\hat{y}\,\phi(x, y) = \hat{x}\hat{y}\,\psi(x, y) . \hat{x}\hat{y}\,\psi(x, y) = \hat{x}\hat{y}\,\chi(x, y) . \supset . \hat{x}\hat{y}\,\phi(x, y) = \hat{x}\hat{y}\,\chi(x, y).$$

A lo largo de estas proposiciones debe suponerse que los tipos están debidamente ajustados, allí en donde sea posible una ambigüedad.

De estos tres grupos de teoremas resulta que estos símbolos incompletos obede-

cen a las mismas reglas formales de la identidad que obedecen los símbolos que representan directamente a objetos, con tal que consideremos sólo la *equivalencia* de los valores de la variable (o constante) resultante correspondiente a las funciones proposicionales, y no su identidad. Esta consideración de la *identidad* de las proposiciones nunca entra dentro de nuestro razonamiento formal.

Similarmente, las *limitaciones* para el empleo de estos símbolos pueden resumirse como se explica a continuación. En el caso de $(\imath x)(\phi x)$, la principal vía en la que es relevante su incompletitud es aquella en la que no siempre tenemos

$$(x) . fx . \supset . f(\imath x)(\phi x),$$

que significa que una función que siempre es verdadera puede, sin embargo, no ser verdad de $(\imath x)(\phi x)$. Esto es posible porque $f(\imath x)(\phi x)$ no es un valor de $f\hat{x}$, de forma que, aun cuando todos los valores de $f\hat{x}$ sean verdaderos, $f(\imath x)(\phi x)$ puede no ser verdadero. Esto acontece cuando $(\imath x)(\phi x)$ no existe. Así, pues, por ejemplo, tenemos $(x) . x = x$, pero no tenemos

el círculo cuadrado = el círculo cuadrado.

La inferencia

$$(x) . fx . \supset . f(\imath x)(\phi x)$$

sólo es válida cuando E ! $(\imath x)(\phi x)$. Tan pronto como sepamos que E ! $(\imath x)(\phi x)$, el hecho de que $(\imath x)(\phi x)$ sea un símbolo incompleto se hace irrelevante, mientras que nos limitemos a que las funciones-de-verdad (49) de cualquier proposición sean su alcance. Pero, aun cuando E ! $(\imath x)(\phi x)$, la incompletitud de $(\imath x)(\phi x)$ puede ser relevante cuando nos salgamos de los valores de verdad. Por ejemplo, Jorge IV deseó conocer si Scott era el autor de Waverley; es decir, él deseó saber si una proposición de la forma "$c = (\imath x)(\phi x)$" era verdadera. Pero no había proposición de la forma "$c = y$" relativa a lo que él deseaba conocer si era verdad.

Con respecto a las clases, la relevancia de su incompletitud es, en cierto modo, diferente. Ello puede ilustrarse por el hecho de que podemos tener

$$\hat{z}(\phi z) = \psi ! \hat{z} . \hat{z}(\phi z) = \chi ! \hat{z}$$

sin tener

$$\psi ! \hat{z} = \chi ! \hat{z}.$$

Pero, por una aplicación directa de las definiciones, encontramos que

$$\vdash : \hat{z}(\phi z) = \psi ! \hat{z} . \equiv . \phi x \equiv_x \psi ! x.$$

Así, pues, tendremos

$$\vdash : \phi x \equiv_x \psi ! x . \phi x \equiv_x \chi ! x . \supset . \hat{z}(\phi z) = \psi ! \hat{z} . \hat{z}(\phi z) = \chi ! \hat{z},$$

pero no necesariamente debemos tener $\psi ! \hat{z} = \chi ! \hat{z}$ bajo estas circunstancias, ya que dos funciones pueden muy bien ser formalmente equivalentes sin ser idénticas; por ejemplo

(49) Cf. p. 61.

$$x = \text{Scott} \,.\, \equiv_x \,.\, x = \text{el autor de Waverley},$$

pero la función "$\hat{z}$ = el autor de Waverley" tiene la propiedad de que Jorge IV deseó conocer si su valor con el argumento "Scott" era verdadero, mientras que la función "$\hat{z}$ = Scott" no tiene tal propiedad y, por lo tanto, las dos funciones no son idénticas. Por consiguiente, existe una función proposicional, a saber

$$x = y \,.\, x = z \,.\, \supset \,.\, y = z,$$

que es válida sin excepción alguna y, sin embargo, no es válida cuando sustituimos la x por una clase, o sustituimos la y y la z por funciones. Esto sólo es posible porque una clase es un símbolo incompleto y, por tanto, "$\hat{z}\,(\phi z) = \psi\,!\,z$" no es un valor de "$x = y$".

Se observará que "$\theta\,!\,\hat{z} = \psi\,!\,\hat{z}$" no es una función extensional de $\psi\,!\,\hat{z}$. Así, pues, el alcance de $\hat{z}\,(\phi z)$ es relevante al interpretar el producto

$$\hat{z}\,(\phi z) = \psi\,!\,\hat{z} \,.\, \hat{z}\,(\phi z) = \chi\,!\,\hat{z}.$$

Si tomamos la totalidad del producto como el alcance de $\hat{z}\,(\phi z)$, el producto es equivalente a

$$(\exists\theta) : \phi x \equiv_x \theta\,!\,x \,.\, \theta\,!\,\hat{z} = \psi\,!\,\hat{z} \,.\, \theta\,!\,\hat{z} = \chi\,!\,\hat{z},$$

y esto *hace* implicar

$$\psi\,!\,\hat{z} = \chi\,!\,\hat{z}.$$

En modo general, podemos decir que el hecho de que $\hat{z}\,(\phi z)$ sea un símbolo incompleto no es relevante, siempre que nos limitemos a las funciones extensionales de funciones, pero es apto para llegar a ser relevante en otras diferentes funciones de funciones.

PARTE I

LOGICA MATEMATICA

SUMARIO DE LA PARTE I

En esta Parte trataremos de los temas que tradicionalmente pertenecen a la lógica simbólica, o que merecen pertenecer a ella en virtud de su generalidad. Debemos establecer, por así decir, las propiedades de las proposiciones, funciones proposicionales, clases y relaciones, en la forma en que sean adecuadas para cualquier razonamiento matemático, y no sólo para una u otra rama de las matemáticas.

Los asuntos tratados en la Parte I pueden contemplarse bajo dos aspectos: 1) como una cadena deductiva apoyada sobre proposiciones primitivas, 2) como un cálculo formal. Adoptando el primer punto de vista comenzamos, en el número *1, con ciertos axiomas relativos a la deducción de una proposición, o de una función proposicional aseverada, a partir de otra. Desde estas proposiciones primitivas, que se ofrecen en la Sección A, deducimos varias proposiciones concernientes a cuatro modos de obtener proposiciones nuevas a partir de otras dadas; a saber, la negación, disyunción, conjunción e implicación, de las cuales las dos últimas pueden ser definidas en función de las dos primeras. A lo largo de esta primera sección, aunque (como se verá al principio de la Sección B) nuestras proposiciones –no cambiadas simbólicamente– se apliquen a cualesquiera proposiciones como valores de nuestras variables, sin embargo ha de suponerse que todas nuestras proposiciones variables son de las que llamaremos proposiciones *elementales,* es decir, aquellas que no contienen referencia, explícita o implícita, a ninguna totalidad. Esta restricción se impone debido a la distinción entre los diferentes *tipos* de proposiciones, explicada en el Capítulo II de la Introducción. No obstante, su importancia y objetivos son puramente filosóficos; por ello, en tanto se considere sólo el interés matemático, no es preciso recordar esta restricción preliminar en cuanto a las proposiciones elementales, la cual queda suprimida simbólicamente al comienzo de la sección próxima.

La Sección B trata, inicialmente, de las relaciones entre proposiciones que contienen variables aparentes (esto es, que entrañan las nociones de "todo" o "algún"), así como de éstas con las proposiciones que no contienen variables aparentes. Mostramos que, en donde intervienen proposiciones que contienen variables aparentes, podemos definir la negación, disyunción, conjunción, e implicación de tal forma que sus propiedades sean exactamente análogas a las propiedades de las correspondientes ideas, tal como se aplican a las proposiciones elementales. Enseñamos también que la *implicación formal,* es decir "$(x) . \phi x \supset \psi x$" considerada como una relación de $\phi\hat{x}$ a $\psi\hat{x}$, tiene muchas propiedades análogas a las de la *implicación material,* esto es, a "$p \supset q$" considerada como una relación de p a q. A

continuación, nos ocuparemos de las funciones *predicativas* y del *axioma de la reducibilidad,* que son indispensables en el empleo de las *funciones* como variables aparentes. Un ejemplo de tal empleo se ofrece en el caso de la *identidad,* que es el asunto siguiente que se considera en la Sección B. Finalmente, esta sección se ocupa de las *descripciones,* es decir, de las frases de la forma "el tal y cual" (en singular). Se muestra que la apariencia de un sujeto gramatical de la forma "el tal y cual" es engañosa, y que tales proposiciones, consideradas en su totalidad, no contienen tal sujeto, sino que en cambio contienen una variable aparente.

La Sección C trata de las clases y de las relaciones en tanto que son análogas a las clases. Las clases y relaciones, así como las descripciones, se muestran como "símbolos incompletos" (cf. Introducción, Capítulo III); también se muestra que una proposición que gramaticalmente está en conexión con una clase debe ser considerada como algo realmente relacionado con una función proposicional y con una variable aparente cuyos valores sean funciones proposicionales *predicativas* (con un resultado similar para las relaciones). El resto de la Sección C trata del cálculo de clases, y del cálculo de relaciones en cuanto que es análogo al de clases.

La Sección D versa sobre aquellas propiedades de las relaciones que no tienen su análoga en las clases. En esta sección se introducen un número de ideas y notaciones que son constantemente necesarias a lo largo del resto de este libro. Muchas de las propiedades de las relaciones que tienen análogas en la teoría de clases son comparativamente de poca importancia, mientras que aquellas que no tienen análogas son de la mayor utilidad. Es en parte por esta razón por lo que el énfasis puesto especialmente en el cálculo de la lógica simbólica ha resultado ser un obstáculo, hasta ahora, para el adecuado desarrollo de la teoría de relaciones.

La Sección E, finalmente, extiende las nociones de adición y multiplicación de clases o de relaciones a los casos en donde los sumandos o factores no se dan individualmente sino como miembros de alguna clase. La ventaja obtenida por esta ampliación es que nos capacita para tratar acerca de un número infinito de sumandos o factores.

Considerada como un cálculo formal, la lógica matemática tiene tres ramas que son análogas, a saber: 1) el cálculo de proposiciones, 2) el cálculo de clases, y 3) el cálculo de relaciones. De éstas, la 1) se trata en la Sección A, mientras que la 2) y la 3), en tanto que son análogas, se consideran en la Sección C. Para cada una de las tres tenemos las cuatro ideas análogas de negación, adición, multiplicación, e implicación o inclusión. De éstas, la negación es análoga a la noción de negativo del álgebra ordinaria, y la implicación o inclusión es análoga a la relación "menor que o igual a" del álgebra ordinaria. Pero la analogía no debe forzarse, ya que tiene importantes limitaciones. La suma de dos proposiciones es su disyunción, la suma de dos clases es la clase de los términos que pertenecen a una u otra, la suma de dos relaciones es la relación que consiste en el hecho de que sea válida una u otra relación. La suma de una clase de clases es la clase de todos los términos pertenecientes a una u otra de las clases, y la suma de una clase de relaciones es la relación

que consiste en el hecho de que sea válida alguna relación de la clase. El producto de dos proposiciones es su conjunción aseverada; el producto de dos clases es su parte común; el producto de dos relaciones es la relación que consiste en el hecho de que son válidas juntamente ambas relaciones. El producto de una clase de clases es la parte común de todas ellas, y el producto de una clase de relaciones es la relación que consiste en el hecho de que son válidas todas las relaciones de la clase en cuestión. La inclusión de una clase en otra consiste en el hecho de que todos los miembros de una son miembros de la otra, mientras que la inclusión de una relación en otra consiste en el hecho de que cada par de términos entre los que hay una relación también tienen la otra relación. Se puede, entonces, mostrar que las propiedades de la negación, suma, multiplicación e inclusión son exactamente análogas para las clases y las relaciones, y son, con ciertas excepciones, análogas a las propiedades de la negación, adición, multiplicación e implicación para las proposiciones. (Las excepciones surgen principalmente del hecho de que "*p* implica *q*" es en sí misma una proposición, y puede, por tanto, implicar y ser implicada, mientras que "α está contenida en β", en donde α y β son clases, no es una clase y, por tanto, ni puede contener ni ser contenida en otra clase γ). Pero las clases tienen ciertas propiedades que no poseen las proposiciones: ellas surgen del hecho de que las clases no tienen una división *doble* –correspondeiente a la división de las proposiciones en verdaderas o falsas–, sino una división *triple,* a saber, en 1) la clase universal, que contiene la totalidad de miembros de un cierto tipo, 2) la clase nula, que no tiene miembros, y 3) todas las demás clases que ni contienen nada ni contienen todo lo de un tipo adecuado. Las propiedades correspondientes de las clases, que no sean análogas a las propiedades de las proposiciones, se tratan en el *24. Y lo mismo que las clases tienen propiedades que no son análogas a ninguna propiedad de las proposiciones, también las relaciones tienen propiedades que no son análogas a ninguna propiedad de las clases, aunque todas las propiedades de las clases tengan análogas entre las de las relaciones. Las propiedades especiales de las relaciones son mucho más numerosas e importantes que las propiedades que pertenecen a las clases, pero no a las proposiciones. Estas propiedades especiales de las relaciones ocupan, por lo tanto, una sección completa, que es la Sección D.

SECCION A

LA TEORIA DE LA DEDUCCION

El objeto de esta sección es exponer la primera etapa de la deducción de la matemática pura desde sus fundamentos lógicos. Esta primera etapa está necesariamente vinculada con la deducción misma, es decir, con los principios por los cuales las conclusiones se infieren de las premisas. Si nuestro objetivo es aclarar todos nuestros supuestos y efectuar la deducción de todas las demás proposiciones a partir de estos supuestos, es obvio que los primeros supuestos que necesitamos son aquellos que se precisan para hacer posible la deducción. Frecuentemente se considera a la lógica simbólica como constituida por dos partes en coordinación: la teoría de clases y la teoría de proposiciones. Pero, desde nuestro punto de vista, estas dos partes no están coordinadas; y ello es así porque en la teoría de clases deducimos una proposición a partir de otra por medio de los principios que pertenecen a la teoría de las proposiciones, mientras que en la teoría de proposiciones en ninguna parte se requiere la teoría de clases. Por lo tanto, en un sistema deductivo la teoría de proposiciones precede necesariamente a la teoría de clases.

No es completamente adecuado que lo que se va a tratar a continuación se describa como la teoría de *proposiciones.* En realidad se trata de la teoría de cómo una proposición puede inferirse de otra. Ahora bien, a fin de que una proposición puede inferirse de otra es necesario que las dos deban tener la relación que hace de una la consecuencia de la otra. Cuando una proposición q es una consecuencia de una proposición p decimos que p *implica* q. Así, pues, la deducción se apoya sobre la relación de *implicación,* y cada sistema deductivo debe contener entre sus premisas tantas de las propiedades de la implicación como sean precisas para legitimar el procedimiento ordinario de deducción. En esta sección ciertas proposiciones se expondrán como premisas, y se mostrará que todas ellas son *necesarias,* aunque es posible que su número pueda disminuirse. Todo lo que se afirma en relación con las premisas es: 1) que son verdaderas, 2) que son suficientes para la teoría de la deducción, 3) que no sabemos cómo disminuir su número. Sin embargo, con respecto a 2) debe haber siempre un elemento de duda, puesto que es difícil asegurar que uno nunca usa inconscientemente algún principio. El hábito de guiarse rígidamente por las reglas simbólicas formales es una salvaguardia frente a las suposiciones inconscientes; pero ni siquiera esta salvaguardia es siempre suficiente.

*1. IDEAS Y PROPOSICIONES PRIMITIVAS

Ya que todas las definiciones de términos están afectadas por medio de otros términos, cada sistema de definiciones que no sea circular debe partir de una cierta provisión de términos no-definidos. Hasta cierto punto es opcional las ideas que tomemos como no-definidas en matemáticas; los motivos que guían nuestra elección serán: 1) conseguir el menor número posible de ideas no-definidas, y 2) entre dos sistemas en los que el número sea igual, elegir el que parezca más simple y más fácil. No conocemos el modo de probar que tal o cual sistema de ideas no-definidas contenga tan pocas como para dar tales o cuales resultados (50). Por ende, sólo podemos decir que tales o cuales ideas son no-definidas en un sistema tal o cual, pero no que ellas son indefinibles. Siguiendo a Peano, llamaremos a las ideas no-definidas y a las proposiciones no-demostradas, respectivamente, ideas *primitivas* y proposiciones *primitivas*. Las ideas primitivas *se explican* por medio de descripciones pensadas para indicar al lector lo que se quiso decir; pero las explicaciones no constituyen definiciones porque ellas realmente abarcan las ideas que explican.

En este número, primero enumeraremos las ideas primitivas necesarias en esta sección; a continuación, definiremos la *implicación*; y, después, enunciaremos las proposiciones primitivas requeridas en esta sección. Cada definición o proposición que aparece en el libro tiene un número, para que sirva de referencia. Siguiendo a Peano, emplearemos números que tienen una parte decimal así como una parte entera, con el objeto de poder intercalar nuevas proposiciones entre dos cualesquiera. Un cambio en la parte entera del número se empleará para que corresponda a un nuevo capítulo. Generalmente las definiciones tendrán números cuya parte decimal sea menor que ·1, y normalmente se pondrán al comienzo de los capítulos. Como referencia, las partes enteras de los números de las proposiciones se distinguirán porque están precedidas por un asterisco; así, pues, "*1·01" significa la definición o proposición así numerada, y "*1" significa el capítulo en el que las proposiciones tienen números cuya parte entera es 1, es decir, el presente capítulo. Generalmente a los capítulos se les llamará "números".

LAS IDEAS PRIMITIVAS

1) *Proposiciones elementales.* Por proposición "elemental" entendemos aquella que no contiene variable alguna; o, dicho de otra forma, que no entrañe palabras como "todo", "algún", "el", o equivalente a ellas. Una proposición tal como "esto

(50) Los métodos reconocidos de probar la independencia no son aplicables, sin reservas, a los fundamentos. Cf. *Principles of Mathematics*, § 17. Lo que hay que decir respecto de las proposiciones primitivas se aplica aún con más fuerza a las ideas primitivas.

es rojo", en donde "esto" es algo dado por la sensación, será elemental. Cualquier combinación de proposiciones elementales dadas, obtenida por medio de la negación, disyunción, o conjunción (véase después) será elemental. En las proposiciones primitivas que aparecen en este número, y, por tanto, en las deducciones que a partir de estas proposiciones primitivas se hagan en *2–*5, las letras *p, q, r, s* se usarán para significar proposiciones elementales.

2) *Funciones proposicionales elementales.* Por "función proposicional elemental" entendemos una expresión que contiene un constituyente indeterminado, es decir, una variable, o varios constituyentes tales que, cuando el constituyente indeterminado o los constituyentes se determinan (o sea, cuando se asignan valores a la variable o variables), el valor resultante de la expresión en cuestión es una proposición elemental. Así, pues, si p es una proposición elemental indeterminada, "no-p" es una función proposicional elemental.

Mostraremos en el *9 cómo extender los resultados de éste y de los siguientes números (*1–*5) a las proposiciones que no sean elementales.

3) *Aserción.* Cualquier proposición puede estar o aseverada o simplemente considerada. Si digo "César murió" afirmo la proposición "César murió"; pero si digo " 'César murió' es una proposición" hago una aserción diferente de la anterior, y, en este caso, "César murió" no está aseverada, sino meramente considerada. De manera similar, en una proposición hipotética, por ejemplo "si $a = b$, entonces $b = a$", tenemos dos proposiciones que no están aseveradas –a saber, "$a = b$" y "$b = a$"– mientras que lo que *se* afirma es que la primera de ellas implica la segunda. En el lenguaje, cuando una proposición está meramente considerada lo indicamos por "*si* tal y cual" o "*este* tal y cual", o simplemente por medio de comas invertidas. En cuanto a los símbolos, si p es una proposición, p por sí misma representará la proposición no aseverada mientras que la proposición aseverada se simbolizará por

$$\text{"}\vdash . p.\text{"}$$

El signo "$\vdash$" se llama signo de aserción (51); puede leerse por "es verdadero que" (aunque filosóficamente esto no es exactamente lo que significa). Los puntos después de el signo de aserción indican su rango; es decir, todo lo que le siga está aseverado hasta que alcancemos otro lugar en donde un número de puntos igual precede a un signo de aserción o al final de la sentencia. Así, pues, "$\vdash : p . \supset . q$" significa "es verdadero que p implica q" mientras que "$\vdash . p . \supset \vdash . q$" significa "$p$ es verdadero; por lo tanto q es verdadero" (52). La primera de ellas no supone necesariamente la verdad de p o de q, mientras que la segunda abarca la verdad de ambas.

---

(51) Hemos adoptado de Frege tanto la idea como el símbolo de aserción.

(52) Cf. *Principles of Mathematics,* § 38.

4) *Aserción de una función proposicional.* Además de la aserción de las proposiciones definidas necesitamos lo que denominamos "aserción de una función proposicional". La noción general de la aserción de *cualquier* función proposicional no se emplea hasta el *9, pero al mismo tiempo usamos la noción de aseverar varias proposiciones *elementales* especiales. Sea ϕx una función proposicional cuyo argumento es x; entonces, podemos aseverar ϕx sin asignar un valor a x. Esto se hace, por ejemplo, cuando la ley de identidad se asevera en la forma "A es A". Aquí, A queda indeterminada porque, aun cuando A pueda estar determinada, el resultado será verdadero. De este modo, cuando aseveramos ϕx, dejando la x indeterminada, afirmamos un valor ambiguo de nuestra función. Esto sólo es legítimo si, aunque se pueda determinar la ambigüedad, el resultado es verdadero. Así, tomemos como ilustración la proposición *1·2, que se expondrá más adelante; a saber

$$\text{"} \vdash : p \vee p . \supset . p \text{,"}$$

esto es, "'p o p' implica p". Aquí, p puede ser una proposición elemental *cualquiera*; dejando p indeterminada, obtenemos una aserción que puede aplicarse a una proposición elemental particular cualquiera. Tales aserciones son semejantes a los enunciados particulares de la geometría euclidea: cuando se dice "sea *ABC* un triángulo isósceles; entonces, los ángulos en la base serán iguales", lo que se dice se aplica a un triángulo isósceles *cualquiera*; esto se expresa refiriéndolo a *un* triángulo, pero no a uno en particular. Todas las aserciones que figuran en este trabajo, con muy pocas excepciones, aseveran funciones proposicionales, y no proposiciones definidas.

En realidad, una proposición elemental constante no se presentará en este trabajo, ni en cualquier otro que emplee sólo ideas lógicas. Las ideas y las proposiciones de la lógica son todas *generales*: una aserción (por ejemplo) que es verdad de Sócrates pero no de Platón, no pertenecerá a la lógica (53); y si una aserción que es verdad de ambos se presenta en la lógica, no debe hacerse más que refiriéndola a una variable x. A fin de obtener, en lógica, una proposición definida en vez de una función proposicional, es necesario tomar alguna función proposicional y aseverar lo que es verdad siempre o algunas veces, esto es, con todos los valores posibles de la variable o con algún valor posible. De este modo, dando el nombre de "individual" a todo lo que no es ni proposición ni función, la proposición "cada individual es idéntico consigo mismo" o la proposición "existen individuales" serán proposiciones pertenecientes a la lógica. Pero estas proposiciones no son elementales.

5) *Negación.* Si p es una proposición, la proposición "no-p", o "p es falsa" se representará por "$\sim p$". De momento, p deberá ser una proposición *elemental.*

6) *Disyunción.* Si p y q son proposiciones cualesquiera, la proposición "p o q", esto es, "p es verdadera o q es verdadera", en donde las alternativas no se excluyen

(53) Cuando decimos que una proposición "pertenece a la lógica" queremos significar que puede ser expresada en términos de las ideas primitivas de la lógica. Lo que no damos a entender es que la lógica *se* ocupa de ella porque, desde luego, eso debe ser verdad para toda proposición.

mútuamente, se representará por

$$\text{“}p \vee q\text{”}$$

Esto se llama la *disyunción* o la *suma lógica* de p y q. Así, pues, “$\sim p \vee q$” significa “p es falsa o q es verdadera”; “$\sim (p \vee q)$” significa “es falso que p o q sea verdadero”, que es equivalente a “p y q son ambos falsos”; “$\sim (\sim p \vee q)$” significa “es falso que p es falso o q es falso”, lo cual es equivalente a “p y q son ambos verdaderos”; y así sucesivamente. De momento, p y q deben ser proposiciones elementales.

Todas las ideas primitivas expuestas arriba se necesitan en la teoría de la deducción. Otras ideas primitivas se introducirán en la Sección B.

Definición de la implicación. Cuando una proposición q se sigue de una proposición p, de forma que si p es verdadera, q debe ser también verdadera, decimos que p *implica* q. La idea de implicación, en la forma en que requerimos, puede definirse. El significado que se da a la implicación en lo que sigue puede, a primer vista, parecer en cierto modo artificial; pero aunque hay otros significados legítimos, el que hemos adoptado aquí es mucho más conveniente para nuestros propósitos que cualquier otro. La propiedad esencial que requerimos de la implicación es ésta: “Lo que está implicado por una proposición verdadera es verdadero”. En virtud de esta propiedad es por lo que la implicación logra las pruebas. Pero esta propiedad de ninguna manera determina si algo (y si así es, el qué) está implicado por una proposición falsa. Lo que ella determina es que, si p implica q, entonces no puede darse el caso de que p sea verdadero y q sea falso; esto es, debe darse el caso de que p sea falso o q sea verdadero. La interpretación más conveniente de la implicación es decir, por el contrario que si p es falso o q es verdadero, entonces “p implica q” es verdadero. Por lo tanto, “p implica q” debe definirse con la significación: “o p es falso o q es verdadero”. Por consiguiente, ponemos

$$*1{\cdot}01.\quad p \supset q .=. \sim p \vee q \quad \text{Df.}$$

Aquí, las letras “*Df*” significan “definición”. Estas letras juntamente con el signo de igualdad se consideran que forman un solo símbolo, significando “se define para significar” (54). Lo que venga a la izquierda del signo de igualdad se define de forma que signifique lo mismo que lo que venga a su derecha. La definición no se encuentra entre las ideas primitivas, porque las definiciones tienen relación exclusivamente con el simbolismo y no con lo que se simboliza; se introducen por conveniencia práctica aunque teóricamente no son necesarias.

En virtud de la definición dada, cuando se tiene “$p \supset q$”, entonces o p es falso o q es verdadero; por tanto, si p es verdadero, q debe ser verdadero. De este modo, la definición anterior preserva la característica esencial de la implicación; ella da, de hecho, el significado general más compatible con el mantenimiento de esta característica.

(54) El signo de igualdad no seguido por las letras “Df” tiene un significado diferente, que se definirá más adelante.

LAS PROPOSICIONES PRIMITIVAS

***1·1.** Todo lo implicado por una proposición elemental verdadera es verdadero. P_p (55).

Este principio se extenderá en el *9 a proposiciones que no son elementales. No es lo mismo que "*si p* es verdadero, entonces *si p* implica *q*, *q* es verdadero". Esta es una proposición verdadera, pero tiene validez igualmente cuando *p* no es verdadero y cuando *p* no implica *q*. Ello no nos capacita, al igual que con el principio que nos ocupa, para aseverar simplemente *q*, sin ninguna hipótesis. No podemos expresar simbólicamente el principio porque, en cierto modo, cualquier simbolismo en el que *p* es variable sólo ofrece la *hipótesis* de que *p* sea verdadero, pero no el *hecho* de que sea verdadero (56).

El principio anterior se usa dondequiera que tengamos que deducir una *proposición* a partir de una *proposición*. Pero la inmensa mayoría de las aserciones que figuran en este trabajo son aserciones de funciones proposicionales, esto es, que contienen una variable indeterminada. Dado que la aserción de una función proposicional es una idea primitiva distinta de la aserción de una proposición, requerimos una proposición primitiva diferente de la *1·1, aunque allegada a ella, para permitirnos deducir de las aserciones de dos funciones proposicionales, la "ψx" y la "$\phi x \supset \psi x$". Esta proposición primitiva es como sigue:

***1·11.** Cuando ϕx puede aseverarse, siendo x una variable real, y $\phi x \supset \psi x$ puede aseverarse, siendo x una variable real, entonces ψx puede aseverarse, siendo x una variable real. P_p.

Este principio también es aplicable en las funciones de varias variables.

Parte de la importancia de esta proposición primitiva radica en el hecho de que expresa mediante símbolos un resultado siguiendo la teoría de tipos, que requiere un reconocimiento simbólico. Supóngase que tenemos las dos aserciones de *funciones proposicionales* "$\vdash . \phi x$" y "$\vdash . \phi x \supset \psi x$"; entonces la "$x$" en ϕx no es absolutamente nada, sino algo que utilizado como argumento hace que la función "ϕx" sea significante; de manera similar, en "$\phi x \supset \psi x$", la x es algo por el cual "$\phi x \supset \psi x$" es significante. Aparte de algún axioma, no sabemos si las x's por las que se hace significante "$\phi x \supset \psi x$" son las mismas que éstas por las que "ϕx" se hace significante. La proposición primitiva *1·11, (por la cual podemos asegurar que, como resultado de las aserciones de las *funciones proposicionales* "ϕx" y "$\phi x \supset \psi x$", también puede aseverarse la función proposicional ψx), asegura un reconocimiento parcial simbólico, de la manera más práctica en deducciones reales, de un importante principio que proviene de la teoría de tipos; este principio es: si hay un solo argumento a por el cual tanto "ϕa" como "ψa" son significantes, entonces el rango de los argumentos por los que "ϕx" es significante es el mismo rango de los

(55) Las letras "P_p", siguiendo a Peano, significan "proposición primitiva".

(56) Para más detalles sobre este principio, cf. *Principles of Mathematics* § 38.

argumentos por los cuales "ψx" es significante. Es obvio que, si la función proposicional "$\phi x \supset \psi x$" puede aseverarse, debe haber argumentos a por lo que "$\phi a \supset \psi a$" es significante, y por los cuales, por lo tanto, "ϕa" y "ψa" deben ser significantes. Por ende, en virtud de nuestro principio, los valores de x por los que "ϕx" es significante son los mismos que aquellos por los que "ψx" es significante; esto es, el tipo de los posibles argumentos para $\phi \hat{x}$ (cf. p. 69) es el mismo que el de los posibles argumentos para $\psi \hat{x}$. Debido a que la proposición primitiva $*1{\cdot}11$ expone una importante consecuencia práctica de este hecho, se le llama "el axioma de la identificación del tipo".

Otra consecuencia del principio es que, si hay un argumento a por el cual ϕa y ψa son significantes, entonces ϕx es significante, siempre que ψx sea significante, y viceversa; esto se dará en el "axioma de la identificación de variables reales", introducido en el $*1{\cdot}72$. Estas dos proposiciones, $*1{\cdot}11$ y $*1{\cdot}72$, proporcionan lo que simbólicamente es esencial para conducir las demostraciones de acuerdo con la teoría de tipos.

La proposición $*1{\cdot}11$ se usa en cada inferencia desde una función proposicional aseverada a otra. Ilustraremos el empleo de esta proposición exponiendo con detalle el procedimiento en la prueba en donde se use por primera vez, o sea en la $*2{\cdot}06$. Esa proposición es

$$\text{"}\vdash :. p \supset q . \supset : q \supset r . \supset . p \supset r .\text{"}$$

Ya hemos probado en la $*2{\cdot}05$ la proposición

$$\vdash :. q \supset r . \supset : p \supset q . \supset . p \supset r .$$

Es obvio que la $*2{\cdot}06$ resulta de la $*2{\cdot}05$ por medio de la $*2{\cdot}04$, la cual es

$$\vdash :. p . \supset . q \supset r : \supset : q . \supset . p \supset r .$$

Pero si, en esta proposición, sustituimos p por $p \supset r$, q por $p \supset q$, y r por $p \supset r$, obtenemos, como un caso de la $*2{\cdot}04$, la proposición

$$\vdash :: q \supset r . \supset : p \supset q . \supset . p \supset r :. \supset :. p \supset q . \supset : q \supset r . \supset . p \supset r \qquad (1),$$

y aquí la hipótesis se asevera por $*2{\cdot}05$. Por consiguiente, nuestra proposición primitiva $*1{\cdot}11$ nos capacita para aseverar la conclusión.

$*1{\cdot}2$. $\vdash : p \vee p . \supset . p$ Pp.

Esta proposición enuncia: "Si p es verdadero o p es verdadero, entonces p es verdadero". Se denomina "principio de tautología", y se citará por el título abreviado de "Taut". Es conveniente, para propósitos de referencia, dar nombres a unas cuantas de las más importantes proposiciones; en general, las referencias a las proposiciones se harán mediante números.

$*1{\cdot}3$. $\vdash : q . \supset . p \vee q$ Pp.

Este principio establece: "Si q es verdadero, entonces 'p o q' es verdadero". Así, por ejemplo, si q es "hoy es miércoles" y p es "hoy es martes", el principio expresa: "si hoy es miércoles, entonces hoy es o martes o miércoles". Se llama el "principio

de adición" porque declara que si una proposición es verdadera puede añadírsele cualquier alternativa sin hacerla falsa. La referencia a este principio será "Add".

*1·4. $\vdash : p \vee q . \supset . q \vee p$ Pp.

Este principio dice que "p o q" implica "q o p". Enuncia la ley permutativa para la adición lógica de proposiciones, y se llama el "principio de permutación". La referencia a este principio será "Perm".

*1·5. $\vdash : p \vee (q \vee r) . \supset . q \vee (p \vee r)$ Pp.

Este principio expresa: "Si p es verdadero o 'q o r' es verdadero, entonces o q es verdadero o 'p o r' es verdadero". Es una forma de la ley asociativa para la adición lógica, y se llama "principio asociativo". La referencia a él se hará como "Assoc". La proposición

$$p \vee (q \vee r) . \supset . (p \vee q) \vee r,$$

que debía ser la forma natural de la ley asociativa, tiene menos poder deductivo y, por lo tanto, no se considera como una proposición primitiva.

*1·6. $\vdash :. q \supset r . \supset : p \vee q . \supset . p \vee r$ Pp.

Este principio dice: "Si q implica r, entonces 'p o q' implica 'p o r' ". En otras palabras, en una implicación, una alternativa puede añadirse a la premisa y a la conclusión sin deteriorar la verdad de la implicación. El principio se llama el "principio de sumación" y quedará referenciado por "Sum".

*1·7. Si p es una proposición elemental, $\sim p$ es una proposición elemental. Pp.

*1·71. Si p y q son proposiciones elementales, $p \vee q$ es una proposición elemental. Pp.

*1·72. Si ϕp y ψp son funciones proposicionales elementales que toman proposiciones elementales como argumentos, $\phi p \vee \psi p$ es una función proposicional elemental. Pp.

Este axioma es aplicable también a funciones de dos o más variables. Se llama el "axioma de la identificación de las variables reales". Se observará que si ϕ y ψ son funciones que toman argumentos de diferentes tipos, no hay una función tal como "$\phi x \vee \psi x$", porque ϕ y ψ no pueden tener significativamente el mismo argumento. Una forma más general del axioma último se dará en el *9.

El uso de los axiomas *1·7·71·72 generalmente será tácito. Sólo a través de ellos, así como de los axiomas del *9, se hace relevante la teoría de tipos explicada en la introducción. Cualquier punto de vista de la lógica que justifique estos axiomas justifica el subsiguiente razonamiento tal como lo emplea la teoría de tipos.

Esto completa la lista de las proposiciones primitivas que necesita la teoría de la deducción, tal como se aplica a las proposiciones elementales.

*2. CONSECUENCIAS INMEDIATAS DE LAS PROPOSICIONES PRIMITIVAS

Sumario de *2.

Las pruebas de las primeras proposiciones de este número consisten simplemente en advertir que son casos de las reglas generales dadas en *1. En tales casos, estas reglas no son premisas, ya que aseveran cualquier ejemplo de ellas, y nada más que sus ejemplos. Por tanto, cuando en las primeras pruebas se aduzca una regla general, la alusión se hará entre corchetes (57), con las indicaciones pertinentes cuando sea preciso por lo que se refiere a cambio de letras respecto de las dadas en la regla aplicable al caso considerado. Así, "Taut$\frac{\sim p}{p}$" significa que se opera "Taut" cuando se escribe $\sim p$ en lugar de p. Si "Taut$\frac{\sim p}{p}$" se encierra entre corchetes antes de una proposición aseverada, eso significa que, de acuerdo con "Taut", aseveramos que se realiza "Taut" cuando se escribe $\sim p$ en lugar de p. El reconocimiento de que cierta proposición es un caso de alguna proposición general previamente comprobada o supuesta, es esencial para el proceso de deducción a partir de las reglas generales, pero ella no puede en sí misma erigirse en regla general, ya que la aplicación requerida es particular, y una regla general no puede incluir *explícitamente* una aplicación particular.

Nuevamente, cuando dos conjuntos diferentes de símbolos expresan la misma proposición en virtud de una definición —digamos, la *1·01— y una de ellas, a la que llamaremos 1), ha sido aseverada, la aserción de la otra se hace escribiendo "[(1) . (*1·01)]" antes de ella; con esto se da a entender que, en virtud de la *1·01, el nuevo conjunto de símbolos asevera la misma proposición que estaba aseverada en 1). Una referencia a una definición se distingue de una referencia a una proposición anterior porque se encierra entre paréntesis curvos.

Las proposiciones que figuran en este número son todas, o casi todas, realmente necesarias para las deducciones de matemáticas, basándonos en nuestras proposiciones primitivas. Aunque gradualmente se introducirán ciertos procesos en forma abreviada, las pruebas se ofrecerán de una forma completa, porque la importancia de esta cuestión no estriba en las proposiciones en cuanto tales, sino 1) en el hecho

(57) Más adelante dejaremos de señalar la diferencia entre una premisa y una regla de acuerdo con la que se guía una inferencia. Esta distinción es sólo importante en las primeras pruebas.

de que ellas se derivan de proposiciones primitivas, 2) en el hecho de que, generalmente, el propio proceso constituye el ejemplo más fácil, simple y elemental del método simbólico de versar sobre los principios de la matemática. Las últimas partes –teorías de clases, relaciones, números cardinales, series, números ordinales, geometría, etc.– emplean todas el mismo método, pero con una complejidad cada vez mayor, en los elementos y funciones considerados.

Las más importantes proposiciones probadas en este número son las siguientes:

***2·02.** $\vdash : q . \supset . p \supset q$

Es decir, q implica que p implica q; esto es, una proposición verdadera es implicada por cualquier proposición. A esta proposición se le llama el "principio de simplificación" (su referencia es "Simp"), porque, como aparecerá más adelante, nos capacita para pasar de la aserción de la unión de q y p a la aserción de simplemente q. Teniendo en cuenta el significado que le hemos dado a la implicación, se verá que esta proposición es obvia.

***2·03.** $\vdash : p \supset \sim q . \supset . q \supset \sim p$
***2·15.** $\vdash : \sim p \supset q . \supset . \sim q \supset p$
***2·16.** $\vdash : p \supset q . \supset . \sim q \supset \sim p$
***2·17.** $\vdash : \sim q \supset \sim p . \supset . p \supset q$

Estas cuatro proposiciones análogas constituyen el "principio de la transposición", cuya referencia es "Transp". Ellas nos llevan a la regla de que en una implicación pueden intercambiarse sus dos miembros, convirtiendo lo negativo en positivo, y lo positivo en negativo. Por ello, resultan análogas a la regla algebráica de que los dos miembros de una ecuación pueden intercambiarse cambiando los signos.

***2·04.** $\vdash :. p . \supset . q \supset r : \supset : q . \supset . p \supset r$

Este se llama el "principio conmutativo" (referencia: "Comm"). Establece que, si r se sigue de q, supuesto p verdadero, entonces r se sigue de p, con tal que q sea verdadero.

***2·05.** $\vdash :. q \supset r . \supset : p \supset q . \supset . p \supset r$
***2·06.** $\vdash :. p \supset q . \supset : q \supset r . \supset . p \supset r$

Estas dos proposiciones son las fuentes del silogismo en Bárbara (tal como probaremos más adelante) y, por ello, se denominan los "principios del silogismo" (su referencia es "Syll"). La primera dice que si r se sigue de q, entonces si q se sigue de p, r se sigue de p. La segunda manifiesta lo mismo pero con las premisas intercambiadas.

***2·08.** $\vdash . p \supset p$

Es decir, cualquier proposición se implica a sí misma. Este se llama el "principio de identidad", y su referencia será "Id". No ha de confundirse con la "ley de identidad" (x es idéntica a x), aunque la ley de identidad se infiere de ella (cf. *13·15).

***2·21.** $\vdash : \sim p . \supset . p \supset q$

Esto es, una proposición falsa implica cualquier proposición.

Las últimas proposiciones de este número están, en general, subsumidas bajo forma de proposiciones en *3 ó *4, que ofrecen los mismos resultados en formas más compendiadas. Ahora pasamos a las deducciones formales.

***2·01.** $\vdash : p \supset \sim p . \supset . \sim p$

Esta proposición establece que si p implica su propia falsedad, entonces p es falsa. Se llama el "principio de la *reductio ad absurdum*" y nos referiremos a él como "Abs" (58). La prueba es como sigue (en donde "*Dem*" es la abreviatura de "demostración"):

Dem.

$$\left[\text{Taut}\ \frac{\sim p}{p}\right] \vdash : \sim p \vee \sim p . \supset . \sim p \qquad (1)$$

$$[(1).(*1{\cdot}01)] \vdash : p \supset \sim p . \supset . \sim p$$

***2·02.** $\vdash : q . \supset . p \supset q$

Dem.

$$\left[\text{Add}\ \frac{\sim p}{p}\right] \vdash : q . \supset . \sim p \vee q \qquad (1)$$

$$[(1).(*1{\cdot}01)] \vdash : q . \supset . p \supset q$$

***2·03.** $\vdash : p \supset \sim q . \supset . q \supset \sim p$

Dem.

$$\left[\text{Perm}\ \frac{\sim p, \sim q}{p, \quad q}\right] \vdash : \sim p \vee \sim q . \supset . \sim q \vee \sim p \qquad (1)$$

$$[(1).(*1{\cdot}01)] \qquad \vdash : p \supset \sim q . \supset . q \supset \sim p$$

***2·04.** $\vdash :. p . \supset . q \supset r : \supset : q . \supset . p \supset r$

Dem.

$$\left[\text{Assoc}\ \frac{\sim p, \sim q}{p, \quad q}\right] \vdash :. \sim p \vee (\sim q \vee r) . \supset . \sim q \vee (\sim p \vee r) \qquad (1)$$

$$[(1).(*1{\cdot}01)] \qquad \vdash :. p . \supset . q \supset r : \supset : q . \supset . p \supset r$$

***2·05.** $\vdash :. q \supset r . \supset : p \supset q . \supset . p \supset r$

Dem.

$$\left[\text{Sum}\ \frac{\sim p}{p}\right] \vdash :. q \supset r . \supset : \sim p \vee q . \supset . \sim p \vee r \qquad (1)$$

$$[(1).(*1{\cdot}01)] \vdash :. q \supset r . \supset : p \supset q . \supset . p \supset r$$

***2·06.** $\vdash :. p \supset q . \supset : q \supset r . \supset . p \supset r$

Dem.

$$\left[\text{Comm}\ \frac{q \supset r, p \supset q, p \supset r}{p, \quad q, \quad r}\right] \vdash :: q \supset r . \supset : p \supset q . \supset . p \supset r :.$$

---

(58) Hay un interesante artículo histórico sobre este principio debido a Vailati, "A proposito d'un passo del Teeteto e di una dimostrazione di Euclide", *Rivista di Filosofia e scienze affine*, 1904.

$$\supset :. p \supset q . \supset : q \supset r . \supset . p \supset r \qquad (1)$$

[*2·05] $\vdash :. q \supset r . \supset : p \supset q . \supset . p \supset r \qquad (2)$

[(1).(2).*1·11] $\vdash :. p \supset q . \supset : q \supset r . \supset . p \supset r$

En la última línea de esta prueba, "(1).(2).*1·11" significa que estamos infiriendo de acuerdo con *1·11, teniendo ante nosotros una proposición, a saber, $p \supset q . \supset : q \supset r . \supset . p \supset r$, la cual, por (1), está implicada por $q \supset r . \supset : p \supset q . \supset . p \supset r$, la cual, en virtud de (2), es verdadera. En general, en tales casos, omitiremos la referencia a *1·11.

Las dos últimas proposiciones se conocerán como los "principios del silogismo" (en abreviatura, "Syll") porque, tal como aparecerá más adelante, el silogismo en Bárbara se deriva de ellos.

***2·07.** $\vdash : p . \supset . p \vee p \quad \left[*1{\cdot}3 \frac{p}{q}\right]$

Aquí no ponemos nada a continuación de "$*1 \cdot 3 \frac{p}{q}$" porque la proposición que se quiere probar es aquella en la que se convierte la *1·3 cuando se escribe p en lugar de q.

***2·08.** $\vdash . p \supset p$

Dem.

$\left[*2{\cdot}05 \frac{p \vee p,\ p}{q,\ r}\right]$ $\vdash :: p \vee p . \supset . p : \supset :. p . \supset . p \vee p : \supset . p \supset p \qquad (1)$

[Taut] $\vdash : p \vee p . \supset . p \qquad (2)$

[(1).(2).*1·11] $\vdash :. p . \supset . p \vee p : \supset . p \supset p \qquad (3)$

[*2·07] $\vdash : p . \supset . p \vee p \qquad (4)$

[(3).(4).*1·11] $\vdash . p \supset p$

***2·1.** $\vdash . \sim p \vee p$ [*2·08 . (*1·01)]

***2·11.** $\vdash . p \vee \sim p$

Dem.

$\left[\text{Perm} \frac{\sim p,\ p}{p,\ q}\right]$ $\vdash : \sim p \vee p . \supset . p \vee \sim p \qquad (1)$

[(1).*2·1.*1·11] $\vdash . p \vee \sim p$

Esta es la ley del medio excluso.

***2·12.** $\vdash . p \supset \sim(\sim p)$

Dem.

$\left[*2{\cdot}11 \frac{\sim p}{p}\right]$ $\vdash . \sim p \vee \sim(\sim p) \qquad (1)$

[(1).(*1·01)] $\vdash . p \supset \sim(\sim p)$

***2·13.** $\vdash . p \vee \sim\{\sim(\sim p)\}$

Esta proposición es un lema para *2·14 que, con *2·12, constituye el principio de la doble negación.

Dem.

$$\left[\text{Sum}\,\frac{\sim p,\ \sim\{\sim(\sim p)\}}{q,\quad r}\right] \quad \vdash :. \sim p . \supset . \sim\{\sim(\sim p)\} . \supset : p \vee \sim p . \supset . p \vee \sim\{\sim(\sim p)\} \tag{1}$$

$$\left[*2{\cdot}12\,\frac{\sim p}{p}\right] \quad \vdash : \sim p . \supset . \sim\{\sim(\sim p)\} \tag{2}$$

$$[(1).(2).*1{\cdot}11] \quad \vdash : p \vee \sim p . \supset . p \vee \sim\{\sim(\sim p)\} \tag{3}$$

$$[(3).*2{\cdot}11.*1{\cdot}11] \quad \vdash . p \vee \sim\{\sim(\sim p)\}$$

***2·14.** $\vdash . \sim(\sim p) \supset p$

Dem.

$$\left[\text{Perm}\,\frac{\sim\{\sim(\sim p)\}}{q}\right] \vdash : p \vee \sim\{\sim(\sim p)\} . \supset . \sim\{\sim(\sim p)\} \vee p \tag{1}$$

$$[(1).*2{\cdot}13.*1{\cdot}11] \quad \vdash . \sim\{\sim(\sim p)\} \vee p \tag{2}$$

$$[(2).(*1{\cdot}01)] \quad \vdash . \sim(\sim p) \supset p$$

***2·15.** $\vdash : \sim p \supset q . \supset . \sim q \supset p$

Dem.

$$\left[*2{\cdot}05\,\frac{\sim p,\ \sim(\sim q)}{p,\quad r}\right] \quad \vdash :. q \supset \sim(\sim q) . \supset : \sim p \supset q . \supset . \sim p \supset \sim(\sim q) \tag{1}$$

$$\left[*2{\cdot}12\,\frac{q}{p}\right] \quad \vdash . q \supset \sim(\sim q) \tag{2}$$

$$[(1).(2).*1{\cdot}11] \quad \vdash : \sim p \supset q . \supset . \sim p \supset \sim(\sim q) \tag{3}$$

$$\left[*2{\cdot}03\,\frac{\sim p,\ \sim q}{p,\quad q}\right] \quad \vdash : \sim p \supset \sim(\sim q) . \supset . \sim q \supset \sim(\sim p) \tag{4}$$

$$\left[*2{\cdot}05\,\frac{\sim q,\ \sim(\sim p),\ p}{p,\quad q,\quad r}\right] \vdash :. \sim(\sim p) \supset p . \supset : \sim q \supset \sim(\sim p) . \supset . \sim q \supset p \tag{5}$$

$$[(5).*2{\cdot}14.*1{\cdot}11] \quad \vdash : \sim q \supset \sim(\sim p) . \supset . \sim q \supset p \tag{6}$$

$$\left[*2{\cdot}05\,\frac{\sim p \supset q,\ \sim p \supset \sim(\sim q),\ \sim q \supset \sim(\sim p)}{p,\quad q,\quad r}\right] \vdash :: \sim p \supset \sim(\sim q) . \supset . \sim q \supset \sim(\sim p) : \supset :. \sim p \supset q . \supset . \sim p \supset \sim(\sim q) : \supset : \sim p \supset q . \supset . \sim q \supset \sim(\sim p) \tag{7}$$

$$[(4).(7).*1{\cdot}11] \quad \vdash :. \sim p \supset q . \supset . \sim p \supset \sim(\sim q) : \supset : \sim p \supset q . \supset . \sim q \supset \sim(\sim p) \tag{8}$$

$$[(3).(8).*1{\cdot}11] \quad \vdash : \sim p \supset q . \supset . \sim q \supset \sim(\sim p) \tag{9}$$

$$\left[*2{\cdot}05\,\frac{\sim p \supset q,\ \sim q \supset \sim(\sim p),\ \sim q \supset p}{p,\quad q,\quad r}\right] \vdash :: \sim q \supset \sim(\sim p) . \supset . \sim q \supset p : \supset :. \sim p \supset q . \supset . \sim q \supset \sim(\sim p) : \supset : \sim p \supset q . \supset . \sim q \supset p \tag{10}$$

$$[(6).(10).*1{\cdot}11] \vdash :. \sim p \supset q . \supset . \sim q \supset \sim(\sim p) : \supset : \sim p \supset q . \supset . \sim q \supset p \tag{11}$$

$$[(9).(11).*1{\cdot}11] \vdash : \sim p \supset q . \supset . \sim q \supset p$$

*Nota sobre la prueba de *2·15.* En la prueba que se acaba de exponer se observará que (3), (4) y (6) son, respectivamente, de las formas $p_1 \supset p_2, p_2 \supset p_3, p_3 \supset p_4$, siendo $p_1 \supset p_4$ la proposición que se quiere probar. A partir de $p_1 \supset p_2, p_2 \supset p_3, p_3 \supset p_4$ resulta la proposición $p_1 \supset p_4$ mediante aplicaciones repetidas de *2·05 ó *2·06 (ambas se llaman "Syll"). Resulta molesto e innecesario repetir este proceso cada vez que se tenga que emplear; por tanto, se abreviará según el esquema:

$$\text{"[Syll]} \vdash .(a).(b).(c).\supset \vdash .(d),"$$

en donde (a) es de la forma $p_1 \supset p_2$, (b) de la forma $p_2 \supset p_3$, (c) de la forma $p_2 \supset p_4$, (d) de la forma $p_1 \supset p_4$. El mismo esquema abreviado se aplicará a un sorites de cualquier extensión.

También, donde tengamos "$\vdash . p_1$" y "$\vdash . p_1 \supset p_2$" y p_2 sea la proposición que se quiere probar, es conveniente escribir simplemente

$$\begin{array}{ll} & \text{"}\vdash . p_1 . \supset \\ \text{[etc.]} & \qquad \vdash . p_2,\text{"} \end{array}$$

en donde "etc." será una referencia a las proposiciones previas en virtud de las cuales se sostiene "$p_1 \supset p_2$". Esta forma incorpora el uso de *1·11 ó *1·1, y realiza muchas pruebas siguiendo una manera más corta y al propio tiempo más fácil. Se hace uso de esto en las dos primeras líneas de la siguiente prueba

***2·16.** $\vdash : p \supset q . \supset . \sim q \supset \sim p$

Dem.

$$\begin{array}{ll} [*2{\cdot}12] & \vdash . q \supset \sim(\sim q) . \supset \\ [*2{\cdot}05] & \vdash : p \supset q . \supset . p \supset \sim(\sim q) \qquad (1) \\ \left[*2{\cdot}03 \dfrac{\sim q}{q}\right] & \vdash : p \supset \sim(\sim q) . \supset . \sim q \supset \sim p \qquad (2) \\ [\text{Syll}] & \vdash .(1).(2).\supset \vdash : p \supset q . \supset . \sim q \supset \sim p \end{array}$$

Nota. La proposición que se quiere probar se llamará "Prop". Cuando una prueba termina (como en el caso de *2·16) en una implicación entre proposiciones aseveradas, de las cuales el consecuente es la proposición que se quiere probar, escribiremos "$\vdash .$ etc. $\supset \vdash .$ Prop". Así, pues, "$\supset \vdash .$ Prop" da por terminada una proposición, y, más o menos, corresponde a las siglas "l.c.q.d." ("lo cual queda demostrado").

***2·17.** $\vdash : \sim q \supset \sim p . \supset . p \supset q$

Dem.

$$\begin{array}{ll} \left[*2{\cdot}03 \dfrac{\sim q, p}{p, q}\right] & \vdash : \sim q \supset \sim p . \supset . p \supset \sim(\sim q) \qquad (1) \\ [*2{\cdot}14] & \vdash : \sim(\sim q) \supset q : \supset \\ [*2{\cdot}05] & \vdash : p \supset \sim(\sim q) . \supset . p \supset q \qquad (2) \\ [\text{Syll}] & \vdash .(1).(2).\supset \vdash . \text{Prop} \end{array}$$

Las proposiciones *2·15, *2·16 y *2·17 son las formas del principio de la transposición, y haremos referencia a ellas mediante la expresión "Transp".

***2·18.** $\vdash : \sim p \supset p . \supset . p$

Dem.

$$
\begin{array}{ll}
[*2\cdot12] & \vdash . p \supset \sim(\sim p) . \supset \\
[*2\cdot05] & \vdash . \sim p \supset p . \supset . \sim p \supset \sim(\sim p) \qquad (1) \\
\left[*2\cdot01 \dfrac{\sim p}{p}\right] & \vdash : \sim p \supset \sim(\sim p) . \supset . \sim(\sim p) \qquad (2) \\
[\text{Syll}] & \vdash . (1) . (2) . \supset \vdash : \sim p \supset p . \supset . \sim(\sim p) \qquad (3) \\
[*2\cdot14] & \vdash . \sim(\sim p) \supset p \qquad (4) \\
[\text{Syll}] & \vdash . (3) . (4) . \supset \vdash . \text{Prop}
\end{array}
$$

Este es el complemento del principio de la *reductio ad absurdum*. Establece que una proposición que se sigue de la hipótesis de su propia falsedad es verdadera.

***2·2.** $\vdash : p . \supset . p \vee q$

Dem.

$$
\begin{array}{ll}
 & \vdash . \text{Add} . \supset \vdash : p . \supset . q \vee p \qquad (1) \\
[\text{Perm}] & \vdash : q \vee p . \supset . p \vee q \qquad (2) \\
[\text{Syll}] & \vdash . (1) . (2) . \supset \vdash . \text{Prop}
\end{array}
$$

***2·21.** $\vdash : \sim p . \supset . p \supset q \quad \left[*2\cdot2 \dfrac{\sim p}{p}\right]$

Estas dos últimas proposiciones se usan muy frecuentemente.

***2·24.** $\vdash : p . \supset . \sim p \supset q$ [*2·21 . Comm]

***2·25.** $\vdash :. p : \vee : p \vee q . \supset . q$

Dem.

$$
\begin{array}{ll}
 & \vdash . *2\cdot1 . \supset \vdash : \sim(p \vee q) . \vee . (p \vee q) : \\
[\text{Assoc}] & \supset \vdash : p . \vee . \{\sim(p \vee q) . \vee . q\} : \supset \vdash . \text{Prop}
\end{array}
$$

***2·26.** $\vdash :. \sim p : \vee : p \supset q . \supset . q \quad \left[*2\cdot25 \dfrac{\sim p}{p}\right]$

***2·27.** $\vdash :. p . \supset : p \supset q . \supset . q \quad$ [*2·26]

***2·3.** $\vdash : p \vee (q \vee r) . \supset . p \vee (r \vee q)$

Dem.

$$
\begin{array}{ll}
\left[\text{Perm} \dfrac{q, r}{p, q}\right] & \vdash : q \vee r . \supset . r \vee q : \\
\left[\text{Sum} \dfrac{q \vee r, r \vee q}{q, \quad r}\right] & \supset \vdash : p \vee (q \vee r) . \supset . p \vee (r \vee q)
\end{array}
$$

***2·31.** $\vdash : p \vee (q \vee r) . \supset . (p \vee q) \vee r$

Esta proposición, juntamente con la *2·32, constituye la ley asociativa de la suma lógica de proposiciones. En la prueba se empleará la siguiente forma abreviada

(que se usará constantemente en lo sucesivo) (59): Cuando tengamos una serie de proposiciones de la forma $a \supset b$, $b \supset c$, $c \supset d$, todas aseveradas, y "$a \supset d$" sea la proposición que se quiere probar, la prueba completa es la siguiente:

[Syll]	$\vdash :. a \supset b . \supset : b \supset c . \supset . a \supset c$	(1)
	$\vdash : a . \supset . b$	(2)
[(1).(2).*1·11]	$\vdash : b \supset c . \supset . a \supset c$	(3)
	$\vdash : b . \supset . c$	(4)
[(3).(4).*1·11]	$\vdash : a . \supset . c$	(5)
[Syll]	$\vdash :. a \supset c . \supset : c \supset d . \supset . a \supset d$	(6)
[(5).(6).*1·11]	$\vdash : c \supset d . \supset . a \supset d$	(7)
	$\vdash : c . \supset . d$	(8)
[(7).(8).*1·11]	$\vdash : a . \supset . d$	

Resulta molesto copiar este proceso por extenso; por lo tanto, escribiremos simplemente:

$$\vdash : a . \supset . b .$$
$$[\text{etc.}] \supset . c .$$
$$[\text{etc.}] \supset . d : \supset \vdash . \text{Prop},$$

en donde "$a \supset d$" es la proposición que que se quiere probar. Indicamos a la izquierda, mediante las referencias encerradas entre corchetes, las proposiciones en virtud de las cuales se siguen las implicaciones sucesivas. Ponemos un punto (no dos) después de la "b" para indicar que es b, y no "$a \supset b$", la que implica c. Pero ponemos dos puntos después de la d para señalar que, en este caso, nos referimos a toda la proposición "$a \supset d$". Si "$a \supset d$" no fuese la proposición que se quiere probar, pero ha de emplearse sucesivamente en la prueba, entonces pondremos:

$$\vdash : a . \supset . b .$$
$$[\text{etc.}] \supset . c .$$
$$[\text{etc.}] \supset . d \qquad (1),$$

en cuyo caso, (1) significa "$a \supset d$". La prueba de *2·31 es así:

Dem.

$$[*2{\cdot}3] \vdash : p \vee (q \vee r) . \supset . p \vee (r \vee q) .$$
$$\left[\text{Assoc} \frac{r,\ q}{q,\ r}\right] \qquad \supset . r \vee (p \vee q) .$$
$$\left[\text{Perm} \frac{r,\ p \vee q}{p,\ q}\right] \qquad \supset . (p \vee q) \vee r : \supset \vdash . \text{Prop}$$

***2·32.** $\vdash : (p \vee q) \vee r . \supset . p \vee (q \vee r)$

Dem.

$$\left[\text{Perm} \frac{p \vee q,\ r}{p,\ q}\right] \vdash : (p \vee q) \vee r . \supset . r \vee (p \vee q)$$

(59) Esta abreviatura es aplicable a los mismos tipos de casos a los que nos referíamos en la nota a *2·15, pero su empleo suele ser más conveniente que la forma abreviada explicada en dicha nota.

$$\left[\text{Assoc}\,\frac{r,\ p,\ q}{p,\ q,\ r}\right] \qquad \supset . p \vee (r \vee q)$$

[*2·3] $\qquad \supset . p \vee (q \vee r) : \supset \vdash .$ Prop

***2·33.** $p \vee q \vee r . = . (p \vee q) \vee r$ Df

Esta definición sólo sirve para evitar el empleo de paréntesis.

Dem.

[Perm] $\qquad \vdash : p \vee r . \supset . r \vee p :$

$$\left[\text{Syll}\,\frac{p \vee q,\ p \vee r,\ r \vee p}{p,\quad q,\quad r}\right] \supset \vdash :. p \vee q . \supset . p \vee r : \supset : p \vee q . \supset . r \vee p \qquad (1)$$

[Sum] $\qquad \vdash :. q \supset r . \supset : p \vee q . \supset . p \vee r \qquad (2)$

$\vdash . (1) . (2) .$ Syll $. \supset \vdash .$ Prop

***2·37.** $\vdash :. q \supset r . \supset : q \vee p . \supset . p \vee r$

[Syll . Perm . Sum]

***2·38.** $\vdash :. q \supset r . \supset : q \vee p . \supset . r \vee p$

[Syll . Perm . Sum]

Las pruebas de *3·37·38 son completamente análogas a la de *2·36. (Escribimos *2·37·38 como una forma abreviada de "*2·37 y *2·38". Estas abreviaturas se emplearán a lo largo de toda la obra).

El uso de un principio general de deducción, tal como otra forma de "Syll", en una prueba, es diferente del empleo de las premisas particulares a las que se le aplica el principio de deducción. El principio de deducción ofrece la regla general de acuerdo con la que se hace la inferencia, pero en sí mismo no es una premisa de la inferencia. Si lo tomásemos como premisa, necesitaríamos dicho principio, o si no alguna otra regla general que nos permita inferir la conclusión deseada; de este modo, conseguiríamos gradualmente una acumulación creciente de premisas sin llegar nunca a hacer alguna inferencia. Así, pues, cuando se cita una regla general, señalando gráficamente una inferencia, como, p. ej., cuando escribimos "[Syll] $\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash .$ Prop", la mención "Syll" sólo se pone para recordar al lector de qué modo se deduce la inferencia.

La regla de inferencia puede, sin embargo, figurar también como una de las premisas ordinarias, es decir que, p. ej., en el caso de "Syll", la proposición "$p \supset q . \supset : q \supset r . \supset . p \supset r$" puede ser una de aquellas a las que se aplican nuestras reglas de deducción, y, en este caso, sería una premisa ordinaria. El distinguir entre los dos usos de los principios de la deducción es de cierta importancia teórica; en las pruebas anteriores lo hemos indicado poniendo la regla de inferencia entre corchetes. Sin embargo, en la práctica, no resulta conveniente seguir diferenciándolo, en cierto modo, de la referencia. Por consiguiente, en lo sucesivo pondremos la cita de las premisas ordinarias entre corchetes, en donde corresponda, y citaremos las reglas de inferencia, junto con otras proposiciones, en las premisas aseveradas; es decir, escribiremos, p. ej.

"$\vdash . (1) . (2) .$ Syll $. \supset \vdash .$ Prop"

en vez de "[Syll] $\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash .$ Prop"

$*2{\cdot}4.$ $\vdash :. p . \vee . p \vee q : \supset . p \vee q$

Dem.

$\vdash . *2{\cdot}31 . \supset \vdash :. p . \vee . p \vee q : \supset : p \vee p . \vee . q :$
[Taut.$*2{\cdot}38$] $\supset : p \vee q :. \supset \vdash .$ Prop

$*2{\cdot}41.$ $\vdash :. q . \vee . p \vee q : \supset . p \vee q$

Dem.

$\left[\text{Assoc}\,\frac{q, p, q}{p, q, r}\right] \vdash :. q . \vee . p \vee q : \supset : p . \vee . q \vee q :$
[Taut.Sum] $\supset : p \vee q :. \supset \vdash .$ Prop

$*2{\cdot}42.$ $\vdash :. \sim p . \vee . p \supset q : \supset . p \supset q \quad \left[*2{\cdot}4\,\frac{\sim p}{p}\right]$

$*2{\cdot}43.$ $\vdash :. p . \supset . p \supset q : \supset . p \supset q \quad [*2{\cdot}42]$

$*2{\cdot}45.$ $\vdash : \sim(p \vee q) . \supset . \sim p \quad [*2{\cdot}2 . \text{Transp}]$

$*2{\cdot}46.$ $\vdash : \sim(p \vee q) . \supset . \sim q \quad [*1{\cdot}3 . \text{Transp}]$

$*2{\cdot}47.$ $\vdash : \sim(p \vee q) . \supset . \sim p \vee q \quad \left[*2{\cdot}45 . *2{\cdot}2\,\frac{\sim p}{p} . \text{Syll}\right]$

$*2{\cdot}48.$ $\vdash : \sim(p \vee q) . \supset . p \vee \sim q \quad \left[*2{\cdot}46 . *1{\cdot}3\,\frac{\sim q}{q} . \text{Syll}\right]$

$*2{\cdot}49.$ $\vdash : \sim(p \vee q) . \supset . \sim p \vee \sim q \quad \left[*2{\cdot}45 . *2{\cdot}2\,\frac{\sim p, \sim q}{p, q} . \text{Syll}\right]$

$*2{\cdot}5.$ $\vdash : \sim(p \supset q) . \supset . \sim p \supset q \quad \left[*2{\cdot}47\,\frac{\sim p}{p}\right]$

$*2{\cdot}51.$ $\vdash : \sim(p \supset q) . \supset . p \supset \sim q \quad \left[*2{\cdot}48\,\frac{\sim p}{p}\right]$

$*2{\cdot}52.$ $\vdash : \sim(p \supset q) . \supset . \sim p \supset \sim q \quad \left[*2{\cdot}49\,\frac{\sim p}{p}\right]$

$*2{\cdot}521.$ $\vdash : \sim(p \supset q) . \supset . q \supset p \quad [*2{\cdot}52{\cdot}17]$

$*2{\cdot}53.$ $\vdash : p \vee q . \supset . \sim p \supset q$

Dem.

$\vdash . *2{\cdot}12{\cdot}38 . \supset \vdash : p \vee q . \supset . \sim(\sim p) \vee q : \supset \vdash .$ Prop

$*2{\cdot}54.$ $\vdash : \sim p \supset q . \supset . p \vee q \quad [*2{\cdot}14{\cdot}38]$

$*2{\cdot}55.$ $\vdash :. \sim p . \supset : p \vee q . \supset . q \quad [*2{\cdot}53 . \text{Comm}]$

$*2{\cdot}56.$ $\vdash :. \sim q . \supset : p \vee q . \supset . p \quad \left[*2{\cdot}55\,\frac{q, p}{p, q} . \text{Perm}\right]$

$*2{\cdot}6.$ $\vdash :. \sim p \supset q . \supset : p \supset q . \supset . q$

Dem.

[$*2{\cdot}38$] $\vdash :. \sim p \supset q . \supset : \sim p \vee q . \supset . q \vee q$ (1)

[Taut . Syll] $\vdash :. \sim p \vee q . \supset . q \vee q : \supset : \sim p \vee q . \supset . q$ (2)

$\vdash .(1).(2).\mathrm{Syll}.\supset \vdash :.\sim p \supset q.\supset :\sim p \vee q.\supset .q :.\supset \vdash .\mathrm{Prop}$

***2·61.** $\vdash :.p \supset q.\supset :\sim p \supset q.\supset .q$ [*2·6 . Comm]

***2·62.** $\vdash :.p \vee q.\supset :p \supset q.\supset .q$ [*2·53·6 . Syll]

***2·621.** $\vdash :.p \supset q.\supset :p \vee q.\supset .q$ [*2·62 . Comm]

***2·63.** $\vdash :.p \vee q.\supset :\sim p \vee q.\supset .q$ [*2·62]

***2·64.** $\vdash :.p \vee q.\supset :p \vee \sim q.\supset .p$ $\left[*2{\cdot}63\,\frac{q,\ p}{p,\ q}\,.\,\mathrm{Perm}\right]$

***2·65.** $\vdash :.p \supset q.\supset :p \supset \sim q.\supset .\sim p$ $\left[*2{\cdot}64\,\frac{\sim p}{p}\right]$

***2·67.** $\vdash :.p \vee q.\supset .q :\supset .p \supset q$

Dem.

[*2·54.Syll] $\vdash :.p \vee q.\supset .q :\supset :\sim p \supset q.\supset .q$ (1)

[*2·24.Syll] $\vdash :.\sim p \supset q.\supset .q :\supset .p \supset q$ (2)

$\vdash .(1).(2).\mathrm{Syll}.\supset \vdash .\mathrm{Prop}$

***2·68.** $\vdash :.p \supset q.\supset .q :\supset .p \vee q$

Dem.

$\left[*2{\cdot}67\,\frac{\sim p}{p}\right] \vdash :.p \supset q.\supset .q :\supset .\sim p \supset q$ (1)

$\vdash .(1).*2{\cdot}54.\supset \vdash .\mathrm{Prop}$

***2·69.** $\vdash :.p \supset q.\supset .q :\supset :q \supset p.\supset .p$ $\left[*2{\cdot}68\,.\,\mathrm{Perm}\,.*2{\cdot}62\,\frac{q,\ p}{p,\ q}\right]$

***2·73.** $\vdash :.p \supset q.\supset :p \vee q \vee r.\supset .q \vee r$ [*2·621·38]

***2·74.** $\vdash :.q \supset p.\supset :p \vee q \vee r.\supset .p \vee r$ $\left[*2{\cdot}73\,\frac{q,\ p}{p,\ q}\,.\,\mathrm{Assoc}\,.\,\mathrm{Syll}\right]$

***2·75.** $\vdash ::p \vee q.\supset :.p.\vee .q \supset r :\supset .p \vee r$ $\left[*2{\cdot}74\,\frac{\sim q}{q}\,.*2{\cdot}53{\cdot}31\right]$

***2·76.** $\vdash :.p.\vee .q \supset r :\supset :p \vee q.\supset .p \vee r$ [*2·75 . Comm]

***2·77.** $\vdash :.p.\supset .q \supset r :\supset :p \supset q.\supset .p \supset r$ $\left[*2{\cdot}76\,\frac{\sim p}{p}\right]$

***2·8.** $\vdash :.q \vee r.\supset :\sim r \vee s.\supset .q \vee s$

Dem.

$\vdash .*2{\cdot}53\,.\,\mathrm{Perm}.\supset \vdash :.q \vee r.\supset :\sim r \supset q :$

[*2·38] $\supset :\sim r \vee s.\supset .q \vee s :.\supset \vdash .\mathrm{Prop}$

***2·81.** $\vdash ::q.\supset .r \supset s :\supset :.p \vee q.\supset :p \vee r.\supset .p \vee s$

Dem.

$\vdash .\mathrm{Sum}.\supset \vdash ::q.\supset .r \supset s :\supset :.p \vee q.\supset :p.\vee .r \supset s$ (1)

$\vdash .*2{\cdot}76\,.\,\mathrm{Syll}.\supset \vdash ::p \vee q.\supset :p.\vee .r \supset s :.\supset :.$

$p \vee q.\supset :p \vee r.\supset .p \vee s$ (2)

$\vdash .(1).(2).\supset \vdash .\mathrm{Prop}$

***2·82.** $\vdash :.p \vee q \vee r.\supset :p \vee \sim r \vee s.\supset .p \vee q \vee s$

$\left[*2{\cdot}8\,.*2{\cdot}81\,\frac{q \vee r,\ \sim r \vee s,\ q \vee s}{q,\quad r,\quad s}\right]$

***2·83.** $\vdash :: p . \supset . q \supset r : \supset :. p . \supset . r \supset s : \supset : p . \supset . q \supset s$

$$\left[*2{\cdot}82 \frac{\sim p,\ \sim q}{p,\quad q} \right]$$

***2·85.** $\vdash :. p \vee q . \supset . p \vee r : \supset : p . \vee . q \supset r$

Dem.

[Add.Syll] $\vdash :. p \vee q . \supset . r : \supset . q \supset r$ (1)

$\vdash . *2{\cdot}55 . \supset \vdash :: \sim p . \supset :. p \vee r . \supset . r :.$

[Syll] $\supset :. p \vee q . \supset . p \vee r : \supset : p \vee q . \supset . r :.$

[(1).*2·83] $\supset :. p \vee q . \supset . p \vee r : \supset : q \supset r$ (2)

$\vdash . (2) . \text{Comm} . \supset \vdash :. \quad p \vee q . \supset . p \vee r : \supset : \sim p . \supset . q \supset r :$

[*2·54] $\supset : p . \vee . q \supset r :. \supset \vdash . \text{Prop}$

***2·86.** $\vdash :. p \supset q . \supset . p \supset r : \supset : p . \supset . q \supset r$ $\left[*2{\cdot}85 \frac{\sim p}{p} \right]$

*3. EL PRODUCTO LOGICO DE DOS PROPOSICIONES

Sumario de *3.

El producto lógico de dos proposiciones, p y q, es, en la práctica, la proposición "p y q son ambas verdaderos". Pero esto, tal como se ha establecido, tendría que ser una nueva idea primitiva. Por tanto, adoptamos como producto lógico la proposición $\sim(\sim p \vee \sim q)$, esto es, "es falso que o p es falso o q es falso", lo cual es óbviamente verdadero cuando, y sólo cuando, p y q sean ambos verdaderos. Por lo tanto, ponemos:

***3·01.** $p.q. = .\sim(\sim p \vee \sim q)$ Df

en donde "$p . q$" es el producto lógico de p y q.

***3·02.** $p \supset q \supset r. = .p \supset q . q \supset r$ Df

Esta definición sirve meramente para abreviar las pruebas.

Cuando ofrecemos dos funciones proposicionales aseveradas "$\vdash . \phi x$" y "$\vdash . \psi x$", tendremos "$\vdash . \phi x . \psi x$" siempre que ϕ y ψ adopten argumentos del mismo tipo. Esto se probará en *9 para algunas funciones; por el momento, nos limitamos a las funciones proposicionales *elementales* de proposiciones elementales. En este caso, el resultado se prueba como sigue:

Por *1·7, $\sim \phi p$ y $\sim \psi p$, son funciones proposicionales elementales y, por lo tanto, por *1·72, $\sim \phi p \vee \sim \psi p$ es una función proposicional elemental. Por tanto, por *2·11,

$$\vdash : \sim \phi p \vee \sim \psi p . \vee . \sim(\sim \phi p \vee \sim \psi p).$$

Luego, en virtud de *2·32 y de *1·01,

$$\vdash :. \phi p . \supset : \psi p . \supset . \sim(\sim \phi p \vee \sim \psi p),$$

es decir, por *3·01,

$$\vdash :. \phi p . \supset : \psi p . \supset . \phi p . \psi p.$$

Por lo tanto, por *1·11, cuando tenemos "$\vdash . \phi p$" y "$\vdash \psi p$" tenemos "$\vdash . \phi p . \psi p$". Esta proposición es la *3·03. Debe entenderse, al igual que en la *1·72, que también es aplicable a funciones de dos o más variables.

Prácticamente, esta es la forma más útil del axioma de la identificación de variables reales (cf. *1·72). En la práctica, cuando se ha suprimido la restricción a las proposiciones *elementales* y a las funciones proposicionales, una manera adecuada por la que puede reconocerse que dos funciones adoptan argumentos del mismo tipo es el siguiente:

Si ϕx contiene, de cualquier modo, un constituyente $\chi(x, y, z, \ldots)$ y ψx contie-

ne, también de cualquier modo, un constituyente $\chi(x, u, v, \ldots)$, entonces tanto ϕx como ψx toman argumentos del tipo del argumento x en $\chi(x, y, z, \ldots)$, y por tanto, ϕx y ψx toman argumentos del mismo tipo. Por consiguiente, en tal caso, si pueden aseverarse ϕx y ψx, también puede aseverarse $\phi x \,.\, \psi x$.

Como ejemplo del empleo de esta proposición, tomemos la prueba de la *3·47. Allí probamos

$$\vdash :. p \supset r \,.\, q \supset s \,.\supset : p \,.\, q \,.\supset . q \,.\, r \qquad (1)$$

y

$$\vdash :. p \supset r \,.\, q \supset s \,.\supset : q \,.\, r \,.\supset . r \,.\, s \qquad (2)$$

y lo que deseamos probar es

$$p \supset r \,.\, q \supset s \,.\supset : p \,.\, q \,.\supset . r \,.\, s,$$

que es la *3·47. Ahora, en (1) y en (2), p, q, r, y s son proposiciones elementales (como en todas las partes de la Sección A); por tanto, mediante la *1·7·71 aplicada repetidamente, "$p \supset r \,.\, q \supset s \,.\supset : p \,.\, q \,.\supset . q \,.\, r$" y "$p \supset r \,.\, q \supset s \,.\supset s \,.\supset : q \,.\, r \,.\supset . r \,.\, s$" son funciones proposicionales elementales. Luego, por la *3·03, tenemos

$$\vdash :: p \supset r \,.\, q \supset s \,.\supset : p \,.\, q \,.\supset . q \,.\, r :. p \supset r \,.\, q \supset s \,.\supset : q \,.\, r \,.\supset . r \,.\, s,$$

por lo que el resultado se sigue de las *3·43 y *3·33.

Las principales proposiciones del presente número son las siguientes:

***3·2.** $\vdash :. p \,.\supset : q \,.\supset . p \,.\, q$

Esto es, "p implica que q implica $p \,.\, q$"; es decir, si cada una de dos proposiciones es verdadera, también lo es su producto lógico".

***3·26.** $\vdash : p \,.\, q \,.\supset . p$

***3·27.** $\vdash : p \,.\, q \,.\supset . q$

Esto es, si el producto lógico de dos proposiciones es verdadero, entonces cada una de las dos proposiciones es, separadamente, verdadera.

***3·3.** $\vdash :. p \,.\, q \,.\supset . r : \supset : p \,.\supset . q \supset r$

Esto es, si p y q, juntamente implican r, entonces p implica que q implica r. A este principio (siguiendo a Peano) se le llamará de "exportación", dado que q se "exporta" fuera de la hipótesis. La referencia a este principio se hará mediante las letras "Exp.".

***3·31.** $\vdash :. p \,.\supset . q \supset r : \supset : p \,.\, q \,.\supset . r$

Este es el correlativo del anterior, y (siguiendo a Peano) le llamaremos el "principio de importación" (referencia: "Imp").

***3·35.** $\vdash : p \,.\, p \supset q \,.\supset . q$

Esto es, "si p es verdadero, y q se sigue de él, entonces q es verdadero". A éste se le llamará el "principio de aserción" (referencia: "Ass"). Este difiere del *1·1 en el hecho de que no se aplica sólo cuando p sea realmente verdadero, sino que requiere sencillamente la *hipótesis* de que p sea verdadero.

***3·43.** $\vdash :. p \supset q . p \supset r . \supset : p . \supset . q . r$

Esto es, si una proposición implica a otras dos proposiciones, entonces implica a su producto lógico. A éste, Peano le llama el "principio de la composición". Nos referiremos a él mediante "Comp".

***3·45.** $\vdash :. p \supset q . \supset : p . r . \supset . q . r$

Esto es, ambos lados de una implicación pueden multiplicarse por un factor común. Peano le llama el "principio del factor". Nos referiremos a él como "Fact".

***3·47.** $\vdash :. p \supset r . q \supset s . \supset : p . q . \supset . r . s$

Esto es, si p implica q y r implica s, entonces p y q juntamente implican r y s juntamente. La ley de contradicción "$\vdash . \sim (p . \sim p)$", se prueba en este número (*3·24); no obstante, a pesar de su fama, hemos encontrado pocas ocasiones en donde emplearla.

***3·01.** $p . q . = . \sim (\sim p \vee \sim q)$ Df

***3·02.** $p \supset q \supset r . = . p \supset q . q \supset r$ Df

***3·03.** Dadas dos funciones proposicionales elementales aseveradas, "$\vdash . \phi p$" y "$\vdash . \psi p$", cuyos argumentos sean proposiciones elementales, tenemos $\vdash . \phi p . \psi p$.

Dem.

$\vdash . *1{\cdot}7{\cdot}72 . *2{\cdot}11 . \supset \vdash : \sim \phi p \vee \sim \psi p . \vee . \sim (\sim \phi p \vee \sim \psi p)$ (1)

$\vdash . (1) . *2{\cdot}32 . (*1{\cdot}01) . \supset \vdash :. \phi p . \supset : \psi p . \supset . \sim (\sim \phi p \vee \sim \psi p)$ (2)

$\vdash . (2) . (*3{\cdot}01) . \supset \vdash :. \phi p . \supset : \psi p . \supset . \phi p . \psi p$ (3)

$\vdash . (3) . *1{\cdot}11 . \supset \vdash .$ Prop

***3·1.** $\vdash : p . q . \supset . \sim (\sim p \vee \sim q)$ [Id . (*3·01)]

***3·11.** $\vdash : \sim (\sim p \vee \sim q) . \supset . p . q$ [Id . (*3·01)]

***3·12.** $\vdash : \sim p . \vee . \sim q . \vee . p . q$ $\left[*2{\cdot}11 \frac{\sim p \vee \sim q}{p}\right]$

***3·13.** $\vdash : \sim (p . q) . \supset . \sim p \vee \sim q$ [*3·11 . Transp]

***3·14.** $\vdash : \sim p \vee \sim q . \supset . \sim (p . q)$ [*3·1 . Transp]

***3·2.** $\vdash :. p . \supset : q . \supset . p . q$ [*3·12]

***3·21.** $\vdash :. q . \supset : p . \supset . p . q$ [*3·2 . Comm]

***3·22.** $\vdash : p . q . \supset . q . p$

Esta es una de las formas de la ley conmutativa de la multiplicación lógica. Una forma más completa se ofrece en *4·3.

Dem.

$\left[*3{\cdot}13 \frac{q, p}{p, q}\right] \vdash : \sim (q . p) . \supset . \sim q \vee \sim p .$

[Perm] $\supset . \sim p \vee \sim q .$

[*3·14] $\supset . \sim (p . q)$ (1)

$\vdash . (1) . \text{Transp} . \supset \vdash .$ Prop

Obsérvese que, en la última proposición, "(1)" significa la proposición

$$\text{“}\sim(q\,.\,p)\,.\supset.\sim(p\,.\,q),\text{”}$$

como se explicó en la prueba de la *2·31.

***3·24.** $\vdash.\sim(p\,.\sim p)$

Dem.

$$\left[*2{\cdot}11\,\frac{\sim p}{p}\right]\quad \vdash.\sim p\vee\sim(\sim p)\,.\supset$$
$$\left[*3{\cdot}14\,\frac{\sim p}{q}\right]\quad \vdash.\sim(p\,.\sim p)$$

Esta es la ley de contradicción.

***3·26.** $\vdash:p\,.\,q\,.\supset.\,p$

Dem.

$$\left[*2{\cdot}02\,\frac{q,\,p}{p,\,q}\right]\quad \vdash:p\,.\supset.\,q\supset p \qquad (1)$$
$$[(1).(*1{\cdot}01)]\quad \vdash:\sim p\,.\vee.\sim q\vee p:$$
$$[*2{\cdot}31]\quad \supset\vdash:\sim p\vee\sim q\,.\vee.\,p:$$
$$\left[*2{\cdot}53\,\frac{\sim p\vee\sim q,\,p}{p,\quad q}\right]\quad \supset\vdash:\sim(\sim p\vee\sim q)\,.\supset.\,p \qquad (2)$$
$$[(2).(*3{\cdot}01)]\quad \vdash:p\,.\,q\,.\supset.\,p$$

***3·27.** $\vdash:p\,.\,q\,.\supset.\,q$

Dem.

$$[*3{\cdot}22]\quad \vdash:p\,.\,q\,.\supset.\,q\,.\,p\,.$$
$$\left[*3{\cdot}26\,\frac{q,\,p}{p,\,q}\right]\quad \supset.\,q:\supset\vdash.\,\text{Prop}$$

Cada una de las dos proposiciones *3·26·27 se llamará el "principio de simplificación", al igual que la *2·02, de la que se deducen. La referencia a este principio será "Simp".

***3·3.** $\vdash:.p\,.\,q\,.\supset.\,r:\supset:p\,.\supset.\,q\supset r$

Dem.

$$[\text{Id.}(*3{\cdot}01)]\quad \vdash:.p\,.\,q\,.\supset.\,r:\supset:\sim(\sim p\vee\sim q)\,.\supset.\,r:$$
$$[\text{Transp}]\quad \supset:\sim r\,.\supset.\sim p\vee\sim q:$$
$$[\text{Id.}(*1{\cdot}01)]\quad \supset:\sim r\,.\supset.\,p\supset\sim q:$$
$$[\text{Comm}]\quad \supset:p\,.\supset.\sim r\supset\sim q:$$
$$[\text{Transp.Syll}]\quad \supset:p\,.\supset.\,q\supset r:.\supset\vdash.\,\text{Prop}$$

***3·31.** $\vdash:.p\,.\supset.\,q\supset r:\supset:p\,.\,q\,.\supset.\,r$

Dem.

$$[\text{Id.}(*1{\cdot}01)]\quad \vdash:.p\,.\supset.\,q\supset r:\supset:\sim p\,.\vee.\sim q\vee r:$$
$$[*2{\cdot}31]\quad \supset:\sim p\vee\sim q\,.\vee.\,r:$$
$$\left[*2{\cdot}53\,\frac{\sim p\vee\sim q,\,r}{p,\quad q}\right]\quad \supset:\sim(\sim p\vee\sim q)\,.\supset.\,r:$$
$$[\text{Id.}(*3{\cdot}01)]\quad \supset:p\,.\,q\,.\supset.\,r:.\supset\vdash.\,\text{Prop}$$

*3·33. $\vdash : p \supset q . q \supset r . \supset . p \supset r$ [Syll . Imp]

*3·34. $\vdash : q \supset r . p \supset q . \supset . p \supset r$ [Syll . Imp]

En lo que sigue, estas dos proposiciones tendrán la referencia "Syll"; en la práctica resultan más convenientes que las *2·05 y *2·06.

*3·35. $\vdash : p . p \supset q . \supset . q$ [*2·27 . Imp]

*3·37. $\vdash :. p . q . \supset . r : \supset : p . \sim r . \supset . \sim q$

Dem.

$\vdash$. Transp . $\supset \vdash : q \supset r . \supset . \sim r \supset \sim q :$

[Syll] $\supset \vdash :. p . q \supset r : \supset : p . \supset . \sim r \supset \sim q$ (1)

$\vdash$. Exp . $\supset \vdash :. p . q . \supset . r : \supset : p . \supset . q \supset r$ (2)

$\vdash$. Imp . $\supset \vdash :. p . \supset . \sim r \supset \sim q : \supset : p . \sim r . \supset . \sim q$ (3)

$\vdash$. (2) . (1) . (3) . Syll . $\supset \vdash$. Prop

Esta es otra forma de transposición.

*3·4. $\vdash : p . q . \supset . p \supset q$ [*2·51 . Transp . (*1·01 . *3·01)]

*3·41. $\vdash :. p \supset r . \supset : p . q . \supset . r$ [*3·26 . Syll]

*3·42. $\vdash :. q \supset r . \supset : p . q . \supset . r$ [*3·27 . Syll]

*3·43. $\vdash :. p \supset q . p \supset r . \supset : p . \supset . q . r$

Dem.

$\vdash$. *3·2 . $\supset \vdash :. q . \supset : r . \supset . q . r$ (1)

$\vdash$. (1) . Syll . $\supset \vdash :: p \supset q . \supset :. p . \supset : r . \supset . q . r :.$

[*2·77] $\supset :. p \supset r . \supset : p . \supset . q . r$ (2)

$\vdash$. (2) . Imp . $\supset \vdash$. Prop

*3·44. $\vdash :. q \supset p . r \supset p . \supset : q \vee r . \supset . p$

Este principio es análogo al *3·43. La analogía entre el *3·43 y el *3·44 es del tipo que generalmente se da entre fórmulas relativas a productos y fórmulas relativas a sumas.

Dem.

$\vdash$. Syll . $\supset \vdash :. \sim q \supset r . r \supset p . \supset : \sim q \supset p :$

[*2·6] $\supset : q \supset p . \supset . p$

$\vdash$. (1) . Exp . $\supset \vdash :: \sim q \supset r . \supset :. r \supset p . \supset : q \supset p . \supset . p :.$ (1)

[Comm.Imp] $\supset :. q \supset p . r \supset p . \supset . p$

$\vdash$. (2) . Comm . $\supset \vdash :. q \supset p . r \supset p . \supset : \sim q \supset r . \supset . p :.$ (2)

[*2·53.Syll] $\supset \vdash$. Prop

*3·45. $\vdash :. p \supset q . \supset : p . r . \supset . q . r$

Este principio señala que podemos multiplicar ambos miembros de una implicación por un factor común; por este motivo, Peano le llama el "principio del factor". Haremos referencia a él mediante "Fact". Este es el análogo, para la multiplicación, de la proposición primitiva *1·6.

Dem.

$\vdash$. Syll $\frac{\sim r}{r}$. $\supset \vdash :. p \supset q . \supset : q \supset \sim r . \supset . p \supset \sim r :$

[Transp] $\supset : \sim (p \supset \sim r) . \supset . \sim (q \supset \sim r) :.$

$[\text{Id.}(*1{\cdot}01.*3{\cdot}01)] \supset \vdash . \text{Prop}$

***3·47.** $\vdash :. p \supset r . q \supset s . \supset : p . q . \supset . r . s$

Esta proposición, o más bien su análoga para las clases, fue comprobada por Leibniz; evidentemente le agradó, ya que la denominó "praeclarum theorema" (60).

Dem.

$\vdash . *3{\cdot}26 . \supset \vdash :. p \supset r . q \supset s . \supset : p \supset r :$

[Fact] $\supset : p . q . \supset . r . q :$

[*3·22] $\supset : p . q . \supset . q . r$ (1)

$\vdash . *3{\cdot}27 . \supset \vdash :. p \supset r . q \supset s . \supset : q \supset s :$

[Fact] $\supset : q . r . \supset . s . r :$

[*3·22] $\supset : q . r . \supset . r . s$ (2)

$\vdash . (1) . (2) . *3{\cdot}03 . *2{\cdot}83 . \supset$

$\vdash :. p \supset r . q \supset s . \supset : p . q . \supset . r . s :. \supset \vdash . \text{Prop}$

***3·48.** $\vdash :. p \supset r . q \supset s . \supset : p \vee q . \supset . r \vee s$

Este teorema es análogo al *3·47.

Dem.

$\vdash . *3{\cdot}26 . \supset \vdash :. p \supset r . q \supset s . \supset : p \supset r :$

[Sum] $\supset : p \vee q . \supset . r \vee q :$

[Perm] $\supset : p \vee q . \supset . q \vee r$ (1)

$\vdash . *3{\cdot}27 . \supset \vdash :. p \supset r . q \supset s . \supset : q \supset s :$

[Sum] $\supset : q \vee r . \supset . s \vee r :$

[Perm] $\supset : q \vee r . \supset . r \vee s$ (2)

$\vdash . (1) . (2) . *2{\cdot}83 . \supset$

$\vdash :. p \supset r . q \supset s . \supset : p \vee q . \supset . r \vee s :. \supset \vdash . \text{Prop}$

(60) *Philosophical works*, Gerhardt's edition, Vol. VII. p. 223.

*4. LA EQUIVALENCIA Y LAS REGLAS FORMALES

Sumario del *4

En este número nos ocuparemos de las reglas que, más o menos, son análogas a las del álgebra ordinaria. A partir de estas reglas es de donde arranca el usual "cálculo de lógica formal". Consideradas como un "cálculo", admiten otras muchas interpretaciones. Pero todas esas interpretaciones dependen de una que se considera aquí, ya que en todas ellas deducimos consecuencias a partir de nuestras reglas, y, por consiguiente, presuponen la teoría de la deducción. Una interpretación muy simple del cálculo es la siguiente: las entidades consideradas constituyen números, los cuales son nada más que el 0 o el 1; "$p \supset q$" tiene el valor 0 si p es 1 y q es 0; en cualquier otro caso tiene el valor 1; $\sim p$ tiene el valor 1 si p es 0, y 0 si p es 1; $p \,.\, q$ es 1 si tanto p como q son 1, y es 0 en cualquier otro caso; $p \vee q$ es 0 si p y q son ambos 0, y es 1 en cualquier otro caso; y el signo de aserción significa que lo que le sigue tiene valor 1. La lógica simbólica considerada como un cálculo tiene, indudablemente, mucho interés en sí misma; pero, en nuestra opinión, este aspecto ha sido hasta aquí excesivamente resaltado, a expensas del aspecto en el que la lógica simbólica es meramente la parte más elemental de las matemáticas y el prerrequisito lógico de todo lo demás. Por esta razón, trataremos sólo brevemente de lo que se precisa para el álgebra de la lógica simbólica.

Cuando dos proposiciones se implican mútuamente decimos que las dos son *equivalentes,* lo cual se simboliza por "$p \equiv q$". Ponemos

***4·01.** $p \equiv q \,.=.\, p \supset q \,.\, q \supset p$ Df

Es obvio que dos proposiciones son equivalentes cuando, y sólo cuando, ambas son verdaderas o ambas son falsas. Siguiendo a Frege, al *valor de verdad de una proposición* le llamaremos verdad si la proposición es verdadera, y falsedad si es falsa. Así, pues, dos proposiciones son equivalentes cuando tienen el mismo valor de verdad.

Debe observarse que, si $p \equiv q$, q puede sustituirse por p sin que se altere el valor de verdad de cualquier función de p que no entrañe ideas primitivas excepto las enumeradas en el *1. Esto puede comprobarse separadamente en cada caso, —pero no de una manera general— puesto que no tenemos forma de especificar (con nuestro aparato de ideas primitivas) que una función sea una que puede construirse por sí sola prescindiendo de estas ideas. Denominaremos *función de verdad* a una función $f(p)$ cuyo argumento sea una proposición, y cuyo valor de verdad dependa sólo del valor de verdad de su argumento. Todas las funciones de proposiciones de las que trataremos especialmente serán funciones de verdad; es decir, tendremos

$$p \equiv q \,.\supset.\, f(p) \equiv f(q).$$

La razón de esto es que las funciones de proposiciones con las que tratamos se construyen todas por medio de las ideas primitivas del *1. Pero no es una característica universal de las funciones de proposiciones el ser funciones de verdad. Por ejemplo, "*A* cree *p*" puede ser verdad para un valor de *p* y falso para otro.

Las principales proposiciones de este número son las siguientes:

***4·1.** $\vdash :p \supset q \,.\equiv.\, \sim q \supset \sim p$

***4·11.** $\vdash :p \equiv q \,.\equiv.\, \sim p \equiv \sim q$

Estas son dos formas del "principio de transposición".

***4·13.** $\vdash .p \equiv \sim(\sim p)$

Este es el principio de la doble negación; esto es, una proposición es equivalente a la falsedad de su negación.

***4·2.** $\vdash .p \equiv p$

***4·21.** $\vdash :p \equiv q \,.\equiv.\, q \equiv p$

***4·22.** $\vdash :p \equiv q \,.\, q \equiv r \,.\supset.\, p \equiv r$

Estas proposiciones aseveran que la equivalencia es *reflexiva, simétrica* y *transitiva.*

***4·24.** $\vdash :p \,.\equiv.\, p \,.\, p$

***4·25.** $\vdash :p \,.\equiv.\, p \vee p$

Esto es, *p* es equivalente a "*p* y *p*" y a "*p* o *p*", las cuales son dos formas de la *ley de tautología,* y que constituyen la fuente de las principales diferencias entre el álgebra de la lógica simbólica y el álgebra ordinaria.

***4·3.** $\vdash :p \,.\, q \,.\equiv.\, q \,.\, p$

Esta es la ley conmutativa del producto de proposiciones.

***4·31.** $\vdash :p \vee q \,.\equiv.\, q \vee p$

Esta es la ley conmutativa de la suma de proposiciones.

Las leyes asociativas para la multiplicación y adición de proposiciones son

***4·32.** $\vdash :(p \,.\, q) \,.\, r \,.\equiv.\, p \,.\, (q \,.\, r)$

***4·33.** $\vdash :(p \vee q) \vee r \,.\equiv.\, p \vee (q \vee r)$

La ley distributiva en las dos formas:

***4·4.** $\vdash :.p \,.\, q \vee r \,.\equiv: p \,.\, q \,.\vee.\, p \,.\, r$

***4·41.** $\vdash :.p \,.\vee.\, q \,.\, r :\equiv.\, p \vee q \,.\, p \vee r$

La segunda de estas formas no tiene análoga en el álgebra ordinaria.

***4·71.** $\vdash :.p \supset q \,.\equiv: p \,.\equiv.\, p \,.\, q$

Esto es, *p* implica *q* cuando, y sólo cuando, *p* es equivalente a *p . q*. Esta

proposición se usa constantemente; ella nos permite sustituir una implicación por una equivalencia.

***4·73.** $\vdash :. q . \supset : p . \equiv . p . q$

Esto es, un factor verdadero puede eliminarse de una proposición o añadirse a ella, sin que se altere el valor de verdad de dicha proposición.

***4·01.** $p \equiv q . = . p \supset q . q \supset p$ Df

***4·02.** $p \equiv q \equiv r . = . p \equiv q . q \equiv r$ Df

Esta definición sirve meramente para ofrecer una abreviatura conveniente.

***4·1.** $\vdash : p \supset q . \equiv . \sim q \supset \sim p$ [*2·16·17]

***4·11.** $\vdash : p \equiv q . \equiv . \sim p \equiv \sim q$ [*2·16·17 . *3·47·22]

***4·12.** $\vdash : p \equiv \sim q . \equiv . q \equiv \sim p$ [*2·03·15]

***4·13.** $\vdash . p \equiv \sim (\sim p)$ [*2·12·14]

***4·14.** $\vdash :. p . q . \supset . r : \equiv : p . \sim r . \supset . \sim q$ [*3·37 . *4·13]

***4·15.** $\vdash :. p . q . \supset . \sim r : \equiv : q . r . \supset . \sim p$ [*3·22 . *4·13·~~14~~]

***4·2.** $\vdash . p \equiv p$ [Id . *3·2]

***4·21.** $\vdash : p \equiv q . \equiv . q \equiv p$ [*3·22]

***4·22.** $\vdash : p \equiv q . q \equiv r . \supset . p \equiv r$

Dem.

$\vdash . *3·26 .$ $\quad \supset \vdash : p \equiv q . q \equiv r . \supset . p \equiv q .$
[*3·26] $\quad \supset . p \supset q$ (1)

$\vdash . *3·27 .$ $\quad \supset \vdash : p \equiv q . q \equiv r . \supset . q \equiv r .$
[*3·26] $\quad \supset . q \supset r$ (2)

$\vdash . (1) . (2) . *2·83 . \supset \vdash : p \equiv q . q \equiv r . \supset . p \supset r$ (3)

$\vdash . *3·27 .$ $\quad \supset \vdash : p \equiv q . q \equiv r . \supset . q \equiv r .$
[*3·27] $\quad \supset . r \supset q$ (4)

$\vdash . *3·26 .$ $\quad \supset \vdash : p \equiv q . q \equiv r . \supset . p \equiv q .$
[*3·27] $\quad \supset . q \supset p$ (5)

$\vdash . (4) . (5) . *2·83 . \supset \vdash : p \equiv q . q \equiv r . \supset . r \supset p$ (6)

$\vdash . (3) . (6) . \text{Comp} . \supset \vdash . \text{Prop}$

Nota. Las tres últimas proposiciones muestran que la relación de equivalencia es reflexiva (*4·2), simétrica (*4·21), y transitiva (*4·22). La implicación es reflexiva y transitiva, pero no simétrica. Las propiedades de ser simétricas, transitivas y (al menos en determinados campos) reflexivas son esenciales para cualquier relación que posea las características formales de la igualdad.

***4·24.** $\vdash : p . \equiv . p . p$

Dem.

$\vdash . *3·26 . \supset \vdash : p . p . \supset . p$ (1)

$\vdash . *3·2 . \quad \supset \vdash :. p . \supset : p . \supset . p . p :.$

$$[*2{\cdot}43] \quad \supset \vdash : p \,.\, \supset .\, p \,.\, p \qquad (2)$$
$$\vdash .(1) .(2) .*3{\cdot}2 \,.\, \supset \vdash .\, \text{Prop}$$

***4·25.** $\vdash : p \,.\, \equiv .\, p \vee p \quad \left[\text{Taut} \,.\, \text{Add}\, \frac{p}{q}\right]$

Nota. Las *4·24·25 son dos formas de la *ley de tautología,* que es la que principalmente hace distinguir el álgebra de la lógica simbólica del álgebra ordinaria.

***4·3.** $\vdash : p \,.\, q \,.\equiv .\, q \,.\, p \quad [*3{\cdot}22]$

Nota. Siempre que, para cualquier valor de p y q, tengamos

$$\phi(p, q) \,.\, \supset .\, \phi(q, p),$$

también tenemos que

$$\phi(p, q) \,.\, \equiv .\, \phi(q, p).$$

Porque $\quad \{\phi(p, q) \,.\, \supset .\, \phi(q, p)\} \frac{q, p}{p, q} \,.\, \supset : \phi(q, p) \,.\, \supset .\, \phi(p, q).$

***4·31.** $\vdash : p \vee q \,.\equiv .\, q \vee p \quad [\text{Perm}]$

***4·32.** $\vdash : (p \,.\, q) \,.\, r \,.\equiv .\, p \,.\, (q \,.\, r)$

Dem.

$$\vdash .*4{\cdot}15 \,. \qquad \supset \vdash :. p \,.\, q \,.\, \supset .\sim r : \equiv : q \,.\, r \,.\, \supset .\sim p :$$
$$[*4{\cdot}12] \qquad \equiv : p \,.\, \supset .\sim (q \,.\, r) \qquad (1)$$
$$\vdash .(1) .*4{\cdot}11 \,.\, \supset \vdash : \sim (p \,.\, q \,.\, \supset .\sim r) \,.\equiv .\sim \{p \,.\, \supset .\sim (q \,.\, r)\} :$$
$$[(*1{\cdot}01 .*3{\cdot}01)] \supset \vdash .\, \text{Prop}$$

Nota. Aquí "(1)" significa "$\vdash :. p \,.\, q \,.\, \supset .\sim r : \equiv : p \,.\, \supset .\sim (q \,.\, r)$", que se obtiene de los pasos anteriores mediante la aplicación de *4·22. El empleo de *4·22 será frecuentemente tácito, como en el caso de arriba. El principio es el mismo que el que se explicó en el *2·31 con respecto a la implicación.

***4·33.** $\vdash : (p \vee q) \vee r \,.\equiv .\, p \vee (q \vee r) \quad [*2{\cdot}31{\cdot}32]$

Las dos últimas son las leyes asociativas respecto de la multiplicación y adición. Para evitar los paréntesis introducimos la siguiente definición:

***4·34.** $p \,.\, q \,.\, r \,.=. (p \,.\, q) \,.\, r \quad \text{Df}$

***4·36.** $\vdash :. p \equiv q \,.\, \supset : p \,.\, r \,.\equiv .\, q \,.\, r \qquad [\text{Fact} \,.\, *3{\cdot}47]$

***4·37.** $\vdash :. p \equiv q \,.\, \supset : p \vee r \,.\equiv .\, q \vee r \qquad [\text{Sum} \,.\, *3{\cdot}47]$

***4·38.** $\vdash :. p \equiv r \,.\, q \equiv s \,.\, \supset : p \,.\, q \,.\equiv .\, r \,.\, s \quad [*3{\cdot}47 \,.\, *4{\cdot}32 \,.\, *3{\cdot}22]$

***4·39.** $\vdash :. p \equiv r \,.\, q \equiv s \,.\, \supset : p \vee q \,.\equiv .\, r \vee s \quad [*3{\cdot}48{\cdot}47 \,.\, *4{\cdot}32 \,.\, *3{\cdot}22]$

***4·4.** $\vdash :. p \,.\, q \vee r \,.\equiv : p \,.\, q \,.\, \vee \,.\, p \,.\, r$

Esta es la primera forma de la ley distributiva.

Dem.

$$\vdash .*3{\cdot}2 \,. \qquad \supset \vdash :: p \,.\, \supset : q \,.\, \supset .\, p \,.\, q :. p \,.\, \supset : r \,.\, \supset .\, p \,.\, r ::$$
$$[\text{Comp}] \qquad \supset \vdash :: p \,.\, \supset :. q \,.\, \supset .\, p \,.\, q : r \,.\, \supset .\, p \,.\, r :.$$

$$[*3{\cdot}48] \qquad \supset :. q \vee r . \supset : p . q . \vee . p . r \qquad (1)$$
$$\vdash .(1) . \text{Imp} . \qquad \supset \vdash :. p . q \vee r . \supset : p . q . \vee . p . r \qquad (2)$$
$$\vdash . *3{\cdot}26 . \qquad \supset \vdash :. p . q . \supset . p : p . r . \supset . p :.$$
$$[*3{\cdot}44] \qquad \supset \vdash :. p . q . \vee . p . r : \supset . p \qquad (3)$$
$$\vdash . *3{\cdot}27 . \qquad \supset \vdash :. p . q . \supset . q : p . r . \supset . r :.$$
$$[*3{\cdot}48] \qquad \supset \vdash :. p . q . \vee . p . r : \supset . q \vee r \qquad (4)$$
$$\vdash .(3) .(4) . \text{Comp} . \supset \vdash :. p . q . \vee . p . r : \supset . p . q \vee r \qquad (5)$$
$$\vdash .(2) .(5) . \qquad \supset \vdash . \text{Prop}$$

***4·41.** $\vdash :. p . \vee . q . r : \equiv . p \vee q . p \vee r$

Esta es la segunda forma de la ley distributiva; forma que no tiene análoga en el álgebra ordinaria. Por convención en cuanto al empleo los puntos, "$p . \vee . q . r$" significa "$p \vee (q . r)$".

Dem.

$$\vdash . *3{\cdot}26 . \text{Sum} . \qquad \supset \vdash :. p . \vee . q . r : \supset . p \vee q \qquad (1)$$
$$\vdash . *3{\cdot}27 . \text{Sum} . \qquad \supset \vdash :. p . \vee . q . r : \supset . p \vee r \qquad (2)$$
$$\vdash .(1) .(2) . \text{Comp} . \supset \vdash :. p . \vee . q . r : \supset . p \vee q . p \vee r \qquad (3)$$
$$\vdash . *2{\cdot}53 . *3{\cdot}47 . \qquad \supset \vdash :. p \vee q . p \vee r . \supset : \sim p \supset q . \sim p \supset r :$$
$$[\text{Comp}] \qquad \supset : \sim p . \supset . q . r :$$
$$[*2{\cdot}54] \qquad \supset : p . \vee . q . r \qquad (4)$$
$$\vdash .(3) .(4) . \qquad \supset \vdash . \text{Prop}$$

***4·42.** $\vdash :. p . \equiv : p . q . \vee . p . \sim q$

Dem.

$$\vdash . *3{\cdot}21 . \qquad \supset \vdash :. q \vee \sim q . \supset : p . \supset . p . q \vee \sim q :.$$
$$[*2{\cdot}11] \qquad \supset \vdash : p . \supset . p . q \vee \sim q \qquad (1)$$
$$\vdash . *3{\cdot}26 . \qquad \supset \vdash : p . q \vee \sim q . \supset . p \qquad (2)$$
$$\vdash .(1) .(2) . \supset \vdash :. p . \equiv : p . q \vee \sim q :$$
$$[*4{\cdot}4] \qquad \equiv : p . q . \vee . p . \sim q :. \supset \vdash . \text{Prop}$$

***4·43.** $\vdash :. p . \equiv : p \vee q . p \vee \sim q$

Dem.

$$\vdash . *2{\cdot}2 . \qquad \supset \vdash : p . \supset . p \vee q : p . \supset . p \vee \sim q :$$
$$[\text{Comp}] \qquad \supset \vdash : p . \supset . p \vee q . p \vee \sim q \qquad (1)$$
$$\vdash . *2{\cdot}65 \frac{\sim p}{p} . \supset \vdash :. \sim p \supset q . \supset : \sim p \supset \sim q . \supset . p :.$$
$$[\text{Imp}] \qquad \supset \vdash :. \sim p \supset q . \sim p \supset \sim q . \supset . p :.$$
$$[*2{\cdot}53 . *3{\cdot}47] \quad \supset \vdash :. p \vee q . p \vee \sim q . \supset . p \qquad (2)$$
$$\vdash .(1) .(2) . \qquad \supset \vdash . \text{Prop}$$

***4·44.** $\vdash :. p . \equiv : p . \vee . p . q$

Dem.

$$\vdash . *2{\cdot}2 . \qquad \supset \vdash :. p . \supset : p . \vee . p . q \qquad (1)$$
$$\vdash . \text{Id} . *3{\cdot}26 . \supset \vdash :. p \supset p : p . q . \supset . p :.$$

$$[*3\cdot44] \qquad \supset \vdash :. p . \vee . p . q : \supset . p \qquad (2)$$
$$\vdash . (1) . (2) . \qquad \supset \vdash . \text{Prop}$$

***4·45.** $\vdash : p . \equiv . p . p \vee q$ $[*3\cdot26 . *2\cdot2]$

Las fórmulas que vienen a continuación se deben a De Morgan, o, con más propiedad, son las fórmulas proposicionales análogas a las dadas por De Morgan para las clases. Se observará que la primera de ellas incorpora nuestra definición de producto lógico.

***4·5.** $\vdash : \quad p . q . \equiv . \sim(\sim p \vee \sim q)$ $[*4\cdot2 . (*3\cdot01)]$

***4·51.** $\vdash : \quad \sim(p . q) . \equiv . \sim p \vee \sim q$ $[*4\cdot5\cdot12]$

***4·52.** $\vdash : \quad p . \sim q . \equiv . \sim(\sim p \vee q)$ $\left[*4\cdot5 \frac{\sim q}{q} . *4\cdot13\right]$

***4·53.** $\vdash : \quad \sim(p . \sim q) . \equiv . \sim p \vee q$ $[*4\cdot52\cdot12]$

***4·54.** $\vdash : \quad \sim p . q . \equiv . \sim(p \vee \sim q)$ $\left[*4\cdot5 \frac{\sim p}{p} . *4\cdot13\right]$

***4·55.** $\vdash : \quad \sim(\sim p . q) . \equiv . p \vee \sim q$ $[*4\cdot54\cdot12]$

***4·56.** $\vdash : \quad \sim p . \sim q . \equiv . \sim(p \vee q)$ $\left[*4\cdot54 \frac{\sim q}{q} . *4\cdot13\right]$

***4·57.** $\vdash : \sim(\sim p . \sim q) . \equiv . p \vee q$ $[*4\cdot56\cdot12]$

Las fórmulas que siguen se obtienen de forma inmediata a partir de las anteriores. Son importantes, dado que enseñan cómo transformar las implicaciones en sumas o en negaciones de productos, y viceversa. Se observará que la primera de ellas incorpora, sencillamente, la definición *1·01.

***4·6.** $\vdash : \quad p \supset q . \equiv . \sim p \vee q$ $[*4\cdot2 . (*1\cdot01)]$

***4·61.** $\vdash : \quad \sim(p \supset q) . \equiv . p . \sim q$ $[*4\cdot6\cdot11\cdot52]$

***4·62.** $\vdash : \quad p \supset \sim q . \equiv . \sim p \vee \sim q$ $\left[*4\cdot6 \frac{\sim q}{q}\right]$

***4·63.** $\vdash : \quad \sim(p \supset \sim q) . \equiv . p . q$ $[*4\cdot62\cdot11\cdot5]$

***4·64.** $\vdash : \quad \sim p \supset q . \equiv . p \vee q$ $[*2\cdot53\cdot54]$

***4·65.** $\vdash : \quad \sim(\sim p \supset q) . \equiv . \sim p . \sim q$ $[*4\cdot64\cdot11\cdot56]$

***4·66.** $\vdash : \quad \sim p \supset \sim q . \equiv . p \vee \sim q$ $\left[*4\cdot64 \frac{\sim q}{q}\right]$

***4·67.** $\vdash : \sim(\sim p \supset \sim q) . \equiv . \sim p . q$ $[*4\cdot66\cdot11\cdot54]$

***4·7.** $\vdash :. p \supset q . \equiv : p . \supset . p . q$

Dem.

$$\vdash . *3\cdot27 . \text{Syll} . \supset \vdash :. p . \supset . p . q : \supset . p \supset q \qquad (1)$$
$$\vdash . \text{Comp} . \qquad \supset \vdash :. p \supset p . p \supset q . \supset : p . \supset . p . q :.$$
$$[\text{Exp}] \qquad \supset \vdash :: p \supset p . \supset :. p \supset q . \supset : p . \supset . p . q ::$$
$$[\text{Id}] \qquad \supset \vdash :. p \supset q . \supset : p . \supset . p . q \qquad (2)$$
$$\vdash . (1) . (2) . \qquad \supset \vdash . \text{Prop}$$

***4·71.** $\vdash :. p \supset q . \equiv : p . \equiv . p . q$

Dem.

$\vdash . *3{\cdot}21 . \quad \supset \vdash :: p . q . \supset . p : \supset :. p . \supset . p . q : \supset : p . \equiv . p . q ::$

[*3·26] $\quad \supset \vdash :. p . \supset . p . q : \supset : p . \equiv . p . q \qquad (1)$

$\vdash . *3{\cdot}26 . \quad \supset \vdash :. p . \equiv . p . q : \supset : p . \supset . p . q \qquad (2)$

$\vdash . (1) . (2) . \quad \supset \vdash :. p . \supset . p . q : \equiv : p . \equiv . p . q \qquad (3)$

$\vdash . (3) . *4{\cdot}7{\cdot}22 . \supset \vdash .$ Prop

La última proposición es de empleo constante. Ella nos permite transformar cada implicación en una equivalencia, lo que representa una ventaja si deseamos asimilar la lógica simbólica, en la medida de lo posible, al álgebra ordinaria. Pero cuando la lógica simbólica se considera como un instrumento de prueba, necesitamos las implicaciones, y suele ser un inconveniente sustituir las equivalencias. Observaciones similares se aplican a la siguiente proposición.

***4·72.** $\vdash :. p \supset q . \equiv : q . \equiv . p \vee q$

Dem.

$\vdash . *4{\cdot}1 . \supset \vdash :. p \supset q . \equiv : \sim q \supset \sim p :$

$\left[*4{\cdot}71 \begin{matrix} \sim q, & \sim p \\ p, & q \end{matrix}\right] \quad \equiv : \sim q . \equiv . \sim q . \sim p :$

[*4·12] $\quad \equiv : q . \equiv . \sim (\sim q . \sim p) :$

[*4·57] $\quad \equiv : q . \equiv . q \vee p :$

[*4·31] $\quad \equiv : q . \equiv . p \vee q :. \supset \vdash .$ Prop

***4·73.** $\vdash :. q . \supset : p . \equiv . p . q$ [Simp . *4·71]

Esta proposición es muy útil ya que enseña que un factor verdadero puede omitirse de un producto sin que varíe su verdad o falsedad, del mismo modo como una hipótesis verdadera puede omitirse de una implicación.

***4·74.** $\vdash :. \sim p . \supset : q . \equiv . p \vee q$ [*2·21 . *4·72]

***4·76.** $\vdash :. p \supset q . p \supset r . \equiv : p . \supset . q . r \quad \left[*4{\cdot}41 \frac{\sim p}{p} . (*1{\cdot}01)\right]$

***4·77.** $\vdash :. q \supset p . r \supset p . \equiv : q \vee r . \supset . p$ [*3·44 . Add . *2·2]

***4·78.** $\vdash :. p \supset q . \vee . p \supset r : \equiv : p . \supset . q \vee r$

Dem.

$\vdash . *4{\cdot}2 . (*1{\cdot}01) . \supset \vdash :. p \supset q . \vee . p \supset r : \equiv : \sim p \vee q . \vee . \sim p \vee r :$

[*4·33] $\quad \equiv . \sim p . \vee . q \vee \sim p \vee r :$

[*4·31·37] $\quad \equiv : \sim p . \vee . \sim p \vee q \vee r :$

[*4·33] $\quad \equiv : \sim p \vee \sim p . \vee . q \vee r :$

[*4·25·37] $\quad \equiv : \sim p . \vee . q \vee r :$

[*4·2.(*1·01)] $\quad \equiv : p . \supset . q \vee r :. \supset \vdash .$ Prop

***4·79.** $\vdash :. q \supset p . \vee . r \supset p : \equiv : q . r . \supset . p$

Dem.

$\vdash .*4{\cdot}1{\cdot}39 . \supset \vdash :. q \supset p . \vee . r \supset p : \equiv : \sim p \supset \sim q . \vee . \sim p \supset \sim r :$

[*4·78] $\equiv : \sim p . \supset . \sim q \vee \sim r :$

[*2·15] $\equiv : \sim (\sim q \vee \sim r) . \supset . p :$

[*4·2.(*3·01)] $\equiv : q . r . \supset . p :. \supset \vdash .$ Prop

Nota. Las análogas, para clases, de las *4·78·79 son falsas. Consideremos, por ejemplo, la *4·78, y pongamos $p =$ el pueblo inglés, $q =$ los hombres, $r =$ las mujeres. Entonces, p se contiene en q o r, pero no está contenido en q ni contenido en r.

***4·8.** $\vdash : p \supset \sim p . \equiv . \sim p$ [*2·01 . Simp]

***4·81.** $\vdash : \sim p \supset p . \equiv . p$ [*2·18 . Simp]

***4·82.** $\vdash : p \supset q . p \supset \sim q . \equiv . \sim p$ [*2·65 . Imp . *2·21 . Comp]

***4·83.** $\vdash : p \supset q . \sim p \supset q . \equiv . q$ [*2·61 . Imp . Simp . Comp]

Nota. Las proposiciones *4·82·83 pueden obtenerse también de la *4·43, de la que, virtualmente, son otras formas.

***4·84.** $\vdash :. p \equiv q . \supset : p \supset r . \equiv . q \supset r$ [*2·06 . *3·47]

***4·85.** $\vdash :. p \equiv q . \supset : r \supset p . \equiv . r \supset q$ [*2·05 . *3·47]

***4·86.** $\vdash :. p \equiv q . \supset : p \equiv r . \equiv . q \equiv r$ [*4·21·22]

***4·87.** $\vdash :. p . q . \supset . r : \equiv : p . \supset . q \supset r : \equiv : q . \supset . p \supset r : \equiv : q . p . \supset . r$

[Exp . Comm . Imp]

La *4·87 incorpora en una única proposición los principios de exportación, importación, y el principio conmutativo.

*5. MISCELANEA DE PROPOSICIONES

Sumario del *5.

Este número se compone principalmente de proposiciones de dos clases: 1) aquellas que se necesitarán como lemas en una o más pruebas posteriores, 2) aquellas que son ilustrativas por sí mismas o que deben ser importantes en desarrollos diferentes de los que deseamos hacer. Sin embargo, unas cuantas proposiciones de este número se usarán con frecuencia. Estas son:

***5·1.** $\vdash : p . q . \supset . p \equiv q$

Esto es, dos proposiciones son equivalentes si ambas son verdaderas. (La expresión de que dos proposiciones son equivalentes si ambas son falsas es la *5·21).

***5·32.** $\vdash :. p . \supset . q \equiv r : \equiv : p . q . \equiv . p . r$

Esto es, decir que, sobre la hipótesis p, q y r son equivalentes, es equivalente a decir que la conjunción de p y q equivale a la conjunción de p y r. Esta es una regla muy útil en inferencia.

***5·6.** $\vdash :. p . \sim q . \supset . r : \equiv : p . \supset . q \vee r$

Esto es, "p y no-q implica r" es equivalente a "p implica q o r".

Entre las proposiciones a las que nunca nos referiremos en lo sucesivo, pero introducidas por su interés intrínseco, están las *5·11·12·13·14, las cuales manifiestan que dadas dos proposiciones cualesquiera, p, q, p o $\sim p$ debe implicar q; p debe implicar q o no-q; p implica q o q implica p; y que, dada una tercera proposición r, p implica q o q implica r (61).

Otras proposiciones a las que no se hará referencia en lo sucesivo son las *5·22·23·24; en éstas se muestra que dos proposiciones no son equivalentes cuando, y sólo cuando, una es verdadera y la otra falsa; y que dos proposiciones son equivalentes cuando, y sólo cuando, ambas son verdaderas o ambas falsas. Se sigue (*5·24) que la negación de "$p . q . \vee . \sim p . \sim q$" es equivalente a "$p . \sim q . \vee . q . \sim p$". Las *5·54·55 manifiestan que el producto y la suma de p y q son, respectivamente, equivalentes a p o a q.

Todas las pruebas de las proposiciones siguientes son fáciles y, por tanto, haremos sólo una mera indicación de las proposiciones que se usan en esas pruebas.

---

(61) Cf. Schröder, *Vorlesungen über Algebra der Logik,* Zweiter Band (Leipzig, 1891), pp. 270-271, en donde se explica la aparente rareza de la proposición de arriba.

*5·1. $\vdash : p . q . \supset . p \equiv q$ [*3·4·22]

*5·11. $\vdash : p \supset q . \vee . \sim p \supset q$ [*2·5·54]

*5·12. $\vdash : p \supset q . \vee . p \supset \sim q$ [*2·51·54]

*5·13. $\vdash : p \supset q . \vee . q \supset p$ [*2·521]

*5·14. $\vdash : p \supset q . \vee . q \supset r$ [Simp . Transp . *2·21]

*5·15. $\vdash : p \equiv q . \vee . p \equiv \sim q$

Dem.

$\vdash . *4·61 . \supset \vdash : \sim(p \supset q) . \supset . p . \sim q .$
[*5·1] $\supset . p \equiv \sim q :$
[*2·54] $\supset \vdash : p \supset q . \vee . p \equiv \sim q$ (1)
$\vdash . *4·61 . \supset \vdash : \sim(q \supset p) . \supset . q . \sim p .$
[*5·1] $\supset . q \equiv \sim p .$
[*4·12] $\supset . p \equiv \sim q :$
[*2·54] $\supset \vdash : q \supset p . \vee . p \equiv \sim q$ (2)
$\vdash . (1) . (2) . *4·41 . \supset \vdash .$ Prop

*5·16. $\vdash . \sim(p \equiv q . p \equiv \sim q)$

Dem.

$\vdash . *3·26 . \supset \vdash : p \equiv q . p \supset \sim q . \supset . p \supset q . p \supset \sim q .$
[*4·82] $\supset . \sim p$ (1)
$\vdash . *3·27 . \supset \vdash : p \equiv q . p \supset \sim q . \supset . q \supset p . p \supset \sim q .$
[Syll] $\supset . q \supset \sim q .$
[Abs] $\supset . \sim q$ (2)
$\vdash . (1) . (2) . \text{Comp} . \supset \vdash : p \equiv q . p \supset \sim q . \supset . \sim p . \sim q .$
$\left[*4·65 \frac{q,\ p}{p,\ q}\right]$ $\supset . \sim(\sim q \supset p)$ (3)
$\vdash . (3) . \text{Exp} . \supset \vdash :. p \equiv q . \supset : p \supset \sim q . \supset . \sim(\sim q \supset p) :$
[Id.(*1·01)] $\supset : \sim(p \supset \sim q) . \vee . \sim(\sim q \supset p) :$
[*4·51.(*4·01)] $\supset : \sim(p \equiv \sim q) :. \supset \vdash .$ Prop

*5·17. $\vdash : p \vee q . \sim(p . q) . \equiv . p \equiv \sim q$

Dem.

$\vdash . *4·64·21 .$ $\supset \vdash : p \vee q . \equiv . \sim q \supset p$ (1)
$\vdash . *4·63 . \text{Transp} .$ $\supset \vdash : \sim(p . q) . \equiv . p \supset \sim q$ (2)
$\vdash . (1) . (2) . *4·38·21 . \supset \vdash .$ Prop

*5·18. $\vdash : p \equiv q . \equiv . \sim(p \equiv \sim q)$ $\left[*5·15·16 . *5·17 \frac{p \equiv q,\ p \equiv \sim q}{p,\qquad q}\right]$

*5·19. $\vdash . \sim(p \equiv \sim p)$ $\left[*5·18 \frac{p}{q} . *4·2\right]$

*5·21. $\vdash : \sim p . \sim q . \supset . p \equiv q$ [*5·1 . *4·11]

*5·22. $\vdash :. \sim(p \equiv q) . \equiv : p . \sim q . \vee . q . \sim p$ [*4·61·51·39]

***5·23.** $\vdash :. p \equiv q . \equiv : p . q . \vee . \sim p . \sim q \quad \left[*5{\cdot}18 . *5{\cdot}22 \frac{\sim q}{q} . *4{\cdot}13{\cdot}36 \right]$

***5·24.** $\vdash :. \sim (p . q . \vee . \sim p . \sim q) . \equiv : p . \sim q . \vee . q . \sim p \quad [*5{\cdot}22{\cdot}23]$

***5·25.** $\vdash :. p \vee q . \equiv : p \supset q . \supset . q \quad [*2{\cdot}62{\cdot}68]$

De la *5·25 parece que pudimos haber tomado la implicación, en vez de la disyunción, como una idea primitiva, y haber definido "$p \vee q$" con la significación "$p \supset q \,.\supset. q$". Esta vía, sin embargo, requiere más proposiciones primitivas que las que son necesarias en el método que hemos adoptado.

***5·3.** $\vdash :. p . q . \supset . r : \equiv : p . q . \supset . p . r \quad$ [Simp . Comp . Syll]

***5·31.** $\vdash :. r . p \supset q : \supset : p . \supset . q . r \quad$ [Simp . Comp]

***5·32.** $\vdash :. p . \supset . q \equiv r : \equiv : p . q . \equiv . p . r \quad [*4{\cdot}76 . *3{\cdot}3{\cdot}31 . *5{\cdot}3]$

Esta proposición se necesitará constantemente para las pruebas siguientes.

***5·33.** $\vdash :. p . q \supset r . \equiv : p : p . q . \supset . r \quad [*4{\cdot}73{\cdot}84 . *5{\cdot}32]$

***5·35.** $\vdash :. p \supset q . p \supset r . \supset : p . \supset . q \equiv r \quad$ [Comp . *5·1]

***5·36.** $\vdash : p . p \equiv q . \equiv . q . p \equiv q \quad$ [Ass . *4·38]

***5·4.** $\vdash :. p . \supset . p \supset q : \equiv . p \supset q \quad$ [Simp . *2·43]

***5·41.** $\vdash :. p \supset q . \supset . p \supset r : \equiv : p . \supset . q \supset r \quad [*2{\cdot}77{\cdot}86]$

***5·42.** $\vdash :: p . \supset . q \supset r : \equiv :. p . \supset : q . \supset . p . r \quad [*5{\cdot}3 . *4{\cdot}87]$

***5·44.** $\vdash :: p \supset q . \supset :. p \supset r . \equiv : p . \supset . q . r \quad [*4{\cdot}76 . *5{\cdot}3{\cdot}32]$

***5·5.** $\vdash :. p . \supset : p \supset q . \equiv . q \quad$ [Ass . Exp . Simp]

***5·501.** $\vdash :. p . \supset : q . \equiv . p \equiv q \quad [*5{\cdot}1 . \text{Exp} . \text{Ass}]$

***5·53.** $\vdash :. p \vee q \vee r . \supset . s : \equiv : p \supset s . q \supset s . r \supset s \quad [*4{\cdot}77]$

***5·54.** $\vdash :. p . q . \equiv . p : \vee : p . q . \equiv . q \quad [*4{\cdot}73 . *4{\cdot}44 . \text{Transp} . *5{\cdot}1]$

***5·55.** $\vdash :. p \vee q . \equiv . p : \vee : p \vee q . \equiv . q \quad [*1{\cdot}3 . *5{\cdot}1 . *4{\cdot}74]$

***5·6.** $\vdash :. p . \sim q . \supset . r : \equiv : p . \supset . q \vee r \quad \left[*4{\cdot}87 \frac{\sim q}{q} . *4{\cdot}64{\cdot}85 \right]$

***5·61.** $\vdash : p \vee q . \sim q . \equiv . p . \sim q \quad [*4{\cdot}74 . *5{\cdot}32]$

***5·62.** $\vdash :. p . q . \vee . \sim q : \equiv . p \vee \sim q \quad \left[*4{\cdot}7 \frac{q, p}{p, q} \right]$

***5·63.** $\vdash :. p \vee q . \equiv : p . \vee . \sim p . q \quad \left[*5{\cdot}62 \frac{\sim p, q}{q, p} \right]$

***5·7.** $\vdash :. p \vee r . \equiv . q \vee r : \equiv : r . \vee . p \equiv q \quad [*4{\cdot}74 . *1{\cdot}3 . *5{\cdot}1 . *4{\cdot}37]$

***5·71.** $\vdash :. q \supset \sim r . \supset : p \vee q . r . \equiv . p . r$

En la prueba que viene a continuación, así como siempre en lo sucesivo, "Hp" significa la hipótesis de la proposición que se prueba.

Dem.

$\vdash .*4{\cdot}4 . \quad \supset \vdash :. p \vee q . r . \equiv : p . r . \vee . q . r$ (1)

$\vdash .*4{\cdot}62{\cdot}51 . \supset \vdash :: \mathrm{Hp} . \supset :. \sim (q . r) :.$

[*4·74] $\supset :. p . r . \vee . q . r : \equiv : p . r$ (2)

$\vdash .(1) .(2) .*4{\cdot}22 . \supset \vdash .$ Prop

***5·74.** $\vdash :. p . \supset . q \equiv r : \equiv : p \supset q . \equiv . p \supset r$

Dem.

$\vdash .*5{\cdot}41 . \supset \vdash :: p \supset q . \supset . p \supset r : \equiv : p . \supset . q \supset r :.$

$p \supset r . \supset . p \supset q : \equiv : p . \supset . r \supset q$ (1)

$\vdash .(1) .*4{\cdot}38 . \supset \vdash :: p \supset q . \equiv . p \supset r . \equiv :. p . \supset . q \supset r : p . \supset . r \supset q :.$

[*4·76] $\equiv :. p . \supset . q \equiv r :: \supset \vdash .$ Prop

***5·75.** $\vdash :. r \supset \sim q : p . \equiv . q \vee r : \supset : p . \sim q . \equiv . r$

Dem.

$\vdash .*5{\cdot}6 . \quad \supset \vdash :. \mathrm{Hp} . \supset : p . \sim q . \supset . r$ (1)

$\vdash .*3{\cdot}27 . \supset \vdash :. \mathrm{Hp} . \supset : q \vee r . \supset . p :$

[*4·77] $\supset : r \supset p$ (2)

$\vdash .*3{\cdot}26 . \supset \vdash :. \mathrm{Hp} . \supset : r \supset \sim q$ (3)

$\vdash .(2) .(3) . \mathrm{Comp} . \supset \vdash :. \mathrm{Hp} . \supset : r \supset p . r \supset \sim q :$

[Comp] $\supset : r . \supset . p . \sim q$ (4)

$\vdash .(1) .(4) . \mathrm{Comp} . \supset \vdash :. \mathrm{Hp} . \supset : p . \sim q . \equiv . r :. \supset \vdash .$ Prop

SECCION B

TEORIA DE LAS VARIABLES APARENTES

*9. AMPLIACION DE LA TEORIA DE LA DEDUCCION DESDE LOS TIPOS MAS BAJOS DE PROPOSICIONES HASTA LOS MAS ALTOS

Sumario del *9.

En este número introducimos dos nuevas ideas primitivas que pueden expresarse así: "ϕx es siempre (62) verdadera" y "ϕx es alguna vez (62) verdadera", o, más correctamente, como "siempre ϕx" y "alguna vez ϕx". Cuando aseveramos "siempre ϕx" estamos aseverando todos los valores de $\phi \hat{x}$, significando "ϕx" la función misma, como opuesta a un valor ambiguo de la función (cf. pp. 69, 96). No afirmamos que ϕx sea verdadera para todo valor de x porque, de acuerdo con la teoría de tipos, hay valores de x para los cuales "ϕx" carece de sentido; por ejemplo, la función $\phi \hat{x}$ en sí misma debe tener un valor de ese tipo. Representaremos "siempre ϕx" mediante la notación

$$(x) . \phi x,$$

en donde a "(x)" le seguirá el suficiente número de puntos para cubrir la función a la que se refiere la expresión "todo valor". La forma más frecuente en la que se presentan proposiciones de este tipo es la de "implicación formal", es decir, una proposición tal como

$$(x) : \phi x . \supset . \psi x,$$

esto es, "ϕx siempre implica ψx". Esta es la forma en la que expresamos la universal afirmativa "todos los objetos que tienen la propiedad ϕ tienen la propiedad ψ".

Representaremos "alguna vez ϕx" mediante la notación

$$(\exists x) . \phi x.$$

Aquí "$\exists$" significa "existe algún", y el símbolo completo puede leerse "existe un x tal que ϕx".

En una proposición de cualquiera de las dos formas $(x) . \phi x$, $(\exists x) . \phi x$, la x se llama *variable aparente.* Una proposición que no contenga variables aparentes se llama "elemental"; y una función, cuyos valores son todos proposiciones elementales, se llama una función elemental. Por razones explicadas en el Capítulo II de la Introducción, parecería que la negación, la disyunción, y sus derivados, deben tener

(62) Empleamos "siempre" con la significación de "en todos los casos", y no "en todo tiempo". Una observación semejante se aplica a "alguna vez".

un significado diferente cuando se explican a proposiciones elementales que cuando se aplican a proposiciones tales como $(x) \cdot \phi x$ o $(\exists x) \cdot \phi x$. Si $\phi \hat{x}$ es una función elemental, en este número llamaremos a $(x) \cdot \phi x$ y $(\exists x) \cdot \phi x$ "proposiciones de primer orden". Entonces, en virtud del hecho de que la disyunción y la negación no tienen el mismo significado cuando se aplican a proposiciones elementales o a proposiciones de primer orden, resulta que, al aseverar las proposiciones primitivas del *1, debemos limitarlas en su aplicación a proposiciones de un tipo singular, o bien considerarlas como la aserción simultánea de un número de proposiciones primitivas diferentes, de manera que correspondan a los diferentes significados de "disyunción" y "negación". Asimismo, en cuanto a las ideas primitivas de disyunción y negación debemos, en las proposiciones primitivas del *1, reducirlas a disyunciones y negaciones de proposiciones elementales, o bien considerar cada una como realmente múltiple, de manera que, con respecto a cada tipo de proposiciones, necesitaremos una nueva idea primitiva de la negación y otra de la disyunción. En este número mostraremos como, cuando las ideas primitivas de la negación y disyunción se restringen a proposiciones elementales, y las *p, q, r,* de los *1—*5 son, por tanto, necesariamente proposiciones elementales, es posible obtener definiciones de la negación y de la disyunción de proposiciones de primer orden, así como las pruebas de las análogas —para proposiciones de primer orden— de las proposiciones primitivas *1·2—·6. (Las *1·1 y *1·11 se toman de nuevo como proposiciones de primer orden, y las análogas de las *1·7·71·72 requieren un tratamiento nuevo). Resulta que las análogas de las proposiciones *2—*5 se obtienen por mera repetición de pruebas ofrecidas anteriormente. Se sigue también que la teoría de la deducción puede extenderse desde las proposiciones de primer orden hasta las que contienen dos variables aparentes, por mera repetición del proceso que extiende la teoría de la deducción desde las proposiciones elementales a las de primer orden. Así, pues, sólo por la mera repetición del proceso que se expone en este número, puede llegarse a proposiciones de un orden cualquiera. Por lo tanto, la negación y la disyunción pueden tratarse en la práctica como si no hubiese diferencia en estas ideas en cuanto aplicadas a diferentes tipos; es decir, cuando tienen lugar "$\sim p$" o "$p \vee q$", no es preciso en la práctica conocer cuál es el tipo de p o q, ya que las propiedades de la negación y disyunción asumidas en el *1 (las cuales sólo se usan para probar otras propiedades) pueden aseverarse, sin cambio formal, de proposiciones de cualquier orden o, en el caso de $p \vee q$, de dos órdenes cualesquiera. En la práctica, la limitación para el tratamiento de la negación o disyunción como ideas únicas —las mismas en todos los tipos— vendría sólo si en algún momento deseásemos suponer que existe una función de p cuyo valor es siempre $\sim p$, cualquiera que sea el orden de p, o bien que hay alguna función de p y q cuyo valor es siempre $p \vee q$, cualesquiera que sean los órdenes de p y q. Una suposición así no merece la pena, en tanto que p (y q) permanezcan como variables *reales* ya que, en este caso, no hay necesidad de dar el mismo significado a la negación y a la disyunción para los distintos valores de p (y de q), cuando estos distintos valores son de tipos diferentes. Pero si p (o q) se convierte en una variable aparente, entonces, dado que nuestras dos ideas primitivas, $(x) \cdot \phi x$ y $(\exists x) \cdot \phi x$, exigen alguna función ϕ determi-

nada, y restringe la variable aparente a los posibles argumentos para ϕ, resulta que la negación y la disyunción, dondequiera que tengan lugar en la expresión en la cual p (o q) sea una variable aparente, deben restringirse a la clase de negación o disyunción apropiada para un tipo (o un par de tipos) dado. Así, por tomar un ejemplo, si aseveramos la ley del medio excluso en la forma

$$\text{“} \vdash . p \vee \sim p \text{”}$$

no hay necesidad de imponer ninguna restricción sobre p: podemos dar a p un valor de cualquier orden, y entonces dar a la negación y a la disyunción que intervengan los significados que sean apropiados a dicho orden. Pero si aseveramos

$$\text{“} \vdash . (p) . p \vee \sim p \text{”}$$

es necesario que, si nuestro símbolo tiene significación, “$p \vee \sim p$” deba ser el valor, para el argumento p, de una función ϕp; y esto es sólo posible si la negación y la disyunción que intervienen, tienen de antemano significados fijos y si, por tanto, p se limita a un tipo. De este modo, la aserción de la ley del medio excluso en la forma en que incorpora una variable real es más general que en la forma en que incorpora una variable aparente. Observaciones similares se aplican generalmente donde la variable es el argumento para una función típicamente ambigua.

En adelante, las letras aisladas p y q representarán proposiciones *elementales,* así como “ϕx”, “ψx”, etc. Mostraremos como –supuesto cómo las ideas primitivas y las proposiciones del *1 se aplican a las proposiciones elementales– podemos definir y probar ideas y proposiciones análogas tal como se aplican a proposiciones de las formas $(x) . \phi x$ y $(\exists x) . \phi x$. Por mera repetición del proceso análogo, resultará entonces que las ideas y proposiciones análogas pueden definirse y probarse para proposiciones de cualquier orden; por consiguiente, se sigue además, que en todo lo que intervenga la disyunción y la negación, –con tal que las proposiciones no aparezcan como variables aparentes– podemos ignorar por completo la distinción entre los diferentes tipos de proposiciones y entre los diferentes significados de la negación y de la disyunción. Ya que, en la práctica, nunca tenemos ocasión para considerar las proposiciones como variables aparentes, resulta que la jerarquía de proposiciones (como opuesta a la jerarquía de funciones) nunca será pertinente en la práctica después de este número.

El objeto e interés de este número es puramente filosófico, a saber, mostrar cómo, por medio de ciertas proposiciones primitivas, podemos deducir la teoría de la deducción para proposiciones que contengan variables aparentes a partir de la teoría de la deducción para proposiciones elementales. Desde el punto de vista puramente técnico, puede ignorarse la distinción entre proposiciones elementales y otras, con tal que las proposiciones no aparezcan como variables aparentes; podemos entonces considerar las proposiciones primitivas del *1 como aplicables a proposiciones de cualquier tipo, y proceder como en el *10, donde se resume el desarrollo puramente técnico.

Debe observarse que aun cuando, en este número, probamos que las análogas de

las proposiciones primitivas del *1, si tienen validez para proposiciones que contienen n variables aparentes también lo tienen para las que contengan $n + 1$, no por ello debemos suponer que la inducción matemática pueda usarse para inferir que las análogas de las proposiciones primitivas del *1 sean válidas para proposiciones que contienen un número cualquiera de variables aparentes. La inducción matemática es un método de prueba que todavía no es aplicable, y es (como se verá) incapaz de ser usada libremente en tanto no se establezca la teoría de las proposiciones que contengan variables aparentes. Lo que sí podemos hacer, por medio de las proposiciones de este número, es probar nuestro resultado deseado para algún número asignado de variables aparentes –digamos diez– mediante diez aplicaciones de la misma prueba. Así, pues, podemos probar, respecto a alguna proposición asignada, que ellas obedecen a las análogas de las proposiciones primitivas del *1, pero solamente podemos realizar esto procediendo paso a paso, y no por un método compendiado tal como ofrecería la inducción matemática. Es esencial el hecho de que sólo paso a paso puedan alcanzarse tipos superiores, puesto que para proceder de otra manera necesitaríamos una variable aparente que vagase de un tipo a otro, lo cual contradiría el principio bajo el que se han construido los tipos.

Definición de la negación. Primero hemos de definir las negaciones de $(x) \,.\, \phi x$ y de $(\exists x) \,.\, \phi x$. Definimos la negación de $(x) \,.\, \phi x$ como $(\exists x) \,.\, \sim \phi x$; esto es, "no es el caso de que ϕx sea siempre verdadero", lo que quiere decir "es el caso de que no-ϕx es algunas veces verdadero". Similarmente, la negación de $(\exists x) \,.\, \phi x$ se define como $(x) \,.\, \sim \phi x$. Así, pues, proponemos

$*9{\cdot}01.$ $\quad \sim \{(x) \,.\, \phi x\} \,.=.\, (\exists x) \,.\, \sim \phi x \quad$ Df
$*9{\cdot}02.$ $\quad \sim \{(\exists x) \,.\, \phi x\} \,.=.\, (x) \,.\, \sim \phi x \quad$ Df

Para evitar corchetes, escribiremos $\sim (x) \,.\, \phi x$ en lugar de $\sim \{(x) \,.\, \phi x\}$, y $\sim (\exists x) \,.\, \phi x$ en lugar de $\sim \{(\exists x) \,.\, \phi x\}$. De este modo:

$*9{\cdot}011.$ $\quad \sim (x) \,.\, \phi x \,.=.\, \sim \{(x) \,.\, \phi x\} \quad$ Df
$*9{\cdot}021.$ $\quad \sim (\exists x) \,.\, \phi x \,.=.\, \sim \{(\exists x) \,.\, \phi x\} \quad$ Df

Definición de la disyunción. Para definir la disyunción cuando una, o ambas, de las proposiciones que intervienen sea de primer orden, hemos de distinguir los seis casos siguientes:

$*9{\cdot}03.$ $\quad (x) \,.\, \phi x \,.\vee.\, p :\, =.\, (x) \,.\, \phi x \vee p \quad$ Df
$*9{\cdot}04.$ $\quad p \,.\vee.\, (x) \,.\, \phi x :\, =.\, (x) \,.\, p \vee \phi x \quad$ Df
$*9{\cdot}05.$ $\quad (\exists x) \,.\, \phi x \,.\vee.\, p :=.\, (\exists x) \,.\, \phi x \vee p \quad$ Df
$*9{\cdot}06.$ $\quad p \,.\vee.\, (\exists x) \,.\, \phi x :=.\, (\exists x) \,.\, p \vee \phi x \quad$ Df
$*9{\cdot}07.$ $\quad (x) \,.\, \phi x \,.\vee.\, (\exists y) \,.\, \psi y :=:\, (x) :\, (\exists y) \,.\, \phi x \vee \psi y \quad$ Df
$*9{\cdot}08.$ $\quad (\exists y) \,.\, \psi y \,.\vee.\, (x) \,.\, \phi x :=:\, (x) :\, (\exists y) \,.\, \psi y \vee \phi x \quad$ Df

(Las definiciones *9·07·08 también son aplicables cuando ϕ y ψ no sean funciones elementales).

En virtud de estas definiciones, el verdadero alcance de una variable aparente es siempre la totalidad de la proposición aseverada en la que tiene lugar, aun cuando, tipográficamente, su alcance parezca ser sólo parte de la proposición aseverada. Así, cuando $(\exists x) . \phi x$ ó $(x) . \phi x$ *aparezca* como *parte* de una proposición aseverada, realmente no ocurre así, puesto que el alcance de la variable aparente se extiende realmente a toda la proposición aseverada. No obstante, se verá que, mientras no entremos en la teoría de la deducción, $(\exists x) . \phi x$ y $(x) . \phi x$ se comportan como proposiciones que no contengan variables aparentes.

Las definiciones de la implicación, el producto lógico, y la equivalencia pueden transferirse sin alteraciones a $(x) . \phi x$ y a $(\exists x) . \phi x$.

Las definiciones anteriores pueden repetirse para tipos sucesivos y, de este modo, alcanzar a proposiciones de cualquier tipo.

Proposiciones primitivas. Las proposiciones primitivas que se requieren son seis, las cuales se pueden dividir en tres conjuntos de dos. En primer lugar tenemos dos proposiciones que efectúan el paso desde una proposición elemental a una de primer orden, a saber

$*9{\cdot}1.$ $\vdash : \phi x . \supset . (\exists z) . \phi z$ Pp

$*9{\cdot}11.$ $\vdash : \phi x \vee \phi y . \supset . (\exists z) . \phi z$ Pp

De estas, la primera enuncia que, si ϕx es verdadera, entonces hay un valor de $\phi \hat{z}$ que es verdadero; esto es, si podemos encontrar un caso en que una función sea verdadera, entonces la función es "alguna vez verdadera". (Cuando decimos de alguna función "alguna vez verdadera", no damos a entender que afirmamos que hay *más* de un argumento para el cual es verdadero, sino sólo que por lo menos existe uno). Prácticamente, la proposición primitiva de arriba proporciona el único método de probar "teoremas de existencia": a fin de probar tales teoremas es necesario (y suficiente) encontrar algún caso en el que un objeto posea la propiedad en cuestión. Si hubiésemos supuesto lo que pueden llamarse "axiomas de existencia", es decir, axiomas que declaran $(\exists z) . \phi z$ para alguna ϕ en particular, estos axiomas proporcionarían otros métodos de probar la existencia. Ejemplos de tales axiomas son el axioma multiplicativo (*88) y el axioma del infinito (que se define en el $*120{\cdot}03$). Pero no hemos supuesto ninguno de tales axiomas en este trabajo.

La segunda de las proposiciones primitivas de arriba se usa sólo una vez, al probar $(\exists z) . \phi z . \vee . (\exists z) . \phi z : \supset . (\exists z) . \phi z$, que es la proposición análoga de la $*1{\cdot}2$ (a saber $p \vee p . \supset . p$) cuando p se sustituye por $(\exists z) . \phi z$. El efecto de esta proposición primitiva es poner de manifiesto la ambigüedad de la z requerida a fin de asegurar $(\exists z) . \phi z$. Desde luego, en virtud de $*9{\cdot}1$, tenemos:

$$\phi x . \supset . (\exists z) . \phi z \quad \text{y} \quad \phi y . \supset . (\exists z) . \phi z.$$

Pero si, a partir de éstas intentamos inferir que $\phi x \vee \phi y . \supset . (\exists z) . \phi z$, debemos emplear la proposición $q \supset p . r \supset p . \supset . q \vee r \supset p$, en donde p es $(\exists z) . \phi z$. Ahora se fundamentará, con referencia a la $*4{\cdot}77$ y a las proposiciones empleadas en esta

prueba, que esta proposición depende de la *1·2, es decir de $p \vee p . \supset . p$. Por tanto, no podemos usarla para probar $(\exists x) . \phi x . \vee . (\exists x) . \phi x : \supset . (\exists x) . \phi x$, y por tanto nos vemos obligados a dar por supuesto la proposición primitiva *9·11.

A continuación tenemos dos proposiciones que tienen relación con la *inferencia* a, o desde, proposiciones que contienen variables aparentes, como opuestos a la implicación. Primeramente tenemos, para el nuevo significado de la implicación que resulta de las definiciones de la negación y disyunción que damos arriba, la análoga de la *1·1, a saber

***9·12.** Lo que está implicado por una premisa verdadera es verdadero. Pp.

Es decir, dadas "$\vdash . p$" y "$\vdash . p \supset q$", podemos proceder a "$\vdash . q$" aun cuando las proposiciones p y q no sean elementales. También, como en *1·11, a partir de "$\vdash . \phi x$" y de "$\vdash . \phi x \supset \psi x$", podemos llegar a "$\vdash . \psi x$", en donde x es una variable real, y tanto ϕ como ψ no son necesariamente funciones elementales. Precisamente en esta última forma es como usualmente se necesita el axioma. Esto es aplicable a funciones de varias variables como a funciones de una variable.

A continuación tenemos la proposición primitiva que permite pasar de una variable real a una aparente, a saber, "cuando ϕy puede aseverarse, en donde y puede ser cualquier argumento posible, entonces puede aseverarse $(x) . \phi x$". En otras palabras, cuando ϕy es verdadero, cualquiera que sea la y elegida entre los posibles argumentos, entonces $(x) . \phi x$ es verdadera, esto es, todos los valores de ϕ son verdaderos. Quiere esto decir que si podemos aseverar un valor ϕy completamente ambiguo, eso se debe a que todos los valores son verdaderos. Podemos expresar esta proposición primitiva mediante estas palabras: "lo que es verdadero en *cualquier* caso, cualquiera que sea el caso elegido, es verdadero en *todos* los casos". No podemos simbolizar esta proposición, porque si ponemos

$$\text{"} \vdash : \phi y . \supset . (x) . \phi x \text{"}$$

eso significa: "Cualquiera que sea la y que se elija, ϕy implica $(x) . \phi x$", lo cual, en general, es falso. Lo que queremos decir es: "Si ϕy es verdadero, cualquiera que sea la y que se elija, entonces $(x) . \phi x$ es verdadero". Sin embargo, no hemos facilitado ningún símbolo para la mera *hipótesis* de lo que *se asevera* en "$\vdash . \phi y$", en donde y es una variable real, y no merece la pena asignarle un símbolo porque raramente se necesitaría. Si por el momento usamos el símbolo $[\phi y]$ para expresar esta hipótesis, entonces nuestra primitiva proposición es

$$\vdash : [\phi y] . \supset . (x) . \phi x \quad \text{Pp.}$$

En la práctica, esta proposición primitiva se usa solamente para la *inferencia,* y no para la implicación; es decir, cuando en la realidad tenemos una aserción que contenga una variable real, ello nos permite convertir esta variable real en una variable aparente poniéndola entre corchetes inmediatamente después del signo de aserción, seguido del suficiente número de puntos para que alcance hasta el final de la aserción. A este proceso se le denominará "cambio de una variable real en una variable aparente". Así, pues, podemos aseverar nuestra proposición primitiva, para uso técnico, en la forma:

***9·13.** En una aserción que contenga una variable real, esta variable real puede cambiarse en una variable aparente de la que todos los valores posibles se aseveran para satisfacer la función en cuestión. Pp.

Seguidamente tenemos dos proposiciones primitivas que tienen relación con los tipos. Estas precisan algunas explicaciones previas.

Idea primitiva: Individual. Decimos que x es un "individual" si x no es una proposición ni una función (cf. p. 108).

***9·131.** *Definición del "ser del mismo tipo".* La siguiente definición es una de paso a paso; la definición para tipos superiores presupone ésta para tipos inferiores. Decimos que u y v "son del mismo tipo" si: 1) ambos son individuales; 2) si ambos son funciones elementales que toman argumentos del mismo tipo; 3) si u es una función y v es una negación; 4) si u es $\phi\hat{x}$ o $\psi\hat{x}$, y v es $\phi\hat{x} \vee \psi\hat{x}$, en donde $\phi\hat{x}$ y $\psi\hat{x}$ son funciones elementales; 5) si u es $(y) \cdot \phi(\hat{x}, y)$ y v es $(z) \cdot \psi(x, z)$, en donde $\phi(\hat{x}, \hat{y})$ y $\psi(\hat{x}, \hat{y})$ son del mismo tipo; 6) si ambas son proposiciones elementales; 7) si u es una proposición elemental y v es $\sim u$; o 8) si u es $(x) \cdot \phi x$ y v es $(y) \cdot \psi y$, en donde $\phi\hat{x}$ y $\psi\hat{x}$ son del mismo tipo.

Nuestras proposiciones primitivas son:

***9·14.** Si "ϕx" es significante, entonces si x es del mismo tipo que a, "ϕa" es significante; y viceversa. Pp (Cf. nota en el *10·121, p. 202).

***9·15.** Si, para alguna a, hay una proposición ϕa, entonces hay una función $\phi\hat{x}$, y viceversa. Pp.

Se verá que, en virtud de estas definiciones,

$$(x) \cdot \phi x \cdot \supset \cdot \text{significa } \sim(x) \cdot \phi x \cdot \vee \cdot p, \ i.e. \ (\exists x) \cdot \sim \phi x \cdot \vee \cdot p,$$
$$\text{es decir, } (\exists x) \cdot \sim \phi x \vee p, \ i.e. \ (\exists x) \cdot \phi x \supset p$$
$$(\exists x) \cdot \phi x \cdot \supset \cdot \text{significa } \sim(\exists x) \cdot \phi x \cdot \vee \cdot p, \ i.e. \ (x) \cdot \sim \phi x \cdot \vee \cdot p,$$
$$\text{es decir, } (x) \cdot \sim \phi x \vee p, \ i.e. \ (x) \cdot \phi x \supset p$$

A fin de probar que $(x) \cdot \phi x$ y $(\exists x) \cdot \phi x$ obedecen a las mismas reglas de deducción que ϕx, tenemos que probar que estas proposiciones de las formas $(x) \cdot \phi x$ y $(\exists x) \cdot \phi x$ pueden reemplazar a una o más de las proposiciones p, q, r en las *1·2–·6. Cuando se haya probado esto, resultan aplicables las pruebas previas de las proposiciones que vienen a continuación en los *2–*5. Estas pruebas se ofrecen más adelante. También se prueban otras proposiciones que se necesitan en las demostraciones.

***9·2.** $\vdash : (x) \cdot \phi x \cdot \supset \cdot \phi y$

Esta proposición establece el principio de deducción desde lo general a lo particular, es decir que "lo que se cumple en todos los casos se cumple en algún caso".

Dem.

$$\vdash \cdot *2{\cdot}1 \cdot \supset \vdash \cdot \sim \phi y \vee \phi y \qquad (1)$$
$$\vdash \cdot *9{\cdot}1 \cdot \supset \vdash : \sim \phi y \vee \phi y \cdot \supset \cdot (\exists x) \cdot \sim \phi x \vee \phi y \qquad (2)$$

$$\vdash .(1).(2).*1{\cdot}11 . \supset \vdash .(\exists x) . \sim \phi x \vee \phi y \tag{3}$$
$$[(3).(*9{\cdot}05)] \qquad \vdash : (\exists x) . \sim \phi x . \vee . \phi y \tag{4}$$
$$[(4).(*9{\cdot}01.*1{\cdot}01)] \qquad \vdash : (x) . \phi x . \supset . \phi y$$

En la segunda línea de este prueba, "$\sim \phi y \vee \phi y$" se toma como el valor, para el argumento y, de la función "$\sim \phi x \vee \phi y$" en donde x es el argumento. Un método similar de uso de la $*9{\cdot}1$ se emplea en la mayoría de las pruebas que siguen.

La proposición $*1{\cdot}11$ se usa, (como ocurre en la tercera línea de la prueba anterior) en casi todos los pasos, excepto en aquellos que son nuevas aplicaciones de las definiciones. Por lo tanto, no volveremos a referirnos a ello, salvo en los casos en donde su empleo sea oscuro o especialmente importante.

$*9{\cdot}21$. $\vdash :. (x) . \phi x \supset \psi x . \supset : (x) . \phi x . \supset . (x) . \psi x$

Esto es, si ϕx implica siempre ψx, entonces "siempre ϕx" implica "siempre ψx". El empleo de esta proposición es constante a lo largo de lo que resta de este trabajo.

Dem.

$$\vdash .*2{\cdot}08 . \qquad \supset \vdash : \phi z \supset \psi z . \supset . \phi z \supset \psi z \tag{1}$$
$$\vdash .(1).*9{\cdot}1 . \qquad \supset \vdash : (\exists y) : \phi z \supset \psi z . \supset . \phi y \supset \psi z \tag{2}$$
$$\vdash .(2).*9{\cdot}1 . \qquad \supset \vdash :. (\exists x) :. (\exists y) : \phi x \supset \psi x . \supset . \phi y \supset \psi z \tag{3}$$
$$\vdash .(3).*9{\cdot}13 . \qquad \supset \vdash :: (z) :: (\exists x) :. (\exists y) : \phi x \supset \psi x . \supset . \phi y \supset \psi z \tag{4}$$
$$[(4).(*9{\cdot}06)] \qquad \vdash :: (z) :: (\exists x) :. \phi x \supset \psi x . \supset : (\exists y) . \phi y \supset \psi z \tag{5}$$
$$[(5).(*1{\cdot}01.*9{\cdot}08)] \qquad \vdash :. (\exists x) . \sim (\phi x \supset \psi x) : \vee : (z) : (\exists y) . \sim \phi y \vee \psi z \tag{6}$$
$$[(6).(*9{\cdot}08)] \qquad \vdash :. (\exists x) . \sim (\phi x \supset \psi x) : \vee : (\exists y) . \sim \phi y . \vee . (z) . \psi z \tag{7}$$
$$[(7).(*1{\cdot}01)] \qquad \vdash :. (x) . \phi x \supset \psi x . \supset : (y) . \phi y . \supset . (z) . \psi z$$

Esta es la proposición a probar, ya que "$(y) . \phi y$" es la misma proposición que "$(x) . \phi x$", y "$(z) . \psi z$" es la misma proposición que "$(x) . \psi x$".

$*9{\cdot}22$. $\vdash :. (x) . \phi x \supset \psi x . \supset : (\exists x) . \phi x . \supset . (\exists x) . \psi x$

Es decir, si ϕx siempre implica ψx, entonces si ϕx es verdadero alguna vez, también lo es ψz. Esta proposición, al igual que la $*9{\cdot}21$, se usa constantemente en lo que sigue.

Dem.

$$\vdash .*2{\cdot}08 . \qquad \supset \vdash : \phi y \supset \psi y . \supset . \phi y \supset \psi y \tag{1}$$
$$\vdash .(1).*9{\cdot}1 . \qquad \supset \vdash : (\exists z) : \phi y \supset \psi y . \supset . \phi y \supset \psi z \tag{2}$$
$$\vdash .(2).*9{\cdot}1 . \qquad \supset \vdash :. (\exists x) :. (\exists z) : \phi x \supset \psi x . \supset . \phi y \supset \psi z \tag{3}$$
$$\vdash .(3).*9{\cdot}13 . \qquad \supset \vdash :: (y) :: (\exists x) :. (\exists z) : \phi x \supset \psi x . \supset . \phi y \supset \psi z \tag{4}$$
$$[(4).(*9{\cdot}06)] \qquad \vdash :: (y) :: (\exists x) :. \phi x \supset \psi x . \supset : (\exists z) . \phi y \supset \psi z \tag{5}$$
$$[(5).(*1{\cdot}01.*9{\cdot}08)] \qquad \vdash :: (\exists x) . \sim (\phi x \supset \psi x) : \vee : (y) : (\exists z) . \phi y \supset \psi z \tag{6}$$
$$[(6).(*1{\cdot}01.*9{\cdot}07)] \qquad \vdash :: (\exists x) . \sim (\phi x \supset \psi x) : \vee : (y) . \sim \phi y . \vee . (\exists z) . \psi z \tag{7}$$
$$[(7).(*1{\cdot}01.*9{\cdot}01{\cdot}02)] \vdash :. (x) . \phi x \supset \psi x . \supset : (\exists y) . \phi y . \supset . (\exists z) . \psi z$$

Esta es la proposición a probar, porque $(\exists y) . \phi y$ es la misma proposición que $(\exists x) . \phi x$, y $(\exists z) . \psi z$ es la misma proposición que $(\exists x) . \psi x$.

***9·23.** $\vdash : (x) . \phi x . \supset . (x) . \phi x$ [Id . *9·13·21]

***9·24.** $\vdash : (\exists x) . \phi x . \supset . (\exists x) . \phi x$ [Id . *9·13·22]

***9·25.** $\vdash :. (x) . p \vee \phi x . \supset : p . \vee . (x) . \phi x$ [*9·23 . (*9·04)]

Ahora nos encontramos en condiciones de probar las análogas de las *1·2—·6, sustituyendo algunas de las letras p, q, r que figuran en esas proposiciones por $(x) . \phi x$ o por $(\exists x) . \phi x$. Las pruebas se ofrecen más adelante.

***9·3.** $\vdash :. (x) . \phi x . \vee . (x) . \phi x : \supset . (x) . \phi x$

Dem.

$\vdash . *1·2 . \quad \supset \vdash . \phi x \vee \phi x . \supset . \phi x$ (1)

$\vdash . (1) . *9·1 . \quad \supset \vdash : (\exists y) : \phi x \vee \phi y . \supset . \phi x$ (2)

$\vdash . (2) . *9·13 . \quad \supset \vdash :. (x) :. (\exists y) : \phi x \vee \phi y . \supset . \phi x$ (3)

$[(3) . (*9·05·01·04)] \quad \vdash :. (x) :. \phi x . \vee . (y) . \phi y : \supset . \phi x$ (4)

$\vdash . (4) . *9·21 . \quad \supset \vdash :. (x) : \phi x . \vee . (y) . \phi y : \supset . (x) . \phi x$ (5)

$[(5) . (*9·03)] \quad \vdash :. (x) . \phi x . \vee . (y) . \phi y : \supset . (x) . \phi x :. \supset \vdash .$ Prop

***9·31.** $\vdash :. (\exists x) . \phi x . \vee . (\exists x) . \phi x : \supset . (\exists x) . \phi x$

Esta es la única proposición que emplea la *9·11.

Dem.

$\vdash . *9·11·13 . \quad \supset \vdash : (y) : \phi x \vee \phi y . \supset . (\exists z) . \phi z$ (1)

$[(1) . (*9·03·02)] \quad \vdash : (\exists y) . \phi x \vee \phi y . \supset . (\exists z) . \phi z$ (2)

$\vdash . (2) . *9·13 . \supset \vdash : (x) : (\exists y) . \phi x \vee \phi y . \supset . (\exists z) . \phi z$ (3)

$[(3) . (*9·03·02)] \quad \vdash :. (\exists x) : (\exists y) . \phi x \vee \phi y : \supset . (\exists z) . \phi z$ (4)

$[(4) . (*9·05·06)] \quad \vdash :. (\exists x) . \phi x . \vee . (\exists y) . \phi y : \supset . (\exists z) . \phi z$

***9·32.** $\vdash :. q . \supset : (x) . \phi x . \vee . q$

Dem.

$\vdash . *1·3 . \quad \supset \vdash :. q . \supset : \phi x . \vee . q$ (1)

$\vdash . (1) . *9·13 . \supset \vdash :. (x) :. q . \supset : \phi x . \vee . q$

$[*9·25] \quad \supset \vdash :. q . \supset : (x) : \phi x . \vee . q$ (2)

$[(2) . (*9·03)] \quad \vdash :. q . \supset : (x) . \phi x . \vee . q$

***9·33.** $\vdash :. q . \supset : (\exists x) . \phi x . \vee . q$ [La prueba es como la anterior]

***9·34.** $\vdash :. (x) . \phi x . \supset : p . \vee . (x) . \phi x$

Dem.

$\vdash . *1·3 . \quad \supset \vdash : \phi x . \supset . p \vee \phi x$ (1)

$\vdash . (1) . *9·13 . \quad \supset \vdash : (x) : \phi x . \supset . p \vee \phi x$ (2)

$\vdash . (2) . *9·21 . \quad \supset \vdash : (x) . \phi x . \supset . (x) . p \vee \phi x$ (3)

$\vdash . (3) . (*9·04) . \supset \vdash .$ Prop

***9·35.** $\vdash :. (\exists x) . \phi x . \supset : p . \vee . (\exists x) . \phi x$ [La prueba es como la anterior]

***9·36.** $\vdash :. p . \vee . (x) . \phi x : \supset : (x) . \phi x . \vee . p$

Dem.

$\vdash . *1·4 . \quad \supset \vdash : p \vee \phi x . \supset . \phi x \vee p$ (1)

$\vdash .(1).*9{\cdot}13{\cdot}21. \quad \supset \vdash :(x).p \vee \phi x.\supset .(x).\phi x \vee p$ (2)

$\vdash .(2).(*9{\cdot}03{\cdot}04).\supset \vdash .\mathrm{Prop}$

***9·361.** $\vdash :.(x).\phi x.\vee .p:\supset :p.\vee .(x).\phi x$ [Prueba similar]

***9·37.** $\vdash :.p.\vee .(\exists x).\phi x:\supset :(\exists x).\phi x.\vee .p$ [Prueba similar]

***9·371.** $\vdash :.(\exists x).\phi x.\vee .p:\supset :p.\vee .(\exists x).\phi x$ [Prueba similar]

***9·4.** $\vdash ::p:\vee :q.\vee .(x).\phi x:.\supset :.q:\vee :p.\vee .(x).\phi x$

Dem.

$\vdash .*1{\cdot}5.*9{\cdot}21.\supset \vdash :.(x):p.\vee .q\vee\phi x:\supset :(x):q.\vee .p\vee\phi x$ (1)

$\vdash .(1).(*9{\cdot}04).\supset \vdash .\mathrm{Prop}$

***9·401.** $\vdash ::p:\vee :q.\vee .(\exists x).\phi x:.\supset :.q:\vee :p.\vee .(\exists x).\phi x$ [Como anteriormente]

***9·41.** $\vdash ::p:\vee :(x).\phi x.\vee .r:.\supset :.(x).\phi x:\vee :p\vee r$ [Como anteriormente]

***9·411.** $\vdash ::p:\vee :(\exists x).\phi x.\vee .r:.\supset :.(\exists x).\phi x:\vee :p\vee r$ [Como anteriormente]

***9·42.** $\vdash ::(x).\phi x:\vee :q\vee r:.\supset :.q:\vee :(x).\phi x.\vee .r$ [Como anteriormente]

***9·421.** $\vdash ::(\exists x).\phi x:\vee :q\vee r:.\supset :.q:\vee :(\exists x).\phi x.\vee .r$ [Como anteriormente]

***9·5.** $\vdash ::p\supset q.\supset :.p.\vee .(x).\phi x:\supset :q.\vee .(x).\phi x$

Dem.

$\vdash .*1{\cdot}6. \quad \supset \vdash :.p\supset q.\supset :p\vee\phi y.\supset .q\vee\phi y$ (1)

$\vdash .(1).*9{\cdot}1.(*9{\cdot}06). \quad \supset \vdash :.p\supset q.\supset :(\exists x):p\vee\phi x.\supset .q\vee\phi y$ (2)

$\vdash .(2).*9{\cdot}13.(*9{\cdot}04).\supset \vdash ::p\supset q.\supset :.(y):.(\exists x):p\vee\phi x.\supset .q\vee\phi y$ (3)

$[(3).(*9{\cdot}08)] \quad \vdash ::p\supset q.\supset :.(\exists x).\sim(p\vee\phi x).\vee .(y).q\vee\phi y$ (4)

$[(4).(*9{\cdot}01)] \quad \vdash ::p\supset q.\supset :.(x).p\vee\phi x.\supset .(y).q\vee\phi y$ (5)

$[(5).(*9{\cdot}04)] \quad \vdash ::p\supset q.\supset :.p.\vee .(x).\phi x:\supset :q.\vee .(y).\phi y$

***9·501.** $\vdash ::p\supset q.\supset :.p.\vee .(\exists x).\phi x:\supset :q.\vee .(\exists x).\phi x$ [Como anteriormente]

***9·51.** $\vdash ::p.\supset .(x).\phi x:\supset :.p\vee r.\supset :(x).\phi x.\vee .r$

Dem.

$\vdash .*1{\cdot}6. \quad \supset \vdash :.p\supset\phi x.\supset :p\vee r.\supset .\phi x\vee r$ (1)

$\vdash .(1).*9{\cdot}13{\cdot}21. \quad \supset \vdash ::(x).p\supset\phi x.\supset :.(x):p\vee r.\supset .\phi x\vee r$ (2)

$\vdash .(2).(*9{\cdot}03{\cdot}04).\supset \vdash .\mathrm{Prop}$

***9·511.** $\vdash ::p.\supset .(\exists x).\phi x:\supset :.p\vee r.\supset :(\exists x).\phi x.\vee .r$ [Como anteriormente]

***9·52.** $\vdash ::(x).\phi x.\supset .q:\supset :.(x).\phi x.\vee .r:\supset .q\vee r$

Dem.

$\vdash .*1{\cdot}6. \quad \supset \vdash :.\phi x\supset q.\supset :\phi x\vee r.\supset .q\vee r$ (1)

$\vdash .(1).*9{\cdot}13{\cdot}22. \quad \supset \vdash ::(\exists x).\phi x\supset q.\supset :.(\exists x):\phi x\vee r.\supset .q\vee r$ (2)

$\vdash .(2).(*9{\cdot}05{\cdot}01).\supset \vdash ::(x).\phi x.\supset .q:\supset :.(x).\phi x\vee r.\supset .q\vee r$ (3)

$\vdash .(3).(*9{\cdot}03). \quad \supset \vdash .\mathrm{Prop}$

***9·521.** $\vdash ::(\exists x).\phi x.\supset .q:\supset :.(\exists x).\phi x.\vee .r:\supset .q\vee r$ [Como anteriormente]

***9·6.** $(x).\phi x$, $\sim(x).\phi x$, $(\exists x).\phi x$ y $\sim(\exists x).\phi x$ son del mismo tipo

[*9·131, (7) y (8)]

***9·61.** Si $\phi\hat{x}$ y $\psi\hat{x}$ son funciones elementales del mismo tipo, existe una función $\phi\hat{x}\vee\psi\hat{x}$.

Dem.

Por las *9·14·15, hay una a para la cual "ψa", y por lo tanto "ϕa" tiene significación y, por lo tanto, también la tiene "$\phi a \vee \psi a$", en virtud de la idea primitiva de la disyunción. En consecuencia, llegamos al resultado, en virtud de la *9·15.

La misma prueba es válida para las funciones de cualquier número de variables.

***9·62.** Si $\phi(\hat{x}, \hat{y})$ y $\psi\hat{z}$ son funciones elementales, y el argumento-x para ϕ es del mismo tipo que el argumento para ψ, hay funciones

$$(y) . \phi(\hat{x}, y) . \vee . \psi\hat{x}, \quad (\exists y) . \phi(\hat{x}, y) . \vee . \psi\hat{x}.$$

Dem.

En virtud de la *9·15, existen proposiciones $\phi(x, b)$ y ψa en donde, por hipótesis, x y a son del mismo tipo. Por lo tanto, de acuerdo con la *9·14, existe una proposición $\phi(a, b)$ y, por consiguiente, por la idea primitiva de la disyunción, existe una proposición $\phi(a, b) \vee \psi a$; en consecuencia (teniendo en cuenta *9·15 y *9·03), hay una proposición $(y) . \phi(a, y) . \vee . \psi a$. De manera similar, existe una proposición $(\exists y) . \phi(a, y) . \vee . \psi a$. Finalmente, se llega al resultado, en virtud de la *9·15.

***9·63.** Si $\phi(\hat{x}, \hat{y})$, $\psi(\hat{x}, \hat{y})$ son funciones elementales del mismo tipo, existen funciones $(y) . \phi(\hat{x}, y) . \vee . (z) . \psi(\hat{x}, z)$, etc. [Las pruebas son como arriba].

Ahora hemos completado la prueba de que, en las proposiciones primitivas del *1, *una* cualquiera de las proposiciones que intervengan en ellas puede sustituirse por $(x) . \phi x$ o por $(\exists x) . \phi x$. Resulta que, por mera repetición de pruebas, podemos demostrar que cualquier otra proposición que intervenga en estas proposiciones puede sustituirse simultáneamente por $(x) . \psi x$ o por $(\exists x) . \psi x$. De este modo, todas las proposiciones primitivas del *1 y, por tanto, todas las proposiciones de *2—*5, son válidas igualmente cuando alguna, o todas, de las proposiciones en cuestión sean de una de las formas $(x) . \phi x$, $(\exists x) . \phi x$, que es lo que se iba a probar.

Por mera repetición de pruebas, se sigue que las proposiciones *1—*5 son válidas cuando p, q, r se sustituyen por proposiciones que contengan un número cualquiera de variables aparentes.

*10. TEORIA DE LAS PROPOSICIONES QUE CONTIENEN UNA VARIABLE APARENTE

Sumario del *10.

El principal objeto de las proposiciones de este número es extender a implicaciones formales (es decir, a proposiciones de la forma $(x) . \phi x \supset \psi x$) el mayor número posible de proposiciones probadas previamente para las implicaciones materiales, es decir, para proposiciones de la forma $p \supset q$. Así por ejemplo, hemos probado en *3·33 que

$$p \supset q . q \supset r . \supset . p \supset r.$$

Supongamos

p = Sócrates es un griego,
q = Sócrates es un hombre,
r = Sócrates es un mortal.

Entonces tenemos que "si 'Sócrates es un griego' implica que 'Sócrates es un hombre', y si 'Sócrates es un hombre' implica que 'Sócrates es mortal', se sigue que 'Sócrates es un griego' implica que 'Sócrates es un mortal' ". Pero por sí mismo esto no prueba que si todos los griegos son hombres y todos los hombres son mortales, entonces todos los griegos son mortales.

Suponiendo

$$\phi x . = . x \text{ es un griego}$$
$$\psi x . = . x \text{ es un hombre}$$
$$\chi x . = . x \text{ es un mortal}$$

hemos de probar

$$(x) . \phi x \supset \psi x : (x) . \psi x \supset \chi x : \supset : (x) . \phi x \supset \chi x.$$

Esta es una de las proposiciones que hemos de probar en este número. Se verá que la implicación formal $((x) . \phi x \supset \psi x)$ es una relación de dos funciones, $\phi\hat{x}$ y $\psi\hat{x}$. Muchas de las propiedades formales de esta relación son análogas a las propiedades de la relación "$p \supset q$" que expresa la implicación material; esta es de las proposiciones análogas que se prueban en este número.

Supondremos en este número —lo que ha sido probado en el *9— que las proposiciones de los *1—*5 pueden aplicarse a proposiciones tales como $(x) . \phi x$ y $(\exists x) . \phi x$. En vez del método adoptado en el *9, es posible tomar a la negación y la disyunción como nuevas ideas primitivas, aplicadas a las proposiciones que contienen variables aparentes y suponer que, con los nuevos significados de la negación y de la disyunción, las proposiciones primitivas del *1 todavía mantienen su validez. Si se adopta este método, no necesitamos considerar a $(\exists x) . \phi x$ como una idea primitiva, pero podemos poner

***10·01.** $(\exists x) . \phi x . = . \sim(x) . \sim\phi x$ Df

A fin de aclarar como puede desarrollarse este método alternativo, en este número no asumiremos nada de lo que ha sido probado en el *9, excepto ciertas proposiciones que, en el método alternativo, serán proposiciones primitivas, y (lo que en parte caracteriza el método alternativo) la aplicabilidad a las proposiciones que contienen variables aparentes, de las análogas de las ideas y proposiciones primitivas del *1 y, por tanto, de sus consecuencias tal como se expone en los *2—*5.

Las definiciones siguientes sirven solamente para introducir una notación que, con frecuencia, es más conveniente que la notación $(x) . \phi x \supset \psi x$ o $(x) . \phi x \equiv \psi x$.

***10·02.** $\phi x \supset_x \psi x . = . (x) . \phi x \supset \psi x$ Df
***10·03.** $\phi x \equiv_x \psi x . = . (x) . \phi x \equiv \psi x$ Df

La primera de estas notaciones se debe a Peano quien, sin embargo, no tiene notación para $(x)\,\phi x$ salvo en el caso especial de una implicación formal.

Las proposiciones siguientes (*10·1·11·12·121·122) ya han sido dadas en el *9. La *10·1 es la *9·2, *10·11 es *9·13, *10·12 es *9·25, *10·121 es *9·14 y *10·122 es *9·15. Estas cinco proposiciones deben tomarse como proposiciones primitivas en el método alternativo; por otra parte, las *9·1 y *9·11 no se precisan como proposiciones primitivas en el método alternativo.

Las proposiciones de este número son muy empleadas a lo largo del resto del trabajo. Las proposiciones más usadas son las siguientes:

***10·1.** $\vdash : (x) . \phi x . \supset . \phi y$

Esto es, lo que es verdadero en todos los casos es verdadero en un caso cualquiera.

***10·11.** Si ϕx es verdadero, cualquiera que pueda ser el posible argumento y, entonces $(x) . \phi x$ es verdadero. En otras palabras, siempre que pueda aseverarse la función proposicional ϕy, también se puede aseverar la proposición $(x) . \phi x$.

***10·21.** $\vdash :. (x) . p \supset \phi x . \equiv : p . \supset . (x) . \phi x$
***10·22.** $\vdash :. (x) . \phi x . \psi x . \equiv : (x) . \phi x : (x) . \psi x$

Las condiciones de significación en esta proposición exigen que ϕ y ψ deban tener argumentos del mismo tipo.

***10·23.** $\vdash :. (x) . \phi x \supset p . \equiv : (\exists x) . \phi x . \supset . p$

Esto es, si ϕx siempre implica p, entonces si ϕx es siempre verdadero, p es verdadero.

***10·24.** $\vdash : \phi y . \supset . (\exists x) . \phi x$

Esto es, si ϕy es verdadero, entonces hay una x para la cual ϕx es verdadero. Este es el único método de probar teoremas de existencia.

***10·27.** $\vdash :. (z) . \phi z \supset \psi z . \supset : (z) . \phi z . \supset . (z) . \psi z$

Esto es, si ϕz siempre implica ψz, entonces "siempre ϕz" implica "siempre ψz". Las tres proposiciones siguientes, que son igualmente útiles, son análogas a la *10·27.

***10·271.** $\vdash :. (z) . \phi z \equiv \psi z . \supset : (z) . \phi z . \equiv . (z) . \psi z$

***10·28.** $\vdash :. (x) . \phi x \supset \psi x . \supset : (\exists x) . \phi x . \supset . (\exists x) . \psi x$

***10·281.** $\vdash :. (x) . \phi x \equiv \psi x . \supset : (\exists x) . \phi x . \equiv . (\exists x) . \psi x$

***10·35.** $\vdash :. (\exists x) . p . \phi x . \equiv : p : (\exists x) . \phi x$

***10·42.** $\vdash :. (\exists x) . \phi x . \vee . (\exists x) . \psi x : \equiv . (\exists x) . \phi x \vee \psi x$

***10·5.** $\vdash :. (\exists x) . \phi x . \psi x . \supset : (\exists x) . \phi x : (\exists x) . \psi x$

Debe observarse que mientras el *10·42 expresa una equivalencia, el *10·5 expresa una implicación. Este es el origen de muchas diferencias que en lo sucesivo habrá entre fórmulas relativas a la adición y fórmulas relativas a la multiplicación.

***10·51.** $\vdash :. \sim\{(\exists x) . \phi x . \psi x\} . \equiv : \phi x . \supset_x . \sim \psi x$

Esta proposición es análoga a

$$\vdash : \sim(p . q) . \equiv . p \supset \sim q$$

que se obtiene de la *4·63 mediante transposición.

De las restantes proposiciones de este número, algunas se emplean con bastante frecuencia, en tanto que otras son lemas que se usan sólo una o dos veces, mucho más adelante.

***10·01.** $(\exists x) . \phi x . = . \sim(x) . \sim \phi x$ Df

Esta definición se ofrece sólo para que se emplee cuando descartemos el método del *9 en favor del método alternativo ya explicado. En otro caso tenemos

$$\vdash : (\exists x) . \phi x . \equiv . \sim(x) . \sim \phi x.$$

***10·02.** $\phi x \supset_x \psi x . = . (x) . \phi x \supset \psi x$ Df

***10·03.** $\phi x \equiv_x \psi x . = . (x) . \phi x \equiv \psi x$ Df

***10·1.** $\vdash : (x) . \phi x . \supset . \phi y$ [*9·2]

***10·11.** Si ϕy es verdadero, cualquiera que pueda ser el posible argumento y, entonces $(x) . \phi x$ es verdadero [*9·13].

Esta proposición es, en cierto sentido, la conversa de la *10·1. La proposición *10·1 puede expresarse así: "lo que es verdad de todo es verdad de algo", mientras que la *10·11 puede expresarse así: "lo que es verdad de algo, elija como se elija, es verdad de todo".

***10·12.** $\vdash :. (x) . p \vee \phi x . \supset : p . \vee . (x) . \phi x$ [*9·25]

De acuerdo con las definiciones expuestas en el *9, esta proposición es un mero ejemplo de "$q \supset p$", dado que por definición ambos miembros de la implicación tienen diferentes símbolos para la misma proposición. Por el contrario, de acuerdo con el método alternativo, la *10·12 es una proposición substancial.

***10·121.** Si "ϕx" es significante, entonces si a es del mismo tipo que x, "ϕa" es significante, y viceversa. [*9·14].

De esta proposición resulta que dos argumentos de la misma proposición deben ser del mismo tipo; ya que si x y a son argumentos de $\phi\hat{x}$, "ϕx" y "ϕa" son significantes y, por lo tanto, x y a son del mismo tipo. Así, la proposición primitiva de arriba incorpora el resultado de nuestra discusión de las paradojas del círculo vicioso en el capítulo II de la Introducción.

***10·122.** Si, para alguna a, hay una proposición ϕa, entonces hay una función $\phi\hat{x}$; y viceversa. [*9·15].

***10·13.** Si $\phi\hat{x}$ y $\psi\hat{x}$ tienen argumentos del mismo tipo, y tenemos "$\vdash . \phi x$" y "$\vdash . \psi x$", tendremos "$\vdash . \phi x . \psi x$".

Dem.

Por el empleo repetido de las *9·61·62·63·131 (3) llegamos a una función $\sim\phi\hat{x} \vee \sim\psi\hat{x}$. Por tanto, mediante las *2·11 y *3·01,

$$\vdash : \sim\phi x \vee \sim\psi x . \vee . \phi x . \psi x \qquad (1)$$
$$\vdash . (1) . *2{\cdot}32 . (*1{\cdot}01) . \supset \vdash :. \phi x . \supset : \psi x . \supset . \phi x . \psi x \qquad (2)$$
$$\vdash . (2) . *9{\cdot}12 . \supset \vdash . \text{Prop}$$

***10·14.** $\vdash :. (x) . \phi x : (x) . \psi x : \supset . \phi y . \psi y$

Esta proposición es verdadera siempre que sea significante, pero no siempre es significante cuando su hipótesis sea significante. La tesis exige que ϕ y ψ tomen argumentos del mismo tipo, mientras que la hipótesis no exige esto. Por tanto, si se aplica cuando se dan ϕ y ψ, o cuando ψ se da como una función de ϕ, o viceversa, no debemos argüir de la hipótesis a la tesis, a no ser que, en el caso supuesto, ϕ y ψ tomen argumentos del mismo tipo.

Dem.

$$\vdash . *10{\cdot}1 . \quad \supset \vdash : (x) . \phi x . \supset . \phi y \qquad (1)$$
$$\vdash . *10{\cdot}1 . \quad \supset \vdash : (x) . \psi x . \supset . \psi y \qquad (2)$$
$$\vdash . (1) . (2) . *10{\cdot}13 . \supset \vdash : (x) . \phi x . \supset . \phi y : (x) . \psi x . \supset . \psi y :$$
$$[*3{\cdot}47] \quad \supset \vdash :. (x) . \phi x : (x) . \psi x : \supset . \phi y . \psi y :. \supset \vdash . \text{Prop}$$

***10·2.** $\vdash :. (x) . p \vee \phi x . \equiv : p . \vee . (x) . \phi x$

Dem.

$$\vdash . *10{\cdot}1 . *1{\cdot}6 . \supset \vdash :. p . \vee . (x) . \phi x : \supset . p \vee \phi y :.$$
$$[*10{\cdot}11] \quad \supset \vdash :. (y) :. p . \vee . (x) . \phi x : \supset . p \vee \phi y :.$$
$$[*10{\cdot}12] \quad \supset \vdash :. p . \vee . (x) . \phi x : \supset . (y) . p \vee \phi y \qquad (1)$$
$$\vdash . *10{\cdot}12 . \quad \supset \vdash :. (y) . p \vee \phi y . \supset : p . \vee . (x) . \phi x \qquad (2)$$
$$\vdash . (1) . (2) . \quad \supset \vdash . \text{Prop}$$

***10·21.** $\vdash :. (x) . p \supset \phi x . \equiv : p . \supset . (x) . \phi x \quad \left[*10{\cdot}2\,\frac{\sim p}{p}\right]$

Esta proposición se usa mucho más que la *10·2.

***10·22.** $\vdash :. (x) . \phi x . \psi x . \equiv : (x) . \phi x : (x) . \psi x$

Dem.

$\vdash .*10{\cdot}1 .$ $\quad \supset \vdash : (x) . \phi x . \psi x . \supset . \phi y . \psi y .$ (1)

$[*3{\cdot}26]$ $\quad \supset . \phi y :$

$[*10{\cdot}11]$ $\quad \supset \vdash :. (y) : (x) . \phi x . \psi x . \supset . \phi y :.$

$[*10{\cdot}21]$ $\quad \supset \vdash :. (x) . \phi x . \psi x . \supset . (y) . \phi y$ (2)

$\vdash . (1) . *3{\cdot}27 .$ $\quad \supset \vdash :. (x) . \phi x . \psi x . \supset . \psi z :.$

$[*10{\cdot}11]$ $\quad \supset \vdash :. (z) : (x) . \phi x . \psi x . \supset . \psi z :.$

$[*10{\cdot}21]$ $\quad \supset \vdash :. (x) . \phi x . \psi x . \supset . (z) . \psi z$ (3)

$\vdash . (2) . (3) . \mathrm{Comp} .$ $\quad \supset \vdash :. (x) . \phi x . \psi x . \supset : (y) . \phi y : (z) . \psi z$ (4)

$\vdash . *10{\cdot}14{\cdot}11 .$ $\quad \supset \vdash :. (y) :. (x) . \phi x : (x) . \psi x : \supset . \phi y . \psi y :.$

$[*10{\cdot}21]$ $\quad \supset \vdash :. (x) . \phi x : (x) . \psi x : \supset . (y) . \phi y . \psi y$ (5)

$\vdash . (4) . (5) .$ $\quad \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

Esta última proposición es verdadera si es significante, pero tal como se indicó en relación con la $*10{\cdot}14$, no siempre es significante cuando "$(x) . \phi x : (x) . \psi x$" sea significante.

$*10{\cdot}221$. Si ϕx contiene un constituyente $\chi (x, y, z, \ldots)$ y ψ contiene un constituyente $\chi (x, u, v, \ldots)$, en donde χ es una función elemental, e $y, z, \ldots u, v, \ldots$ son constantes o variables aparentes, entonces $\phi \hat{x}$ y $\psi \hat{x}$ toman argumentos del mismo tipo. Esto puede probarse en cada caso particular, aunque no generalmente, dado que, al obtener ϕ y ψ a partir de χ, χ sólo está sometida a negaciones, disyunciones y generalizaciones. Este proceso puede ilustrarse mediante un ejemplo. Supongamos que ϕx es $(y) . \chi (x, y) . \supset . \theta x$, y que ψx es $fx . \supset . (y) . \chi (x, y)$. En virtud de las definiciones del $*9$, ϕx es $(\exists y) . \sim \chi (x, y) \vee \theta x$, y ψx es $(y) . \sim fx \vee \chi (x, y)$. Por tanto, dado que las ideas primitivas $(x) . Fx$ y $(\exists x) . Fx$ sólo se aplican a funciones, existen las funciones $\sim \chi (\hat{x}, \hat{y}) \vee \theta \hat{x}$, $\sim f\hat{x} \vee \chi (\hat{x}, \hat{y})$. Por lo tanto, existe una proposición $\sim \chi (a, b) \vee \theta a$. Por consiguiente, ya que "$p \vee q$" y "$\sim p$" son significantes sólo cuando p y q son proposiciones, existe una proposición $\chi (a, b)$. De manera semejante, para alguna u y v, existen proposiciones $\sim fu \vee \chi (u, v)$ y $\chi (u, v)$. Por tanto, en virtud de la $*9{\cdot}14$, u y a, v y b son respectivamente del mismo tipo y (nuevamente en virtud de $*9{\cdot}14$) existe una proposición $\sim fa \vee \chi (a, b)$. Por tanto ($*9{\cdot}15$), hay las funciones $\sim \chi (a, \hat{y}) \vee \theta a$, $\sim fa \vee \chi (a, \hat{y})$, y, en consecuencia, hay las proposiciones

$$(\exists y) . \sim \chi (a, y) \vee \theta a, \ (y) . \sim fa \vee \chi (a, y),$$

es decir, existen las proposiciones ϕa, ψa, que es lo que se quería probar. Este proceso puede aplicarse, de manera similar, a cualquier otro ejemplo.

$*10{\cdot}23$. $\vdash :. (x) . \phi x \supset p . \equiv : (\exists x) . \phi x . \supset . p$

Dem.

$\vdash . *4{\cdot}2 . (*9{\cdot}03) . \supset \vdash :. (x) . \sim \phi x \vee p . \equiv : (x) . \sim \phi x . \vee . p :$

$[(*9{\cdot}02)]$ $\quad \equiv . (\exists x) . \phi x . \supset . p$ (1)

$\vdash . (1) . (*1{\cdot}01) . \quad \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

En esta prueba hemos empleado las definiciones del $*9$. En el método alternativo, en el cual $(\exists x) . \phi x$ se define de acuerdo con la $*10{\cdot}01$, la prueba se realiza de la manera siguiente:

***10·23.** $\vdash :. (x) . \phi x \supset p . \equiv : (\exists x) . \phi x . \supset . p$

Dem.

$\vdash .$ Transp $. (*10{\cdot}01) . \supset \vdash :. (\exists x) . \phi x . \supset . p : \equiv : \sim p . \supset . (x) . \sim \phi x :$

$[*10{\cdot}21] \qquad \equiv : (x) : \sim p . \supset . \sim \phi x :$ (1)

$[*10{\cdot}1] \qquad \supset : \sim p . \supset . \sim \phi x :$

[Transp] $\qquad \supset : \phi x . \supset . p :.$

$[*10{\cdot}11] \qquad \supset \vdash :. (x) :. (\exists x) . \phi x . \supset . p : \supset : \phi x . \supset . p :.$

$[*10{\cdot}21] \qquad \supset \vdash :. (\exists x) . \phi x . \supset . p : \supset : (x) : \phi x . \supset . p$ (2)

$\vdash . *10{\cdot}1 . \qquad \supset \vdash :. (x) : \phi x . \supset . p : \supset : \phi x \supset p :$

[Transp] $\qquad \supset : \sim p . \supset . \sim \phi x :.$

$[*10{\cdot}11{\cdot}21] \qquad \supset \vdash :. (x) : \phi x . \supset . p : \supset : (x) : \sim p . \supset . \sim \phi x :$

$[(1)] \qquad \supset : (\exists x) . \phi x . \supset . p$ (3)

$\vdash . (2) . (3) . \qquad \supset \vdash .$ Prop

Siempre que tengamos una proposición aseverada de la forma $p \supset \phi x$, podemos pasar en virtud de los *10·11·21 a una proposición aseverada $p . \supset . (x) . \phi x$. Este paso se requiere constantemente, como en la última línea de la prueba de arriba. Ello se indicará simplemente mediante la referencia "*10·11·21", y los dos pasos que necesita no se pondrán separadamente debajo.

***10·24.** $\vdash : \phi y . \supset . (\exists x) . \phi x$

Esta es la *9·1. En el método alternativo, la prueba es la siguiente

Dem.

$\vdash . *10{\cdot}1 . \supset \vdash : (x) . \sim \phi x . \supset . \sim \phi y :$

[Transp] $\supset \vdash : \phi y . \supset . \sim (x) . \sim \phi x :$

$[(*10{\cdot}01)] \supset \vdash .$ Prop

***10·25.** $\vdash : (x) . \phi x . \supset . (\exists x) . \phi x$ $\quad [*10{\cdot}1{\cdot}24]$

***10·251.** $\vdash : (x) . \sim \phi x . \supset . \sim \{(x) . \phi x\}$ $\quad [*10{\cdot}25 . \text{Transp}]$

***10·252.** $\vdash : \sim \{(\exists x) . \phi x\} . \equiv . (x) . \sim \phi x$ $\quad [*4{\cdot}2 . (*9{\cdot}02)]$

***10·253.** $\vdash : \sim \{(x) . \phi x\} . \equiv . (\exists x) . \sim \phi x$ $\quad [*4{\cdot}2 . (*9{\cdot}01)]$

En el método alternativo, en el que $(\exists x) . \phi x$ se define como la *10·01, las pruebas de las *10·252·253 son como siguen:

***10·252.** $\vdash : \sim \{(\exists x) . \phi x\} . \equiv . (x) . \sim \phi x$ $\quad [*4{\cdot}13 . (*10{\cdot}01)]$

***10·253.** $\vdash : \sim \{(x) . \phi x\} . \equiv . (\exists x) . \sim \phi x$

Dem.

$\vdash . *10{\cdot}1 . \quad \supset \vdash : (x) . \phi x . \supset . \phi y .$

$[*2{\cdot}12] \qquad \supset . \sim (\sim \phi y) :$

$[*10{\cdot}11{\cdot}21] \supset \vdash : (x) . \phi x . \supset . (y) . \sim (\sim \phi y) :$

[Transp] $\quad \supset \vdash : \sim \{(y) . \sim (\sim \phi y)\} . \supset . \sim \{(x) . \phi x\} :$

$[(*10{\cdot}01)] \quad \supset \vdash : (\exists y) . \sim \phi y . \qquad \supset . \sim \{(x) . \phi x\}$ (1)

$$\begin{array}{ll}
\vdash .*10{\cdot}1 . \supset \vdash : (y) . \sim(\sim\phi y) . & \supset . \sim(\sim\phi x) . \\
[*2{\cdot}14] & \supset . \phi x : \\
[*10{\cdot}11{\cdot}21] \supset \vdash : (y) . \sim(\sim\phi y) . & \supset . (x) . \phi x : \\
[\text{Transp}] \quad \supset \vdash : \sim\{(x) . \phi x\} . & \supset . \sim\{(y) . \sim(\sim\phi y)\} . \\
[(*10{\cdot}01)] & \supset . (\exists y) . \sim\phi y \\
\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash . \text{Prop} &
\end{array} \qquad (2)$$

***10·26.** $\vdash :. (z) . \phi z \supset \psi z : \phi x : \supset . \psi x$ [*10·1 . Imp]

Esta es una forma del silogismo en Bárbara. Por ejemplo, supongamos $\phi z \ . = . \ z$ es un hombre, $\psi z \ . = . \ z$ es mortal, x = Sócrates. Entonces la proposición se convierte en:

"Si todos los hombres son mortales y Sócrates es un hombre, entonces Sócrates es mortal".

Otra forma del silogismo en Bárbara se da en *10·3. Las dos formas, antiguamente identificadas erróneamente, fueron diferenciadas primero por Peano y Frege.

***10·27.** $\vdash :. (z) . \phi z \supset \psi z . \supset : (z) . \phi z . \supset . (z) . \psi z$

Esta es la *9·21. En el método alternativo, la prueba es como sigue:

Dem.

$$\begin{array}{ll}
\vdash .*10{\cdot}14 . \supset \vdash :. (z) . \phi z \supset \psi z : (z) . \phi z : \supset . \phi y \supset \psi y . \phi y . & \\
[\text{Ass}] & \supset . \psi y :. \\
[*10{\cdot}1] \quad \supset \vdash :. (y) :. (z) . \phi z \supset \psi z : (z) . \phi z : \supset . \psi y :. & \\
[*10{\cdot}21] \quad \supset \vdash :. (z) . \phi z \supset \psi z : (z) . \phi z : \supset . (y) . \psi y & \qquad (1) \\
\vdash . (1) . \text{Exp} . \supset \vdash . \text{Prop} &
\end{array}$$

***10·271.** $\vdash :. (z) . \phi z \equiv \psi z . \supset : (z) . \phi z . \equiv . (z) . \psi z$

Dem.

$$\begin{array}{ll}
\vdash .*10{\cdot}22 . & \supset \vdash :. \text{Hp} . \supset : (z) . \phi z \supset \psi z : \\
[*10{\cdot}27] & \supset : (z) . \phi z . \supset . (z) . \psi z \qquad (1) \\
\vdash .*10{\cdot}22 . & \supset \vdash :. \text{Hp} . \supset : (z) . \psi z \supset \phi z : \\
[*10{\cdot}27] & \supset : (z) . \psi z . \supset . (z) . \phi z \qquad (2) \\
\vdash . (1) . (2) . \text{Comp} . \supset \vdash . \text{Prop} &
\end{array}$$

***10·28.** $\vdash :. (x) . \phi x \supset \psi x . \supset : (\exists x) . \phi x . \supset . (\exists x) . \psi x$

Esta es la *9·22. En el método alternativo, la prueba es como sigue:

Dem.

$$\begin{array}{ll}
\vdash .*10{\cdot}1 . \supset \vdash :. (x) . \phi x \supset \psi x . \supset . \phi y \supset \psi y . & \\
[\text{Transp}] & \supset . \sim\psi y \supset \sim\phi y :. \\
[*10{\cdot}11{\cdot}21] \supset \vdash :. (x) . \phi x \supset \psi x . \supset : (y) . \sim\psi y \supset \sim\phi y : & \\
[*10{\cdot}27] & \supset : (y) . \sim\psi y . \supset . (y) . \sim\phi y : \\
[\text{Transp}] & \supset : (\exists y) . \phi y . \supset . (\exists y) . \psi y :. \supset \vdash . \text{Prop}
\end{array}$$

***10·281.** $\vdash :. (x) . \phi x \equiv \psi x . \supset : (\exists x) . \phi x . \equiv . (\exists x) . \psi x$ [*10·22·28 . Comp]

***10·29.** $\vdash :. (x) . \phi x \supset \psi x : (x) . \phi x \supset \chi x : \equiv : (x) : \phi x . \supset . \psi x . \chi x.$

Dem.

$$\vdash .*10{\cdot}22 . \supset \vdash :. (x) . \phi x \supset \psi x : (x) . \phi x \supset \chi x :$$
$$\equiv : (x) : \phi x \supset \psi x . \phi x \supset \chi x \qquad (1)$$
$$\vdash .*4{\cdot}76 . \supset \vdash :. \phi x \supset \psi x . \phi x \supset \chi x . \equiv : \phi x . \supset . \psi x . \chi x :.$$
$$[*10{\cdot}11] \quad \supset \vdash :. (x) :. \phi x \supset \psi x . \phi x \supset \chi x . \equiv : \phi x . \supset . \psi x . \chi x :.$$
$$[*10{\cdot}271] \quad \supset \vdash :. (x) : \phi x \supset \psi x . \phi x \supset \chi x : \equiv : (x) : \phi x . \supset . \psi x . \chi x \qquad (2)$$
$$\vdash .(1) .(2) . \supset \vdash . \text{Prop}$$

Esta es una extensión del principio de la composición.

***10·3.** $\vdash :. (x) . \phi x \supset \psi x : (x) . \psi x \supset \chi x : \supset . (x) . \phi x \supset \chi x$

Esta es la segunda forma del silogismo en Bárbara.

Dem.

$$\vdash .*10{\cdot}22{\cdot}221 . \supset \vdash : \text{Hp} . \supset . (x) . \phi x \supset \psi x . \psi x \supset \chi x .$$
$$[\text{Syll}.*10{\cdot}27] \quad \supset . (x) . \phi x \supset \chi x : \supset \vdash . \text{Prop}$$

***10·301.** $\vdash :. (x) . \phi x \equiv \psi x : (x) . \psi x \equiv \chi x : \supset . (x) . \phi x \equiv \chi x$

Dem.

$$\vdash .*10{\cdot}22{\cdot}221 . \supset \vdash :. \text{Hp} . \supset : (x) . \phi x \equiv \psi x . \psi x = \chi x :$$
$$[*4{\cdot}22.*10{\cdot}27] \quad \supset : (x) . \phi x \equiv \chi x :. \supset \vdash . \text{Prop}$$

En la segunda línea de las pruebas *10·3 y *10·301, abreviamos el proceso de la prueba de una manera que con frecuencia resulta conveniente. En la *10·3, el proceso completo sería así:

$$\vdash . \text{Syll} . \supset \vdash : \phi x \supset \psi x . \psi x \supset \chi x . \supset . \phi x \supset \chi x :$$
$$[*10{\cdot}11] \supset \vdash : (x) : \phi x \supset \psi x . \psi x \supset \chi x . \supset . \phi x \supset \chi x :$$
$$[*10{\cdot}27] \supset \vdash : (x) . \phi x \supset \psi x . \psi x \supset \chi x . \supset . (x) . \phi x \supset \chi x$$

Las dos últimas proposiciones muestran que la implicación formal y la equivalencia formal son relaciones transitivas entre funciones

***10·31.** $\vdash :. (x) . \phi x \supset \psi x . \supset : (x) : \phi x . \chi x . \supset . \psi x . \chi x$

Dem.

$$\vdash . \text{Fact} . *10{\cdot}11 . \supset \vdash :. (x) :. \phi x \supset \psi x . \supset : \phi x . \chi x . \supset . \psi x . \chi x \qquad (1)$$
$$\vdash .(1) .*10{\cdot}27 . \quad \supset \vdash . \text{Prop}$$

***10·311.** $\vdash :. (x) . \phi x \equiv \psi x . \supset : (x) : \phi x . \chi x . \equiv . \psi x . \chi x$

Dem.

$$\vdash .*4{\cdot}36 .*10{\cdot}11 . \supset \vdash :. (x) :. \phi x \equiv \psi x . \supset : \phi x . \chi x . \equiv . \psi x . \chi x \qquad (1)$$
$$\vdash .(1) .*10{\cdot}27 . \quad \supset \vdash . \text{Prop}$$

Las dos últimas proposiciones son extensiones del principio del factor.

***10·32.** $\vdash : \phi x \equiv_x \psi x . \equiv . \psi x \equiv_x \phi x$

Dem.

$$\vdash .*10{\cdot}22 . \supset \vdash : \phi x \equiv_x \psi x . \equiv . \phi x \supset_x \psi x . \psi x \supset_x \phi x .$$
$$[*4{\cdot}3] \quad \equiv . \psi x \supset_x \phi x . \phi x \supset_x \psi x .$$
$$[*10{\cdot}22] \quad \equiv . \psi x \equiv_x \phi x : \supset \vdash . \text{Prop}$$

Esta proposición muestra que la equivalencia formal es simétrica.

***10·321.** $\vdash : \phi x \equiv_x \psi x . \phi x \equiv_x \chi x . \supset . \psi x \equiv_x \chi x$

Dem.

$$\vdash .*10{\cdot}32 . \text{Fact} . \supset \vdash : \text{Hp} . \supset . \psi x \equiv_x \phi x . \phi x \equiv_x \chi x .$$
$$[*10{\cdot}301] \qquad \supset . \psi x \equiv_x \chi x : \supset \vdash . \text{Prop}$$

***10·322.** $\vdash : \psi x \equiv_x \phi x . \chi x \equiv_x \phi x . \supset . \psi x \equiv_x \chi x$

Dem.

$$\vdash .*10{\cdot}32 . \supset \vdash : \text{Hp} . \supset . \psi x \equiv_x \phi x . \phi x \equiv_x \chi x .$$
$$[*10{\cdot}301] \qquad \supset . \psi x \equiv_x \chi x : \supset \vdash . \text{Prop}$$

***10·33.** $\vdash :. (x) : \phi x . p : \equiv : (x) . \phi x : p$

Dem.

$$\vdash .*10{\cdot}1 . \quad \supset \vdash :. (x) : \phi x . p : \supset . \phi y . p . \tag{1}$$
$$[*3{\cdot}27] \qquad \supset . p \tag{2}$$
$$\vdash .(1) .*3{\cdot}26 . \supset \vdash :. (x) : \phi x . p : \supset . \phi y :$$
$$[*10{\cdot}11{\cdot}21] \quad \supset \vdash :. (x) : \phi x . p : \supset . (y) . \phi y \tag{3}$$
$$\vdash .(2) .(3) . \quad \supset \vdash :. (x) : \phi x . p : \supset : (y) . \phi y : p \tag{4}$$
$$\vdash .*10{\cdot}1 . \quad \supset \vdash :. (y) . \phi y . \quad \supset . \phi x :.$$
$$[\text{Fact}] \qquad \supset \vdash :. (y) . \phi y : p : \supset . \phi x . p :.$$
$$[*10{\cdot}11{\cdot}21] \quad \supset \vdash :. (y) . \phi y : p : \supset : (x) : \phi x . p \tag{5}$$
$$\vdash .(4) .(5) . \quad \supset \vdash . \text{Prop}$$

***10·34.** $\vdash :. (\exists x) . \phi x \supset p . \equiv : (x) . \phi x . \supset . p$

Esto se obtiene inmediatamente a partir de las *9·05·01 y de la *1·01. En el método alternativo, la prueba es la siguiente:

Dem.

$$\vdash .*4{\cdot}2 . (*10{\cdot}01) . \supset$$
$$\vdash :. (\exists x) . \phi x \supset p . \quad \equiv : \sim \{(x) . \sim (\phi x \supset p)\} :$$
$$[*4{\cdot}61 . *10{\cdot}271] \quad \equiv : \sim \{(x) : \phi x . \sim p\} :$$
$$[*10{\cdot}33] \qquad \equiv : \sim \{(x) . \phi x : \sim p\} :$$
$$[*4{\cdot}53] \qquad \equiv : \sim \{(x) . \phi x\} . \vee . p :$$
$$[*4{\cdot}6] \qquad \equiv : (x) . \phi x . \supset . p$$

***10·35.** $\vdash :. (\exists x) . p . \phi x . \equiv : p : (\exists x) . \phi x$

Dem.

$$\vdash .*3{\cdot}26 . \quad \supset \vdash : p . \phi x . \supset . p :$$
$$[*10{\cdot}11] \quad \supset \vdash : (x) : p . \phi x . \supset . p :$$
$$[*10{\cdot}23] \quad \supset \vdash : (\exists x) . p . \phi x . \supset . p \tag{1}$$
$$\vdash .*3{\cdot}27 . \quad \supset \vdash : p . \phi x . \supset . \phi x :$$
$$[*10{\cdot}11] \quad \supset \vdash : (x) : p . \phi x . \supset . \phi x :$$
$$[*10{\cdot}28] \quad \supset \vdash : (\exists x) . p . \phi x . \supset . (\exists x) . \phi x \tag{2}$$
$$\vdash .*3{\cdot}2 . \quad \supset \vdash :. p . \supset : \phi x . \supset . p . \phi x .$$
$$[*10{\cdot}11{\cdot}21] \supset \vdash :. p . \supset : (x) : \phi x . \supset . p . \phi x :$$
$$[*10{\cdot}28] \qquad \supset : (\exists x) . \phi x . \supset . (\exists x) . p . \phi x \tag{3}$$
$$\vdash .(1) .(2) .(3) . \text{Imp} . \supset \vdash . \text{Prop}$$

***10·36.** $\vdash :. (\exists x) . \phi x \vee p . \equiv : (\exists x) . \phi x . \vee . p$

Esto resulta inmediatamente de la *9·05. En el método alternativo, la prueba es la siguiente:

Dem.

$\vdash .\ *4{\cdot}64 .\quad \supset \vdash : \phi x \vee p .\equiv .\sim \phi x \supset p :$

$[*10{\cdot}11]\quad \supset \vdash : (x) : \phi x \vee p .\equiv .\sim \phi x \supset p :$

$[*10{\cdot}281]\quad \supset \vdash :. (\exists x) .\ \phi x \vee p .\equiv : (\exists x) .\sim \phi x \supset p :$

$[*10{\cdot}34]\quad \equiv : (x) .\sim \phi x .\supset .p :$

$[*4{\cdot}6.(*10{\cdot}01)]\quad \equiv : (\exists x) .\ \phi x .\vee .p :. \supset \vdash .\ \text{Prop}$

La última proposición sólo se necesita para llegar a lo siguiente:

***10·37.** $\vdash :. (\exists x) .\ p \supset \phi x .\equiv : p .\supset .(\exists x) .\ \phi x \quad \left[*10{\cdot}36\ \frac{\sim p}{p}\right]$

***10·39.** $\vdash :. \phi x \supset_x \chi x : \psi x \supset_x \theta x : \supset : \phi x .\ \psi x .\supset_x .\ \chi x .\ \theta x$

Dem.

$\vdash .\ *10{\cdot}22 .\supset \vdash :.\ \text{Hp} .\supset : (x) : \phi x \supset \chi x .\ \psi x \supset \theta x :$

$[*3{\cdot}47.*10{\cdot}27]\quad \supset : (x) : \phi x .\ \psi x .\supset .\ \chi x .\ \theta x :. \supset \vdash .\ \text{Prop}$

Esta proposición es verdadera sólo cuando la conclusión sea significante; el hecho de que la hipótesis sea significante no garantiza que lo sea la conclusión. Acerca de las condiciones de la significación, véanse más abajo las observaciones al *10·4.

***10·4.** $\vdash :. \phi x \equiv_x \chi x .\ \psi x \equiv_x \theta x .\supset : \phi x .\ \psi x .\equiv_x .\ \chi x .\ \theta x$

Dem.

$\vdash .\ *10{\cdot}22 .\quad \supset \vdash :.\ \text{Hp} .\supset : \phi x \supset_x \chi x .\ \psi x \supset_x \theta x :$

$[*10{\cdot}39]\quad \supset : \phi x .\ \psi x .\supset_x .\ \chi x .\ \theta x \qquad (1)$

Similarmente $\vdash :.\ \text{Hp} .\supset : \chi x .\ \theta x .\supset_x .\ \phi x .\ \psi x \qquad (2)$

$\vdash .(1).(2).\text{Comp} .\supset \vdash :.\ \text{Hp} .\supset : \phi x .\ \psi x .\supset_x .\ \chi x .\ \theta x : \chi x .\ \theta x .\supset_x .\ \phi x .\ \psi x :$

$[*10{\cdot}22]\quad \supset : \phi x .\ \psi x .\equiv_x .\ \chi x .\ \theta x :. \supset \vdash .\ \text{Prop}$

En la *10·4 y en muchas proposiciones posteriores, tal como en la *10·39, la conclusión no puede ser significante cuando la hipótesis es verdadera. Por lo tanto, a fin de que pueda legitimarse el uso del *10·4 en la *inferencia,* es decir, pasar de la *aserción* de la hipótesis a la *aserción* de la conclusión, las funciones ϕ, ψ, χ, θ deben ser tales que se solapen los rangos de significación. En virtud del *10·221, ésto se asegura si son de las formas $F\{x, \chi(x, \hat{y}, \hat{z}, \ldots)\}$, $f\{x, \chi(x, \hat{y}, \hat{z}, \ldots)\}$, $G\{x, \chi(x, \hat{y}, \hat{z}, \ldots)\}$, $g\{x, \chi(x, \hat{y}, \hat{z}, \ldots)\}$. También se asegura si ϕ y ψ, o ϕ y θ, o χ y ψ, o χ y θ son de tales formas, por la razón de que ϕ y χ deben tener solapados los rangos de significación si la hipótesis es significante, y también debe serlo ψ y θ.

***10·41.** $\vdash :. (x) .\ \phi x .\vee .(x) .\ \psi x : \supset .(x) .\ \phi x \vee \psi x$

Dem.

$\vdash .\ *10{\cdot}1 .\quad \supset \vdash : (x) .\ \phi x .\supset .\ \phi y .$

$[*2{\cdot}2]\quad \supset .\ \phi y \vee \psi y \qquad (1)$

$\vdash .\ *10{\cdot}1 .\quad \supset \vdash : (x) .\ \psi x .\supset .\ \psi y .$

$[*1{\cdot}3]\quad \supset .\ \phi y \vee \psi y \qquad (2)$

$\vdash .(1).(2).*10{\cdot}13 .\supset \vdash :. (x) .\ \phi x .\supset .\ \phi y \vee \psi y : (x) .\ \psi x .\supset .\ \phi y \vee \psi y :.$

[*3·44] $\supset \vdash :. (x) . \phi x . \vee . (x) . \psi x : \supset . \phi y \vee \psi y$

[*10·11·21] $\supset \vdash :. (x) . \phi x . \vee . (x) . \psi x : \supset . (y) . \phi y \vee \psi y :. \supset \vdash .$ Prop

Obsérvese que en la prueba última los usos de las *2·2 y *1·3 son sólo legitimados si ϕy y ψy tienen los rangos de significación solapados, pues en otro caso si y es tal que hay una proposición ϕy, es tal que no hay proposición ψy, y

***10·411.** $\vdash :. \phi x \equiv_x \chi x . \psi x \equiv_x \theta x . \supset : \phi x \vee \psi x . \equiv_x . \chi x \vee \theta x$

Dem.

$\vdash . *10·14 . \supset \vdash :.$ Hp $. \supset : \phi x \equiv \chi x . \psi x \equiv \theta x :$

[*4·39] $\supset : \phi x \vee \psi x . \equiv . \chi x \vee \theta x$ (1)

$\vdash . (1) . *10·11·21 . \supset \vdash .$ Prop

***10·412.** $\vdash : \phi x \equiv_x \psi x . \equiv . \sim \phi x \equiv_x \sim \psi x$ [*4·11 . *10·11·271]

***10·413.** $\vdash :. \phi x \equiv_x \chi x . \psi x \equiv_x \theta x . \supset : \phi x \supset \psi x . \equiv_x . \chi x \supset \theta x$

Dem.

$\vdash . *10·411·412 . \supset \vdash :.$ Hp $. \supset : \sim \phi x \vee \psi x . \equiv_x . \sim \chi x \vee \theta x$

[(*1·01)] $\supset : \phi x \supset \psi x . \equiv_x . \chi x \supset \theta x :. \supset \vdash .$ Prop

***10·414.** $\vdash :. \phi x \equiv_x \chi x . \psi x \equiv_x \theta x . \supset : \phi x \equiv \psi x . \equiv_x . \chi x \equiv \theta x$

Dem.

$\vdash . *10·413 \frac{\psi, \phi, \theta, \chi}{\phi, \psi, \chi, \theta} . *10·32 . \supset \vdash :.$ Hp $. \supset : \psi x \supset \phi x . \equiv_x . \theta x \supset \chi x$ (1)

$\vdash . *10·413 . (1) . *10·4 . \quad \supset \vdash .$ Prop

Las proposiciones *10·413·414 se usan principalmente en los casos en donde χ se sustituye por θ, o donde θ se sustituye por ψ, en cuyo caso la mitad de la hipótesis se hace supérflua, siendo verdadera en virtud de la *4·2

***10·42.** $\vdash :. (\exists x) . \phi x . \vee . (\exists x) . \psi x : \equiv . (\exists x) . \phi x \vee \psi x$

Dem.

$\vdash . *10·22 . \quad \supset \vdash :. (x) . \sim \phi x : (x) . \sim \psi x : \equiv . (x) . \sim \phi x . \sim \psi x :.$

[*4·11] $\supset \vdash :. \sim \{(x) . \sim \phi x : (x) . \sim \psi x\} . \equiv . \sim \{(x) . \sim \phi x . \sim \psi x\} :.$

[*4·51·56.*10·271] $\supset \vdash :. \sim \{(x) . \sim \phi x\} . \vee . \sim \{(x) . \sim \psi x\} :$

$\equiv . \sim \{(x) . \sim (\phi x \vee \psi x)\} :.$

[*10·253] $\supset \vdash :. (\exists x) . \phi x . \vee . (\exists x) . \psi x : \equiv . (\exists x) . \phi x \vee \psi x :.$

$\supset \vdash .$ Prop

Esta proposición se usa muy frecuentemente. Debe contrastarse con la *10·5, en la cual tenemos sólo una implicación y no una equivalencia.

***10·43.** $\vdash : \phi z \equiv_z \psi z . \phi x . \equiv . \phi z \equiv_z \psi z . \psi x$

Dem.

$\vdash . *10·1 . \quad \supset \vdash : \phi z \equiv_z \psi z . \supset . \phi x \equiv \psi x$ (1)

$\vdash . (1) . *5·32 . \supset \vdash .$ Prop

***10·5.** $\vdash :. (\exists x) . \phi x . \psi x . \supset : (\exists x) . \phi x : (\exists x) . \psi x$

Dem.

$\vdash . *3·26 . *10·11 . \supset \vdash : (x) : \phi x . \psi x . \supset . \phi x :$

$$[*10{\cdot}28] \qquad \supset \vdash : (\exists x) . \phi x . \psi x . \supset . (\exists x) . \phi x \qquad (1)$$
$$\vdash . *3{\cdot}27 . *10{\cdot}11 . \supset \vdash :. (x) : \phi x . \psi x . \supset . \psi x :$$
$$[*10{\cdot}28] \qquad \supset \vdash : (\exists x) . \phi x . \psi x . \supset . (\exists x) . \psi x \qquad (2)$$
$$\vdash . (1) . (2) . \text{Comp} . \supset \vdash :. \text{Prop}$$

La conversa de esta última proposición es falsa. El hecho de que esta proposición exponga una implicación, mientras que la $*10{\cdot}42$ exponga una equivalencia, es la causa de muchas diferencias posteriores entre las fórmulas que se refieren a la adición lógica y las fórmulas que se refieren a la multiplicación lógica.

$*10{\cdot}51$. $\vdash :. \sim \{(\exists x) . \phi x . \psi x\} . \equiv : \phi x . \supset_x . \sim \psi x$

Dem.

$$\vdash . *10{\cdot}252 . \supset \vdash :. \sim \{(\exists x) . \phi x . \psi x\} . \equiv : (x) . \sim (\phi x . \psi x) :$$
$$[*4{\cdot}51{\cdot}62 . *10{\cdot}271] \qquad \equiv : (x) : \phi x . \supset . \sim \psi x :. \supset \vdash . \text{Prop}$$

$*10{\cdot}52$. $\vdash :. (\exists x) . \phi x . \supset : (x) . \phi x \supset p . \equiv . p$

Dem.

$$\vdash . *5{\cdot}5 . \supset \vdash :: \text{Hp} . \supset :. p . \equiv : (\exists x) . \phi x . \supset . p :$$
$$[*10{\cdot}23] \qquad \equiv : (x) . \phi x \supset p :: \supset \vdash . \text{Prop}$$

$*10{\cdot}53$. $\vdash :. \sim (\exists x) . \phi x . \supset : \phi x . \supset_x . \psi x$

Dem.

$$\vdash . *2{\cdot}21 . *10{\cdot}11 . \supset$$
$$\vdash :. (x) :. \sim \phi x . \supset : \phi x . \supset . \psi x :.$$
$$[*10{\cdot}27] \quad \supset \vdash :. (x) . \sim \phi x . \supset : (x) : \phi x . \supset . \psi x :.$$
$$[*10{\cdot}252] \supset \vdash :. \sim (\exists x) . \phi x . \supset : (x) : \phi x . \supset . \psi x :. \supset \vdash . \text{Prop}$$

$*10{\cdot}541$. $\vdash :. \phi y . \supset_y . p \vee \psi y : \equiv : p . \vee . \phi y \supset_y \psi y$

Dem.

$$\vdash . *4{\cdot}2 . (*1{\cdot}01) . \supset \vdash :. \phi y . \supset_y . p \vee \psi y : \equiv : (y) . \sim \phi y \vee p \vee \psi y :$$
$$[\text{Assoc}.*10{\cdot}271] \qquad \equiv : (y) . p \vee \sim \phi y \vee \psi y :$$
$$[*10{\cdot}2] \qquad \equiv : p . \vee . (y) . \sim \phi y \vee \psi y :$$
$$[(*1{\cdot}01)] \qquad \equiv : p . \vee . \phi y \supset_y \psi y :. \supset \vdash . \text{Prop}$$

La última proposición sólo es necesaria a fin de llevar a lo siguiente:

$10{\cdot}542$. $\vdash :. \phi y . \supset_y . p \supset \psi y : \equiv : p . \supset . \phi y \supset_y \psi y \quad \left[*10{\cdot}541 \, \frac{\sim p}{p}\right]$

Esta proposición es un lema para la $*84{\cdot}43$

$*10{\cdot}55$. $\vdash :. (\exists x) . \phi x . \psi x : \phi x \supset_x \psi x : \equiv : (\exists x) . \phi x : \phi x \supset_x \psi x$

Dem.

$$\vdash . *4{\cdot}71 . \supset \vdash :. \phi x \supset \psi x . \supset : \phi x . \psi x . \equiv . \phi x \qquad (1)$$
$$\vdash . (1) . *10{\cdot}11{\cdot}27 . \supset$$
$$\vdash :. \phi x \supset_x \psi x . \supset : (x) : \phi x . \psi x . \equiv . \phi x :$$

$$[*10{\cdot}281] \qquad \supset : (\exists x) . \phi x . \psi x . \equiv . (\exists x) . \phi x \qquad (2)$$
$$\vdash . (2) . *5{\cdot}32 . \supset \vdash . \text{Prop}$$

Esta proposición es un lema para $*117{\cdot}12{\cdot}121$

$*10{\cdot}56$. $\vdash :. \phi x . \supset_x . \psi x : (\exists x) . \phi x . \chi x : \supset . (\exists x) . \psi x . \chi x$

Dem.

$$\vdash . *10{\cdot}31 . \qquad \supset \vdash :. \phi x . \supset_x . \psi x : \supset : \phi x . \chi x . \supset_x . \psi x . \chi x :$$
$$[*10{\cdot}28] \qquad \supset : (\exists x) . \phi x . \chi x . \supset . (\exists x) . \psi x . \chi x \qquad (1)$$
$$\vdash . (1) . \text{Imp} . \supset \vdash . \text{Prop}$$

Esta proposición y la $*10{\cdot}57$ se usan en la teoría de series (parte V).

$*10{\cdot}57$. $\vdash :. \phi x . \supset_x . \psi x \vee \chi x : \supset : \phi x \supset_x \psi x . \vee . (\exists x) . \phi x . \chi x$

Dem.

$$\vdash . *10{\cdot}51 . \text{Fact} . \supset$$
$$\vdash :. \phi x . \supset_x . \psi x \vee \chi x : \sim (\exists x) . \phi x . \chi x : \supset : \phi x . \supset_x . \psi x \vee \chi x : \phi x . \supset_x . \sim \chi x :$$
$$[*10{\cdot}29] \qquad \supset : \phi x . \supset_x . \psi x \vee \chi x . \sim \chi x :$$
$$[*5{\cdot}61] \qquad \supset : \phi x . \supset_x . \psi x \qquad (1)$$
$$\vdash . (1) . *5{\cdot}6 . \supset \vdash . \text{Prop}$$

*11. TEORIA DE LAS DOS VARIABLES APARENTES

Sumario del *11.

Las proposiciones que en el *10 se probaron para una variable se extienden en este número para dos variables, añadiendo unas cuantas proposiciones que no tienen análogas para una variable, tales como las *11·2·21·23·24 y las *11·53·55·6·7. La expresión "$\phi(x, y)$" representa una proposición que contiene x y que contiene y; cuando la x y la y no están asignadas, $\phi(x, y)$ es una función proposicional de x e y. La definición *11·01 manifiesta que "la verdad de todos los valores de $\phi(x, y)$" no necesita ser considerada como una nueva idea primitiva, sino que puede definirse en términos de "la verdad de todos los valores de ψx". La razón es que, cuando está asignada la x, $\phi(x, y)$ se convierte en una función de una variable, a saber y, de donde resulta que, para todos los posibles valores de x, "$(y) . \phi(x, y)$" incorpora solamente la idea primitiva introducida en el *9. Pero "$(y) . \phi(x, y)$" es, de nuevo, sólo una función de una variable, a saber la x, ya que la y viene a ser aquí una variable aparente. Por tanto, la definición *11·01 que viene a continuación es legítima. Proponemos:

***11·01.** $(x, y) . \phi(x, y) . = : (x) : (y) . \phi(x, y)$ Df

***11·02.** $(x, y, z) . \phi(x, y, z) . = : (x) : (y, z) . \phi(x, y, z)$ Df

***11·03.** $(\exists x, y) . \phi(x, y) . = : (\exists x) : (\exists y) . \phi(x, y)$ Df

***11·04.** $(\exists x, y, z) . \phi(x, y, z) . = : (\exists x) : (\exists y, z) . \phi(x, y, z)$ Df

***11·05.** $\phi(x, y) . \supset_{x,y} . \psi(x, y) : = : (x; y) : \phi(x, y) . \supset . \psi(x, y)$ Df

***11·06.** $\phi(x, y) . \equiv_{x,y} . \psi(x, y) : = : (x, y) : \phi(x, y) . \equiv . \psi(x, y)$ Df

Todas estas definiciones se suponen extendidas a cualquier número de variables que puedan tener.

Todas las proposiciones de esta sección pueden ampliarse para un número finito de variables; como la analogía es exacta, no es necesario en nuestras pruebas llevar el proceso más allá de dos variables.

Como añadidura a la definición *11·01, necesitamos la proposición primitiva siguiente: "cualquiera que pueda ser el posible argumento x, $\phi(x, y)$ es verdadero cualquiera que sea el posible valor de y", implica una expresión correspondiente en la que la x y la y están intercambiadas, excepto en $\phi(x, y)$. Cualquier otro significado que se tome para "$\phi(x, y)$ es verdadero cualquiera que puedan ser los posibles argumentos x e y".

Las proposiciones de este número son, en cierto modo, menos usadas que las del *10, aunque algunas se utilicen con más frecuencia. Tales son las siguientes:

***11·1.** $\vdash : (x, y) . \phi(x, y) . \supset . \phi(z, w)$

*11·11. Si $\phi(z, w)$ es verdadera, cualquiera que puedan ser los posibles argumentos z y w, entonces $(x, y) . \phi(x, y)$ es verdadera.

Estas dos proposiciones son las análogas de las *10·1·11.

*11·2. $\vdash : (x, y) . \phi(x, y) . \equiv . (y, x) . \phi(x, y)$

Esto es, decir que "para todos los posibles valores de x, $\phi(x, y)$ es verdadera para todos los posibles valores de y" es equivalente a decir que "para todos los posibles valores de y, $\phi(x, y)$ es verdadera para todos los posibles valores de x".

*11·3. $\vdash :. p . \supset . (x, y) . \phi(x, y) : \equiv : (x, y) : p . \supset . \phi(x, y)$

Esta es la análoga de la *10·21.

*11·32. $\vdash :. (x, y) : \phi(x, y) . \supset . \psi(x, y) : \supset : (x, y) . \phi(x, y) . \supset . (x, y) . \psi(x, y)$

Esto es, si $\phi(x, y)$ siempre implica $\psi(x, y)$, entonces 'siempre $\phi(x, y)$' implica 'siempre $\psi(x, y)$'. Esta proposición es la análoga de la *10·27. Las *11·33·34·341 son, respectivamente, las análogas de las *10·271·28·281, y son igualmente muy utilizadas.

*11·35. $\vdash :. (x, y) : \phi(x, y) . \supset . p : \equiv : (\exists x, y) . \phi(x, y) . \supset . p$

Esto es, si $\phi(x, y)$ implica siempre p, entonces si $\phi(x, y)$ es siempre verdadera, p es verdadera, y viceversa. Esta es la análoga de la *10·23.

*11·45. $\vdash :. (\exists x, y) : p . \phi(x, y) : \equiv : p : (\exists x, y) . \phi(x, y)$

Esta es la análoga de la *10·35.

*11·54. $\vdash :. (\exists x, y) . \phi x . \psi y . \equiv : (\exists x) . \phi x : (\exists y) . \psi y$

Esta proposición es útil porque analiza una proposición que contiene dos variables aparentes en dos proposiciones, cada una de las cuales contiene sólo una. "$\phi x . \psi y$" es una función de dos variables, pero está compuesta por dos funciones de una variable cada una. Una función tal es como una cónica que tiene dos líneas en la misma dirección; puede llamarse una función "analizable".

*11·55. $\vdash :. (\exists x, y) . \phi x . \psi(x, y) . \equiv : (\exists x) : \phi x : (\exists y) . \psi(x, y)$

Esto es, decir "hay valores de x y de y para los que $\phi x . \psi(x, y)$ es verdadero" es equivalente a decir "hay un valor de x para el que ϕx es verdadero, y para el cual hay un valor de y tal que $\psi(x, y)$ es verdadero".

*11·6. $\vdash :: (\exists x) :. (\exists y) . \phi(x, y) . \psi y : \chi x :. \equiv :. (\exists y) :. (\exists x) . \phi(x, y) . \chi x : \psi y$

Esto presenta un tipo de transformación que es útil en muchas pruebas.

*11·62. $\vdash :: \phi x . \psi(x, y) . \supset_{x, y} . \chi(x, y) : \equiv :. \phi x . \supset_x : \psi(x, y) . \supset_y . \chi(x, y)$

Esta transformación también se utiliza frecuentemente.

---

*11·01. $(x, y) . \phi(x, y) . = : (x) : (y) . \phi(x, y)$ Df

*11·02. $(x, y, z) . \phi(x, y, z) . = : (x) : (y, z) . \phi(x, y, z)$ Df

*11·03. $(\exists x, y) . \phi(x, y) . = : (\exists x) : (\exists y) . \phi(x, y)$ Df

*11·04. $(\exists x, y, z) . \phi(x, y, z) . = : (\exists x) : (\exists y, z) . \phi(x, y, z)$ Df

*11·05. $\phi(x, y) . \supset_{x,y} . \psi(x, y) : = : (x, y) : \phi(x, y) . \supset . \psi(x, y)$ Df

*11·06. $\phi(x, y) . \equiv_{x,y} . \psi(x, y) : = : (x, y) : \phi(x, y) . \equiv . \psi(x, y)$ Df

con definiciones similares para cualquier número de variables.

*11·07. "Cualquiera que pueda ser el argumento posible x, $\phi(x, y)$ es verdadero, para cualquiera que pueda ser el argumento posible y" implica el correspondiente enunciado con la x y la y intercambiadas, excepto en "$\phi(x, y)$". Pp.

*11·1. $\vdash : (x, y) . \phi(x, y) . \supset . \phi(z, w)$

Dem.

$\vdash . *10·1 . \supset \vdash : \text{Hp} . \supset . (y) . \phi(z, y) .$

[*10·1] $\supset . \phi(z, w) : \supset \vdash .$ Prop

*11·11. Si $\phi(z, w)$ es verdadera, cualesquiera que puedan ser sus posibles argumentos z y w, entonces $(x, y) . \phi(x, y)$ es verdadera.

Dem.

Por *10·11, la hipótesis implica que $(y) . \phi(z, y)$ es verdadera cualquiera que pueda ser el posible argumento z; y ésta, por *10·11, implica $(x, y) . \phi(x, y)$.

*11·12. $\vdash :. (x, y) . p \vee \phi(x, y) . \supset : p . \vee . (x, y) . \phi(x, y)$

Dem.

$\vdash . *10·12 . \supset \vdash :. (y) . p \vee \phi(x, y) . \quad \supset : p . \vee . (y) . \phi(x, y) :.$

[*10·11·27] $\supset \vdash :. (x, y) . p \vee \phi(x, y) . \supset : (x) : p . \vee . (y) . \phi(x, y) :$

[*10·12] $\supset : p . \vee . (x, y) . \phi(x, y) :. \supset \vdash .$ Prop

Esta proposición se usa solamente para probar la *11·2.

*11·13. Si $\phi(\hat{x}, \hat{y})$, $\psi(\hat{x}, \hat{y})$ tienen el primero y segundo argumentos respectivamente del mismo tipo, y tenemos "$\vdash . \phi(x, y)$" y "$\vdash . \psi(x, y)$", entonces tendremos "$\vdash . \phi(x, y) . \psi(x, y)$". [La prueba, como en *10·13].

*11·14. $\vdash :. (x, y) . \phi(x, y) : (x, y) . \psi(x, y) : \supset : \phi(z, w) . \psi(z, w)$

Dem.

$\vdash . *10·14 . \supset \vdash :. \text{Hp} . \supset : (y) . \phi(z, y) : (y) . \psi(z, y)$

[*10·14] $\supset : \phi(z, w) . \psi(z, w) :. \supset \vdash .$ Prop

Esta proposición, como la *10·14, no siempre es significante cuando su hipótesis es verdadera. Por esta razón, la *11·13 siempre puede usarse con seguridad en una *inferencia*, mientras que la *11·14 puede usarse en *inferencia* (es decir, para la aserción real de la conclusión cuando se asevere la hipótesis) si se sabe que la conclusión es significante.

*11·2. $\vdash : (x, y) . \phi(x, y) . \equiv . (y, x) . \phi(x, y)$

Dem.

$\vdash . *11·1 . \quad \supset \vdash : (x, y) . \phi(x, y) . \supset . \phi(z, w)$ (1)

$$\vdash .(1) .*11{\cdot}07{\cdot}11 . \supset \vdash :. (w, z) : (x, y) . \phi(x, y) . \supset . \phi(z, w) \qquad (2)$$

$$\vdash .(2) .*11{\cdot}12 \frac{\sim\{(x, y) . \phi(x, y)\}}{p} . \supset$$

$$\vdash :. (x, y) . \phi(x, y) . \supset . (w, z) . \phi(z, w) \qquad (3)$$

Similarmente $\vdash :. (w, z) . \phi(z, w) . \supset . (x, y) . \phi(x, y) \qquad (4)$

$\vdash .(3) .(4) . \quad \supset \vdash .$ Prop

Obsérvese que "$(w, z) . \phi(z, w)$" es la misma proposición que "$(y, x) . \phi(x, y)$"; una proposición no es una función de ninguna variable aparente que intervenga en ella.

***11·21.** $\vdash : (x, y, z) . \phi(x, y, z) . \equiv . (y, z, x) . \phi(x, y, z)$

Dem.

$[(*11{\cdot}01{\cdot}02)] \vdash :: (x, y, z) . \phi(x, y, z) . \equiv :. (x) :. (y) : (z) . \phi(x, y, z) :.$

$[*11{\cdot}2] \qquad \equiv :. (y) :. (x) : (z) . \phi(x, y, z) :.$

$[*11{\cdot}2.*10{\cdot}271] \qquad \equiv :. (y) :. (z) : (x) . \phi(x, y, z) :.$

$[(*11{\cdot}01{\cdot}02)] \qquad \equiv :. (y, z, x) . \phi(x, y, z) :: \supset \vdash .$ Prop

***11·22.** $\vdash : (\exists x, y) . \phi(x, y) . \equiv . \sim\{(x, y) . \sim\phi(x, y)\}$

Dem.

$\vdash .*10{\cdot}252 .$ Transp $.(*11{\cdot}03) . \supset$

$\vdash : (\exists x, y) . \phi(x, y) . \qquad \equiv . \sim\{(x) : \sim(\exists y) . \phi(x, y)\} .$

$[*10{\cdot}252{\cdot}271] \qquad \equiv . \sim\{(x) : (y) . \sim\phi(x, y)\} .$

$[(*11{\cdot}01)] \qquad \equiv . \sim\{(x, y) . \sim\phi(x, y)\} : \supset \vdash .$ Prop

***11·23.** $\vdash : (\exists x, y) . \phi(x, y) . \equiv . (\exists y, x) . \phi(x, y)$

Dem.

$\vdash .*11{\cdot}22 . \supset \vdash : (\exists x, y) . \phi(x, y) . \equiv . \sim\{(x, y) . \sim\phi(x, y)\} .$

$[*11{\cdot}2.$Transp$] \qquad \equiv . \sim\{(y, x) . \sim\phi(x, y)\} .$

$[*11{\cdot}22] \qquad \equiv . (\exists y, x) . \phi(x, y) : \supset \vdash .$ Prop

***11·24.** $\vdash : (\exists x, y, z) . \phi(x, y, z) . \equiv . (\exists y, z, x) . \phi(x, y, z)$

Dem.

$[(*11{\cdot}03{\cdot}04)] \vdash :: (\exists x, y, z) . \phi(x, y, z) . \equiv :. (\exists x) :. (\exists y) : (\exists z) . \phi(x, y, z) :.$

$[*11{\cdot}23] \qquad \equiv :. (\exists y) :. (\exists x) : (\exists z) . \phi(x, y, z) :.$

$[*11{\cdot}23.*10{\cdot}281] \qquad \equiv :. (\exists y) :. (\exists z) : (\exists x) . \phi(x, y, z) :.$

$[(*11{\cdot}03{\cdot}04)] \qquad \equiv :. (\exists y, z, x) . \phi(x, y, z) :: \supset \vdash .$ Prop

***11·25.** $\vdash : \sim\{(\exists x, y) . \phi(x, y)\} . \equiv . (x, y) . \sim\phi(x, y)$ [*11·22 . Transp]

***11·26.** $\vdash :. (\exists x) : (y) . \phi(x, y) : \supset : (y) : (\exists x) . \phi(x, y)$

Dem.

$\vdash .*10{\cdot}1{\cdot}28 . \supset \vdash :. (\exists x) : (y) . \phi(x, y) : \supset : (\exists x) . \phi(x, y) \qquad (1)$

$\vdash .(1) .*10{\cdot}11{\cdot}21 . \supset \vdash .$ Prop

Obsérvese que la conversa de esta proposición es falsa. Por ejemplo, sea $\phi(x, y)$ la función proposicional "si y es una fracción propia, entonces x es una fracción

propia mayor que y". Entonces, para todos los valores de y tenemos "$(\exists x) . \phi(x, y)$, de forma que se satisface $(y) : (\exists x) . \phi(x, y)$. De hecho, "$(y) : (\exists x) . \phi(x, y)$" expresa la proposición: "Si y es una fracción propia, entonces hay siempre una fracción propia mayor que y". Pero "$(\exists x) : (y) . \phi(x, y)$" expresa la proposición: "Hay una fracción propia que es mayor que cualquier fracción propia" lo cual es falso.

$*11{\cdot}27.\quad \vdash :. (\exists x, y) : (\exists z) . \phi(x, y, z) : \equiv : (\exists x) : (\exists y, z) . \phi(x, y, z) : \equiv : (\exists x, y, z) . \phi(x, y, z)$

Dem.

$\vdash . *4{\cdot}2 . (*11{\cdot}03) . \supset$

$\vdash :: (\exists x, y) : (\exists z) . \phi(x, y, z) : \equiv :. (\exists x) :. (\exists y) : (\exists z) . \phi(x, y, z)$ (1)

$\vdash . *4{\cdot}2 . (*11{\cdot}03) . \supset$

$\vdash :. (\exists y) : (\exists z) . \phi(x, y, z) : \equiv : (\exists y, z) . \phi(x, y, z)$ (2)

$\vdash . (2) . *10{\cdot}11{\cdot}281 . \supset$

$\vdash :: (\exists x) :. (\exists y) : (\exists z) . \phi(x, y, z) :. \equiv :. (\exists x) : (\exists y, z) . \phi(x, y, z)$ (3)

$\vdash . (1) . (3) . (*11{\cdot}04) . \supset \vdash .$ Prop

Todas las proposiciones del $*10$ tienen sus análogas con validez para dos o más variables. Las más importantes de éstas son las que se prueban a continuación.

$*11{\cdot}3.\quad \vdash :. p . \supset . (x, y) . \phi(x, y) : \equiv : (x, y) : p . \supset . \phi(x, y)$

Dem.

$\vdash . *10{\cdot}21 . \supset \vdash :. p . \supset . (x, y) . \phi(x, y) : \equiv : (x) : p . \supset . (y) . \phi(x, y) :$

[$*10{\cdot}21{\cdot}271$] $\equiv : (x, y) : p . \supset . \phi(x, y) :. \supset \vdash .$ Prop

$*11{\cdot}31.\quad \vdash :. (x, y) . \phi(x, y) : (x, y) . \psi(x, y) : \equiv : (x, y) : \phi(x, y) . \psi(x, y)$

Aquí las condiciones de significación del miembro que está al lado derecho exige que ϕ y ψ tomen argumentos del mismo tipo.

Dem.

$\vdash . *10{\cdot}22 . \supset \vdash :: (x, y) . \phi(x, y) : (x, y) . \psi(x, y) :$

$\equiv :. (x) :. (y) . \phi(x, y) : (y) . \psi(x, y) :.$

[$*10{\cdot}22{\cdot}271$] $\equiv :. (x, y) : \phi(x, y) . \psi(x, y) :: \supset \vdash .$ Prop

Las pruebas de la mayor parte de las proposiciones que vienen a continuación se desarrollan exactamente como en los casos $*11{\cdot}3{\cdot}31$; la proposición análoga en el $*10$ se usa dos veces junto con la $*10{\cdot}27$, o la $*10{\cdot}271$, o la $*10{\cdot}28$, o la $*10{\cdot}281$, dependiendo del caso del que se trate. Cuando las pruebas se acomodan a este modelo, daremos solamente la referencia de la proposición empleada.

$*11{\cdot}311.$ Si $\phi(\hat{x}, \hat{y})$, $\psi(\hat{x}, \hat{y})$ toman argumentos del mismo tipo, y tenemos "$\vdash . \phi(x, y)$" y "$\vdash . \psi(x, y)$", tendremos "$\vdash . \phi(x, y) . \psi(x, y)$". [La prueba es como en $*10{\cdot}13$].

$*11{\cdot}32.\quad \vdash :. (x, y) : \phi(x, y) . \supset . \psi(x, y) : \supset : (x, y) . \phi(x, y) . \supset . (x, y) . \psi(x, y)$ [$*10{\cdot}27$]

$*11{\cdot}33.\quad \vdash :. (x, y) : \phi(x, y) . \equiv . \psi(x, y) : \supset : (x, y) . \phi(x, y) . \equiv . (x, y) . \psi(x, y)$ [$*10{\cdot}271$]

$*11{\cdot}34.\quad \vdash :. (x,y) : \phi(x,y) . \supset . \psi(x,y) : \supset :$
$(\exists x,y) . \phi(x,y) . \supset . (\exists x,y) . \psi(x,y)$ [$*10{\cdot}27{\cdot}28$]

$*11{\cdot}341.\quad \vdash :. (x,y) : \phi(x,y) . \equiv . \psi(x,y) : \supset :$
$(\exists x,y) . \phi(x,y) . \equiv . (\exists x,y) . \psi(x,y)$ [$*10{\cdot}271{\cdot}281$]

$*11{\cdot}35.\quad \vdash :. (x,y) : \phi(x,y) . \supset . p : \equiv : (\exists x,y) . \phi(x,y) . \supset . p$ [$*10{\cdot}23{\cdot}271$]

$*11{\cdot}36.\quad \vdash : \phi(z,w) . \supset . (\exists x,y) . \phi(x,y)$

Dem.

$\vdash . *11{\cdot}1 . \supset \vdash : (x,y) . \sim \phi(x,y) . \supset . \sim \phi(z,w)$ (1)

$\vdash . (1) . \text{Transp} . \supset \vdash . \text{Prop}$

$*11{\cdot}37.\quad \vdash :: (x,y) : \phi(x,y) . \supset . \psi(x,y) :. (x,y) : \psi(x,y) . \supset . \chi(x,y) :.$
$\supset : (x,y) : \phi(x,y) . \supset . \chi(x,y)$

Dem.

En la siguiente demostración, "Hp" significa la hipótesis de la proposición que se va a probar. Emplearemos esta abreviatura, siempre que convenga, en todos los casos en donde la proposición sea hipotética, esto es, que sea de la forma "$p \supset q$". De manera similar "Hp (1)" significa "la hipótesis de (1)", y así sucesivamente.

$\vdash . *11{\cdot}31 . \supset \vdash :: \text{Hp} . \supset :. (x,y) :. \phi(x,y) . \supset . \psi(x,y) : \psi(x,y) . \supset . \chi(x,y)$ (1)

$\vdash . \text{Syll} . *11{\cdot}11 . \supset \vdash :. (x,y) :. \phi(x,y) . \supset . \psi(x,y) : \psi(x,y) . \supset . \chi(x,y) :$
$\supset : \phi(x,y) . \supset . \chi(x,y) :.$

[$*11{\cdot}32$] $\supset \vdash :. (x,y) : \phi(x,y) . \supset . \psi(x,y) : \psi(x,y) . \supset . \chi(x,y) :$
$\supset : (x,y) : \phi(x,y) . \supset . \chi(x,y)$ (2)

$\vdash . (1) . (2) . \text{Syll} . \supset \vdash . \text{Prop}$

Esta última es un tipo de prueba a la que se recurrirá frecuentemente en lo que sigue. Las pruebas que se ajustan a este modelo se indicarán sólo mediante los números de la proposición empleada.

$*11{\cdot}371.\quad \vdash :: (x,y) : \phi(x,y) . \equiv . \psi(x,y) :. (x,y) : \psi(x,y) . \equiv . \chi(x,y) :.$
$\supset :. (x,y) : \phi(x,y) . \equiv . \chi(x,y)$ [$*11{\cdot}31{\cdot}11{\cdot}33$]

$*11{\cdot}38.\quad \vdash :: (x,y) : \phi(x,y) . \supset . \psi(x,y) :. \supset :.$
$(x,y) : \phi(x,y) . \chi(x,y) . \supset . \psi(x,y) . \chi(x,y)$ [Fact . $*11{\cdot}11{\cdot}32$]

$*11{\cdot}39.\quad \vdash :: (x,y) : \phi(x,y) . \supset . \psi(x,y) :. (x,y) : \chi(x,y) . \supset . \theta(x,y) :. \supset :.$
$(x,y) : \phi(x,y) . \chi(x,y) . \supset . \psi(x,y) . \theta(x,y)$ [$*3{\cdot}47 . *11{\cdot}11{\cdot}32$]

$*11{\cdot}391.\quad \vdash :: (x,y) : \phi(x,y) . \supset . \psi(x,y) :. (x,y) : \phi(x,y) . \supset . \chi(x,y) :.$
$\equiv : (x,y) : \phi(x,y) . \supset . \psi(x,y) . \chi(x,y)$

Dem.

$\vdash . *4{\cdot}76 . \quad \supset \vdash :. \phi(x,y) . \supset . \psi(x,y) : \phi(x,y) . \supset . \chi(x,y) :$
$\equiv : \phi(x,y) . \supset . \psi(x,y) . \chi(x,y) :.$

[$*11{\cdot}11{\cdot}33$] $\supset \vdash :. (x,y) : \phi(x,y) . \supset . \psi(x,y) : \phi(x,y) . \supset . \chi(x,y) :$
$\equiv : (x,y) : \phi(x,y) . \supset . \psi(x,y) . \chi(x,y) ::$

[$*11{\cdot}31$] $\supset \vdash :: (x,y) : \phi(x,y) . \supset . \psi(x,y) :. (x,y) : \phi(x,y) . \supset . \chi(x,y) :.$
$\equiv : (x,y) : \phi(x,y) . \supset . \psi(x,y) . \chi(x,y) ::$
$\supset \vdash . \text{Prop}$

***11·4.** $\vdash :: (x,y) : \phi(x,y) . \equiv . \psi(x,y) :. (x,y) : \chi(x,y) . \equiv . \theta(x,y) :. \supset :.$
$(x,y) : \phi(x,y) . \chi(x,y) . \equiv . \psi(x,y) . \theta(x,y)$

Dem.

$\vdash . *11{\cdot}31 . \supset \vdash :: \mathrm{Hp} . \supset :. (x,y) :. \phi(x,y) . \equiv . \psi(x,y) : \chi(x,y) . \equiv . \theta(x,y) :.$
[*4·38.*11·11·32] $\supset :. (x,y) : \phi(x,y) . \chi(x,y) . \equiv . \psi(x,y) . \theta(x,y) ::$
$\supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***11·401.** $\vdash :: (x,y) : \phi(x,y) . \equiv . \psi(x,y) : \supset :.$
$(x,y) : \phi(x,y) . \chi(x,y) . \equiv . \psi(x,y) . \chi(x,y)$ $\left[*11{\cdot}4\,\frac{\chi}{\theta} . \mathrm{Id}\right]$

***11·41.** $\vdash :. (\exists x,y) . \phi(x,y) : \vee : (\exists x,y) . \psi(x,y) :$
$\equiv : (\exists x,y) : \phi(x,y) . \vee . \psi(x,y)$ [*10·42·281]

***11·42.** $\vdash :. (\exists x,y) . \phi(x,y) . \psi(x,y) . \supset : (\exists x,y) . \phi(x,y) : (\exists x,y) . \psi(x,y)$ [*10·5]

***11·421.** $\vdash :. (x,y) . \phi(x,y) . \vee . (x,y) . \psi(x,y) : \supset : (x,y) : \phi(x,y) . \vee . \psi(x,y)$
$\left[*11{\cdot}42\,\frac{\sim\phi,\ \sim\psi}{\phi,\quad\psi} . \mathrm{Transp} . *4{\cdot}56\right]$

***11·43.** $\vdash :. (\exists x,y) : \phi(x,y) . \supset . p : \equiv : (x,y) . \phi(x,y) . \supset . p$ [*10·34·281]

***11·44.** $\vdash :. (x,y) : \phi(x,y) . \vee . p : \equiv : (x,y) . \phi(x,y) . \vee . p$ [*10·2·271]

***11·45.** $\vdash :. (\exists x,y) : p . \phi(x,y) : \equiv : p : (\exists x,y) . \phi(x,y)$ [*10·35·281]

***11·46.** $\vdash :. (\exists x,y) : p . \supset . \phi(x,y) : \equiv : p . \supset . (\exists x,y) . \phi(x,y)$ [*10·37·281]

***11·47.** $\vdash :. (x,y) : p . \phi(x,y) : \equiv : p : (x,y) . \phi(x,y)$ [*10·33·271]

***11·5.** $\vdash :. (\exists x) : \sim\{(y) . \phi(x,y)\} : \equiv : \sim\{(x,y) . \phi(x,y)\} : \equiv : (\exists x,y) . \sim\phi(x,y)$

Dem.

$\vdash . *10{\cdot}253 . \supset \vdash :. (\exists x) : \sim\{(y) . \phi(x,y)\} : \equiv : \sim\{(x) : (y) . \phi(x,y)\} :$
[(*11·01)] $\equiv : \sim\{(x,y) . \phi(x,y)\}$ (1)
$\vdash . *10{\cdot}253 . \supset \vdash : \sim\{(y) . \phi(x,y)\} .$ $\equiv . (\exists y) . \sim\phi(x,y) :$
[*10·11·281] $\supset \vdash :. (\exists x) : \sim\{(y) . \phi(x,y)\} : \equiv : (\exists x) : (\exists y) . \sim\phi(x,y) :$
[(*11·03)] $\equiv : (\exists x,y) . \sim\phi(x,y)$ (2)
$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***11·51.** $\vdash :. (\exists x) : (y) . \phi(x,y) : \equiv : \sim\{(x) : (\exists y) . \sim\phi(x,y)\}$

Dem.

$\vdash . *10{\cdot}252 . \mathrm{Transp} . \supset \vdash :. (\exists x) : (y) . \phi(x,y) : \equiv : \sim[(x) : \sim(y) . \phi(x,y)]$ (1)
$\vdash . *10{\cdot}253 . \supset \vdash :. \sim(y) . \phi(x,y) .$ $\equiv : (\exists y) . \sim\phi(x,y) :.$
[*10·11·271] $\supset \vdash :. (x) : \sim(y) . \phi(x,y) :$ $\equiv : (x) : (\exists y) . \sim\phi(x,y) :.$
[Transp] $\supset \vdash :. \sim[(x) : \sim\{(y) . \phi(x,y)\}] .$ $\equiv : \sim\{(x) : (\exists y) . \sim\phi(x,y)\}$ (2)
$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***11·52.** $\vdash :. (\exists x,y) . \phi(x,y) . \psi(x,y) . \equiv . \sim\{(x,y) : \phi(x,y) . \supset . \sim\psi(x,y)\}$

Dem.

$\vdash . *4{\cdot}51{\cdot}62 . \supset$
$\vdash :. \sim\{\phi(x,y) . \psi(x,y)\} .$ $\equiv : \phi(x,y) . \supset . \sim\psi(x,y)$ (1)
$\vdash . (1) . *11{\cdot}11{\cdot}33 . \supset$

$\vdash :. (x, y) . \sim\{\phi(x, y) . \psi(x, y)\} : \equiv : (x, y) : \phi(x, y) . \supset . \sim\psi(x, y)$ (2)
$\vdash : (2) . \text{Transp} . *11{\cdot}22 . \supset \vdash . \text{Prop}$

***11·521.** $\vdash :. \sim(\exists x, y) . \phi(x, y) . \sim\psi(x, y) . \equiv : (x, y) : \phi(x, y) . \supset . \psi(x, y)$
$\left[*11{\cdot}52 . \text{Transp} . \frac{\sim\psi(x, y)}{\psi(x, y)}\right]$

***11·53.** $\vdash :. (x, y) . \phi x \supset \psi y . \equiv : (\exists x) . \phi x . \supset . (y) . \psi y$

Dem.

$\vdash . *10{\cdot}21{\cdot}271 . \supset \vdash :. (x, y) . \phi x \supset \psi y . \equiv : (x) : \phi x . \supset . (y) . \psi y :$
$[*10{\cdot}23] \qquad \equiv : (\exists x) . \phi x . \supset . (y) . \psi y :. \supset \vdash . \text{Prop}$

***11·54.** $\vdash :. (\exists x, y) . \phi x . \psi y . \equiv : (\exists x) . \phi x : (\exists y) . \psi y$

Dem.

$\vdash . *10{\cdot}35 . \quad \supset \vdash :. (\exists y) . \phi x . \psi y . \quad \equiv : \phi x : (\exists y) . \psi y :.$
$[*10{\cdot}11{\cdot}281] \supset \vdash :. (\exists x, y) . \phi x . \psi y . \equiv : (\exists x) : \phi x : (\exists y) . \psi y :$
$[*10{\cdot}35] \qquad \equiv : (\exists x) . \phi x : (\exists y) . \psi y :. \supset \vdash . \text{Prop}$

Esta proposición se usa muy frecuentemente

***11·55.** $\vdash :. (\exists x, y) . \phi x . \psi(x, y) . \equiv : (\exists x) : \phi x : (\exists y) . \psi(x, y)$

Dem.

$\vdash . *10{\cdot}35 . \supset \vdash :. (\exists y) . \phi x . \psi(x, y) . \quad \equiv : \phi x : (\exists y) . \psi(x, y) :.$
$[*10{\cdot}11] \quad \supset \vdash :. (x) :. (\exists y) . \phi x . \psi(x, y) . \equiv : \phi x : (\exists y) . \psi(x, y) :.$
$[*10{\cdot}281] \quad \supset \vdash :. (\exists x) : (\exists y) . \phi x . \psi(x, y) . \equiv : (\exists x) : \phi x : (\exists y) . \psi(x, y) :. \supset \vdash . \text{Prop}$

Esta proposición es de uso muy frecuente.

***11·56.** $\vdash :. (x) . \phi x : (y) . \psi y : \equiv : (x, y) . \phi x . \psi y$

Dem.

$\vdash . *10{\cdot}33 . \supset \vdash :: (x) . \phi x : (y) . \psi y : \equiv :. (x) :. \phi x : (y) . \psi y$ (1)
$\vdash . *10{\cdot}33 . \supset \vdash :. \quad \phi x : (y) . \psi y : \equiv : (y) . \phi x . \psi y :.$
$[*10{\cdot}11] \quad \supset \vdash :. (x) :. \phi x : (y) . \psi y : \equiv : (y) . \phi x . \psi y :.$
$[*10{\cdot}271] \quad \supset \vdash :: (x) :. \phi x : (y) . \psi y :. \equiv : (x) : (y) . \phi x . \psi y :$
$[(*11{\cdot}01)] \qquad \equiv : (x, y) . \phi x . \psi y$ (2)
$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash . \text{Prop}$

***11·57.** $\vdash : (x) . \phi x . \equiv . (x, y) . \phi x . \phi y \quad [*11{\cdot}56 . *4{\cdot}24]$

El empleo del *4·24 aquí depende del hecho de que $(x) . \phi x$ y $(y) . \phi y$ son la misma proposición.

***11·58.** $\vdash : (\exists x) . \phi x . \equiv . (\exists x, y) . \phi x . \phi y \quad [*11{\cdot}54 . *4{\cdot}24]$

***11·59.** $\vdash :. \phi x . \supset_x . \psi x : \equiv : \phi x . \phi y . \supset_{x,y} . \psi x . \psi y$

Dem.

$\vdash . *11{\cdot}57 . \supset \vdash :. \phi x . \supset_x . \psi x : \equiv : (x, y) : \phi x . \supset . \psi x : \phi y . \supset . \psi y :$
$[*3{\cdot}47 . *11{\cdot}32] \qquad \supset : (x, y) : \phi x . \phi y . \supset . \psi x . \psi y$ (1)
$\vdash . *11{\cdot}1 . \supset \vdash :. (x, y) : \phi x . \phi y . \supset . \psi x . \psi y : \supset : \phi x . \phi y . \supset . \psi x . \psi y$ (2)

$$\vdash . (2)\frac{x}{y} . *4{\cdot}24 . \supset \vdash :. \mathrm{Hp}(2) . \supset : \phi x . \supset . \psi x \tag{3}$$

$$\vdash . (3) . *10{\cdot}11{\cdot}21 . \supset \vdash :. (x, y) : \phi x . \phi y . \supset . \psi x . \psi y : \supset : \phi x . \supset_x . \psi x \tag{4}$$

$$\vdash . (1) . (4) . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$$

***11·6.** $\vdash :: (\exists x) :. (\exists y) . \phi(x, y) . \psi y : \chi x :. \equiv :. (\exists y) :. (\exists x) . \phi(x, y) . \chi x : \psi y$

Esta proposición se empleará frecuentemente en las pruebas que siguen.

Dem.

$\vdash . *10{\cdot}35 . \supset \vdash :. (\exists y) . \phi(x, y) . \psi y : \chi x :. \equiv :. (\exists y) : \phi(x, y) . \psi y . \chi x :.$
$[*10{\cdot}11{\cdot}281] \supset \vdash :: (\exists x) :. (\exists y) . \phi(x, y) . \psi y : \chi x :$
$\equiv :. (\exists x) :. (\exists y) . \phi(x, y) . \psi y . \chi x :.$
$[*11{\cdot}23] \equiv :. (\exists y) :. (\exists x) . \phi(x, y) . \psi y . \chi x :.$
$[*11{\cdot}341.\mathrm{Perm}] \equiv :. (\exists y) :. (\exists x) . \phi(x, y) . \chi x . \psi y :.$
$[*10{\cdot}35{\cdot}281] \equiv :. (\exists y) :. (\exists x) . \phi(x, y) . \chi x : \psi y :: \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***11·61.** $\vdash :. (\exists y) : \phi x . \supset_x . \psi(x, y) : \supset : \phi x . \supset_x . (\exists y) . \psi(x, y)$

Dem.

$\vdash . *11{\cdot}26 . \supset \vdash :: \mathrm{Hp} . \supset :. (x) :. (\exists y) : \phi x . \supset . \psi(x, y)$ (1)

$\vdash . *10{\cdot}37 . \supset \vdash :. (\exists y) : \phi x . \supset . \psi(x, y) : \supset : \phi x . \supset . (\exists y) . \psi(x, y) :.$

$[*10{\cdot}11{\cdot}27] \supset \vdash :: (x) :. (\exists y) : \phi x . \supset . \psi(x, y) :. \supset :. (x) : \phi x . \supset . (\exists y) . \psi(x, y)$ (2)

$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***11·62.** $\vdash :: \phi x . \psi(x, y) . \supset_{x,y} . \chi(x, y) : \equiv :. \phi x . \supset_x : \psi(x, y) . \supset_y . \chi(x, y)$

Dem.

$\vdash . *4{\cdot}87 . *11{\cdot}11{\cdot}33 . \supset$
$\vdash :: \phi x . \psi(x, y) . \supset_{x,y} . \chi(x, y) : \equiv :. (x, y) :. \phi x . \supset : \psi(x, y) . \supset . \chi(x, y)$
$[*10{\cdot}21{\cdot}11{\cdot}271] \equiv :. (x) :. \phi x . \supset : (y) : \psi(x, y) . \supset . \chi(x, y) :: \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***11·63.** $\vdash :. \sim(\exists x, y) . \phi(x, y) . \supset : \phi(x, y) . \supset_{x,y} . \psi(x, y)$

Dem.

$\vdash . *2{\cdot}21 . *11{\cdot}11 . \supset \vdash :. (x, y) :. \sim\phi(x, y) . \supset : \phi(x, y) . \supset . \psi(x, y) :.$
$[*11{\cdot}32] \supset \vdash :. (x, y) . \sim\phi(x, y) . \supset : (x, y) : \phi(x, y) . \supset . \psi(x, y) :.$
$[*11{\cdot}25] \supset \vdash :. \sim(\exists x, y) . \phi(x, y) . \supset : (x, y) : \phi(x, y) . \supset . \psi(x, y) :. \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***11·7.** $\vdash :. (\exists x, y) : \phi(x, y) . \vee . \phi(y, x) : \equiv . (\exists x, y) . \phi(x, y)$

Dem.

$\vdash . *11{\cdot}41 . \supset \vdash :. (\exists x, y) : \phi(x, y) . \vee . \phi(y, x) :$
$\equiv : (\exists x, y) . \phi(x, y) . \vee . (\exists x, y) . \phi(y, x) :$
$[*11{\cdot}23] \equiv : (\exists x, y) . \phi(x, y) . \vee . (\exists y, x) . \phi(y, x) :$
$[*4{\cdot}25] \equiv : (\exists x, y) . \phi(x, y) :. \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

En la última línea de la prueba anterior se emplea el hecho de que

$$(\exists x, y) . \phi(x, y) \quad \text{y} \quad (\exists y, x) . \phi(y, x)$$

son la misma proposición.

El primer empleo de la proposición que sigue tiene lugar en la prueba de la *234·12. Su utilidad estriba en que nos permite pasar desde una hipótesis

$$\phi z \,.\, \chi w \,.\, \supset_{z,w} \,.\, \psi z \,.\, \theta w,$$

que contiene dos variedades aparentes, al producto de dos hipótesis cada una de las cuales sólo contiene una.

***11·71.** $\vdash :: (\exists z) \,.\, \phi z : (\exists w) \,.\, \chi w : \supset :.$

$$\phi z \,.\, \supset_z \,.\, \psi z : \chi w \,.\, \supset_w \,.\, \theta w : \equiv : \phi z \,.\, \chi w \,.\, \supset_{z,w} \,.\, \psi z \,.\, \theta w$$

Dem.

$\vdash \,.\, *10{\cdot}1 \,.\, *3{\cdot}47 \,.\, \supset \vdash :. \phi z \,.\, \supset_z \,.\, \psi z : \chi w \,.\, \supset_w \,.\, \theta w :$

$$\supset : \phi z \,.\, \chi w \,.\, \supset \,.\, \psi z \,.\, \theta w \qquad (1)$$

$\vdash \,.\, (1) \,.\, *11{\cdot}11{\cdot}3 \,.\, \supset \vdash :. \phi z \,.\, \supset_z \,.\, \psi z : \chi w \,.\, \supset_w \,.\, \theta w :$

$$\supset : \phi z \,.\, \chi w \,.\, \supset_{z,w} \,.\, \psi z \,.\, \theta w \qquad (2)$$

$\vdash \,.\, *10{\cdot}1 \,.\, \supset \vdash :: \phi z \,.\, \chi w \,.\, \supset_{z,w} \,.\, \psi z \,.\, \theta w : \supset :. \phi z \,.\, \chi w \,.\, \supset_w \,.\, \psi z \,.\, \theta w :.$

[*10·28] $\supset :. (\exists w) \,.\, \phi z \,.\, \chi w \,.\, \supset \,.\, (\exists w) \,.\, \psi z \,.\, \theta w :.$

[*10·35] $\supset :. \phi z : (\exists w) \,.\, \chi w : \supset : \psi z : (\exists w) \,.\, \theta w$

(3)

$\vdash \,.\, (3) \,.\, \text{Comm} \,.\, *3{\cdot}26 \,.\, \supset \vdash :: (\exists w) \,.\, \chi w : \supset :. \phi z \,.\, \chi w \,.\, \supset_{z,w} \,.\, \psi z \,.\, \theta w :$

$$\supset : \phi z \,.\, \supset \,.\, \psi z \qquad (4)$$

$\vdash \,.\, (4) \,.\, *10{\cdot}11{\cdot}21 \,.\, \supset \vdash :: (\exists w) \,.\, \chi w \,.\, \supset :. \phi z \,.\, \chi w \,.\, \supset_{z,w} \,.\, \psi z \,.\, \theta w :$

$$\supset : \phi z \,.\, \supset_z \,.\, \psi z \qquad (5)$$

Similarmente $\vdash :: (\exists z) \,.\, \phi z \,.\, \supset :. \phi z \,.\, \chi w \,.\, \supset_{z,w} \,.\, \psi z \,.\, \theta w :$

$$\supset : \chi w \,.\, \supset_w \,.\, \theta w \qquad (6)$$

$\vdash \,.\, (5) \,.\, (6) \,.\, *3{\cdot}47 \,.\, \text{Comp} \,.\, \supset$

$\vdash :: \text{Hp} \,.\, \supset \therefore \phi z \,.\, \chi w \,.\, \supset_{z,w} \,.\, \psi z \,.\, \theta w : \supset : \phi z \,.\, \supset_z \,.\, \psi z : \chi w \,.\, \supset_w \,.\, \theta w \qquad (7)$

$\vdash \,.\, (2) \,.\, (7) \,.\, \supset \vdash \,.\, \text{Prop}$

*12. LA JERARQUIA DE TIPOS Y EL AXIOMA DE LA REDUCIBILIDAD

Se ha explicado que la idea primitiva "$(x)\,.\,\phi x$" significa "ϕx es siempre verdadera", es decir, "todos los valores de ϕx son verdaderos". Pero cualquiera que pueda ser la función ϕ, habrá argumentos x con los cuales ϕx no tenga sentido; es decir, con los cuales como argumentos, ϕ no tiene ningún valor. Los argumentos con los que ϕx adquiere valores forman lo que denominamos "el campo de significación" de ϕx. Un "*tipo*" se define como el campo de significación de una función. En virtud de la *9·14, si ϕx, ϕy, y ψx son significantes –esto es, son verdaderas o falsas–, también lo es ψy. De esto resulta que dos tipos que tienen un miembro común coinciden y que dos tipos diferentes se excluyen entre sí. Cualquier proposición de la forma $(x)\,.\,\phi x$, es decir, cualquier proposición que contenga una variable aparente determina algún tipo según el campo de la variable aparente, quedando fijado dicho tipo por la función ϕ.

La división de objetos en tipos viene exigida por las falacias de círculo vicioso que, de no adoptarla, surgirían (63). Estas falacias muestran que no debe haber totalidades que, si son legítimas, contengan miembros definidos en términos de ellos mismos. Por tanto, cualquier expresión que contenga una variable aparente no debe estar en el campo de esa variable, es decir, debe pertenecer a un tipo diferente. Así, pues, las variables aparentes contenidas o presupuestas en una expresión son las que determinan su tipo. Este es el principio que orientará en lo que viene a continuación.

Como se explicó en el *9, las proposiciones que contienen variables se generan a partir de funciones proposicionales que no contienen estas variables aparentes, por el proceso de aseverar todos o algunos de los valores de tales funciones. Supongamos que ϕa es una proposición que contiene a a; denominamos *generalización* al proceso que convierte ϕa en $(x)\,.\,\phi x$ o en $(\exists x)\,.\,\phi x$, y llamamos *proposiciones generalizadas* a todas las que contienen variables aparentes. Está claro que las proposiciones que contienen variables aparentes presuponen otras que no contienen variables aparentes, de las cuales pueden derivarse por generalización. A las proposiciones que no contienen variables aparentes las llamamos *proposiciones elementales* (64), y a los términos de tales proposiciones, que no sean funciones, los llamamos *individuales*. Por consiguiente, los individuales forman el primer tipo.

No es necesario, en la práctica, saber qué objetos pertenecen al tipo más bajo, ni tampoco si el tipo más bajo de variable que interviene en un contexto dado es el de

(63) C.f. Introducción, cap. II.

(64) C.f. pp. 151, 152.

los individuales o algún otro. En la práctica, sólo son relevantes los tipos *relativos* de variables. Por tanto, el tipo más bajo que haya en un contexto dado puede llamársele de individuales, hasta donde ese contexto le concierna. De acuerdo con lo dicho, no es esencial tener en cuenta a los individuales para la verdad de lo que sigue; lo que sí es esencial es la manera en que se generan otros tipos a partir de los individuales, cualquiera que sea el tipo de individuales que pueda constituirse.

Aplicando el proceso de generalización a los individuales que intervienen en proposiciones elementales, obtenemos nuevas proposiciones. La legitimidad de este proceso sólo exige que los individuales no sean proposiciones. Que esto sea así viene impuesto por el significado que damos a la palabra *individual*. Podemos explicar un individual como algo que existe pro su propia cuenta; por tanto, esto, obviamente, no es una proposición, ya que las proposiciones, como se explicó en el capítulo II de la Introducción (p. 99), son símbolos incompletos que carecen de significado excepto "en uso". Por lo tanto, al aplicar el proceso de generalización a los individuales no corremos el riesgo de incurrir en falacias reflexivas. Damos el nombre de *proposiciones de primer orden* a aquellas que contienen una o más variables aparentes, cuyos valores posibles son individuales, pero que no contienen otras variables aparentes. Las proposiciones de primer orden no son todas del mismo tipo, ya que, como se explicó en el *9, dos proposiciones que no contienen el mismo número de variables aparentes no pueden ser del mismo tipo. Sin embargo, debido a la ambigüedad sistemática de la negación y de la disyunción, sus diferencias de tipo pueden usualmente ignorarse en la práctica. No resultarán falacias reflexivas, dado que la proposición de primer orden no abarca una totalidad excepto la de individuales.

Simbolicemos mediante "$\phi ! \hat{x}$" ó "$\phi ! (\hat{x}, \hat{y})$", etc, una función elemental cuyo argumento o argumentos son individuales. A una función de éstas la denominamos *"función predicativa de un individual"*. Tales funciones, juntamente con las que se deriven de ellas por generalización, se llaman *funciones de primer orden*. En la práctica podemos, sin riesgo de caer en falacias reflexivas, considerar a las funciones de primer orden como un tipo, puesto que la única totalidad que abarcan es la de los individuales y, por medio de la ambigüedad sistemática de la negación y de la disyunción, cualquier función de una función de primer orden que consideremos será significante, cualquiera que sea la función de primer orden que se tome como argumento, con tal que se den significaciones correctas a las negaciones y disyunciones que intervengan.

Por motivos de clarificación, repetimos en términos algo diferentes lo que damos a entender por una función de primer orden. Demos el nombre de *matriz* a cualquier función, de cualquier número de variables, pero que no sean aparentes. Luego, cualquier función posible, que no sea una matriz, se deriva de una matriz por medio de la generalización; es decir, considerando la proposición que asevere que la función en cuestión es verdadera para todos los valores o para algún valor de uno de los argumentos, permaneciendo indeterminado el otro u otros argumentos. Así, por ejemplo, de la función $\phi (x, y)$ seremos capaces de derivar las cuatro funciones:

$$(x) \cdot \phi(x, y), (\exists x) \cdot \phi(x, y), (y) \cdot \phi(x, y), (\exists y) \cdot \phi(x, y)$$

de las cuales las dos primeras son funciones de y, mientras que las dos últimas son funciones de x. (Todas las *proposiciones*, con la excepción de las que sean valores de matrices, también se derivan de las matrices por el proceso de generalización anteriormente indicado. A fin de obtener una proposición a partir de una matriz que contiene n variables, sin asignar valores a ninguna de las variables, es necesario convertir todas las variables en variables aparentes. Así pues, si $\phi(x, y)$ es una matriz, $(x, y) \cdot \phi(x, y)$ es una proposición). Damos el nombre de *matrices de primer orden* a aquellas que sólo tienen individuales como argumentos, y damos el nombre de *funciones de primer orden* (de cualquier número de variables) a aquellas que o bien son matrices de primer orden o se derivan de las matrices de primer orden por la generalización aplicada a algunos (no a todos) de los argumentos de tales matrices. El resultado de aplicar la generalización a *todos* los argumentos de una matriz de primer orden serán las *proposiciones* de primer orden.

Como ya hemos expuesto, la notación "$\phi ! \hat{z}$" se emplea en lugar de una función elemental de una variable. De este modo, "$\phi ! x$" representa a algún valor de cualquier función elemental de una variable. Se observará que "$\phi ! x$" es una función de dos variables, a saber, $\phi ! z$ y x. Ya que no contiene variable aparente es una matriz, pero dado que contiene una variable (a saber, $\phi ! z$) que no es un individual, no se trata de una matriz de primer orden. Podemos construir un número de nuevas matrices, tales como

$$\sim\phi ! a, \quad \sim\phi ! x, \quad \phi ! x \vee \phi ! y, \quad \phi ! x \vee \psi ! x, \quad \phi ! x \vee \psi ! y,$$

$$\phi ! x \cdot \supset \cdot \psi ! x, \quad \phi ! x \cdot \psi ! x, \quad \phi ! x \vee \psi ! y \vee \chi ! z,$$

y así sucesivamente.

Todas éstas son matrices que contienen funciones de primer orden entre sus argumentos. A tales matrices las llamamos *matrices de segundo orden*. A partir de ellas, y aplicando la generalización a sus argumentos, tanto en el caso de que sean funciones como (si hay algunos) que sean individuales, obtenemos nuevas funciones y proposiciones. Tales funciones (junto con las matrices de segundo orden) se llaman *funciones de segundo orden*, y a tales proposiciones se les llaman proposiciones de *segundo orden*. De este modo llegamos a las siguientes definiciones:

Una *matriz de segundo orden* es aquella que, por lo menos, tiene una matriz de primer orden entre sus argumentos, pero no tiene más argumentos que matrices de primer orden e individuales.

Una *función de segundo orden* es aquella que o bien es una matriz de segundo orden o bien resulta de otra por aplicación de la generalización a algunos (no todos) de los argumentos de una matriz de segundo orden.

Una *proposición de segundo orden* es aquella que resulta de una matriz de segundo orden mediante la aplicación de la generalización a todos sus argumentos.

Además de los ejemplos anteriores de matrices de segundo orden, podemos ofrecer los siguientes ejemplos de funciones de segundo orden:

1) Las funciones en las que el argumento es $\phi ! \hat{z} : (x) . \phi ! x$, $(\exists x) . \phi ! x$, $\phi ! a . \supset . \phi ! b$, en donde a y b son constantes, $\phi ! x . \supset_x . g ! x$ en donde g $! \hat{z}$ es una función constante, y así sucesivamente.

2) Las funciones en las que los argumentos son $\phi ! \hat{z}$ y $\psi ! \hat{z}$: $\phi ! x . \supset_x . \psi ! x$, $\phi ! x . \equiv_x . \psi ! x$, $(\exists x) . \phi x . \psi x$, $\phi ! a . \supset . \psi ! b$, en donde a y b son constantes, y así sucesivamente.

3) Las funciones en las que el argumento es un individual x: $(\phi) . \phi ! x$, $(\exists \phi) . \phi ! x$, $\phi ! x . \supset_\phi . \phi ! a$, en donde a es una constante, y así sucesivamente.

4) Las funciones en las que los argumentos son $\phi ! \hat{z}$ y x: $\phi ! x$, $\phi ! x . \supset . \phi ! a$, en donde a es constante, $(\exists \psi)$: $\phi ! x . \equiv . \psi ! x$, y así sucesivamente.

Desde luego, los ejemplos de funciones de segundo orden podrían multiplicarse indefinidamente pero, a efectos de ilustración, parecen suficientes los que se han ofrecido.

Una matriz de segundo orden de una variable se llama *función predicativa de segundo orden de una variable,* o bien *función predicativa de una matriz de primer orden.* Así pues, $\phi ! a$, $\sim \phi ! a$ y $\phi ! a \supset \phi ! b$ son funciones predicativas de $\phi ! \hat{z}$. De manera semajante, una función de varias variables, de las cuales una por lo menos es una matriz de primer orden, mientras que el resto son individuales, o matrices de primer orden, se llamará *predicativa* si es una matriz.

Se verá, sin embargo, que una función de segundo orden sólo puede tener individuales como argumentos; los ejemplos se dieron justamente debajo del título 3). Tales funciones no se llamarán predicativas, ya que las funciones predicativas de individuales ya han sido definidas como aquellas que son de primer orden. De este modo, el orden de una función no está determinado por el orden de su argumento o argumentos; en efecto, la función puede ser de un orden superior al orden u órdenes de sus argumentos.

Una matriz variable cuyo argumento es $\phi ! \hat{z}$ se representa mediante el símbolo $f ! \phi ! \hat{z}$ y, en general, una matriz cuyos argumentos sean $\phi ! \hat{z}$, $\psi ! \hat{z}$, ... x, y, ... (en donde haya por lo menos una función entre los argumentos, se representará por

$$f ! (\phi ! \hat{z}, \psi ! \hat{z}, \ldots x, y, \ldots)$$

Una matriz tal no es de primer orden ni de segundo orden, ya que contiene la nueva variable f, cuyos valores son matrices de segundo orden. Procedemos a construir nuevas matrices como hicimos con la matriz $\phi ! \hat{x}$; éstas constituyen las *matrices de tercer orden.* Estas, juntamente con las funciones derivadas de ellas por generalización, se llaman *funciones de tercer orden,* y las proposiciones derivadas de las matrices de tercer orden por generalización se llaman *proposiciones de tercer orden.*

De esta forma podemos continuar indefinidamente hasta matrices, funciones y proposiciones de más y más altos órdenes. Introducimos la siguiente definición:

Se dice que una función es *predicativa* cuando es una matriz. Se observará que, en una jerarquía en la que todas las variables son individuales o matrices, una matriz es lo mismo que una función elemental. (Cf. pp. 188, 189).

"Matriz" o "función predicativa" es una idea primitiva.

El hecho de que una función sea predicativa se indica, como se ha hecho anteriormente, por un signo de exclamación colocado después de la letra funcional.

De ahora en adelante, las variables que se presentan en este trabajo serán todas individuales o matrices de algún orden en la jerarquía anterior. Las proposiciones que hasta ahora se han presentado como variables, ya no lo serán excepto en casos aislados, de los que no se hace uso posterior. En la práctica, por las razones expuestas en la p. 223, una función de una matriz puede considerarse como capaz de cualquier argumento que sea una función del mismo orden y tome argumentos del mismo tipo.

En la práctica, nunca necesitamos conocer los tipos absolutos de nuestras variables, sino sólo sus tipos *relativos*. Es decir, si probamos una proposición bajo el supuesto de que una de nuestras variables sea un individual y que otra sea una función de orden n, la prueba aún valdría si, en lugar de un individual tomásemos una función de orden m, y si en vez de nuestra función de orden n tomásemos una función de orden $n + m$, con los correspondientes cambios en otras variables que puedan estar afectadas. Esto resulta del supuesto de que nuestras proposiciones primitivas son aplicables a variables de cualquier orden.

Usaremos las letras latinas minúsculas (excepto p, q, r y s) para representar las variables del tipo más bajo que aparezcan en un contexto cualquiera. Para las funciones emplearemos ϕ, ψ, χ, θ, f, g, F (con la salvedad de que, más adelante, F se definirá como una relación constante, y θ se definirá como el orden-tipo del continuo).

Más adelante explicaremos una jerarquía diferente de clases y relaciones, que se deriva de la jerarquía funcional explicada anteriormente, y que resulta más conveniente en la práctica.

Cuando una función predicativa, pongamos por caso $\phi\,!\,\hat{z}$, tenga lugar como variable aparente, sería más correcto, en rigor, indicar este hecho poniendo "$(\phi\,!\,\hat{z})$" antes de lo que sigue, como en esta forma: "$(\phi\,!\,\hat{z}).f(\phi\,!\,\hat{z})$". Pero, en atención a la brevedad, escribiremos simplemente "(ϕ)" en vez de "$(\phi\,!\,\hat{z})$". Dado que lo que sigue a ϕ entre los paréntesis siempre debe contener a ϕ con argumentos suministrados, esta práctica no puede dar lugar a confusión alguna.

Debe observarse que, en virtud de la manera en que fue generada nuestra jerarquía de funciones, siempre resultan funciones no-predicativas de aquellas que son predicativas por medio de la generalización. Por lo tanto, es innecesario introducir una notación especial para las funciones no-predicativas de un orden dado y que tomen argumentos de un orden dado. Por ejemplo, las funciones de segundo orden de un individual x, se derivan siempre, por generalización, a partir de una matriz

$$f\,!\,(\phi\,!\,\hat{z},\ \psi\,!\,\hat{z},\ \ldots\ x,\ y,\ z,\ \ldots),$$

en donde las funciones f, ϕ, ψ, ... son predicativas. Es posible, por lo tanto, sin pérdida de generalización, no usar variables aparentes salvo cuando sean predicativas.

Precisamos, no obstante, de un medio para simbolizar una función cuyo orden no se señale. Emplearemos "ϕx" o "$f(\chi \,!\, \hat{z})$", etc. para expresar una función (ϕ ó f) cuyo orden, con respecto a su argumento, no se dé. Una función así no puede entenderse como una variable aparente, a no ser que supongamos que su orden está fijado previamente. Como el único objeto de la notación es evitar la necesidad de fijar el orden, una función así no debe usarse como variable aparente; las únicas funciones que también pueden emplearse serán las funciones predicativas porque, como acabamos de comprobar, esta restricción no entraña pérdida en la generalización.

Hemos de plantear ahora el *axioma de la reductibilidad.*

Es importante observar que, dado que hay varios tipos de proposiciones y funciones, y ya que la generalización sólo puede aplicarse dentro de un tipo (o por medio de ambigüedad sistemática, dentro de algún conjunto de tipos bien definido y completo), todas las frases que hacen referencia a "todas las proposiciones", a "todas las funciones", a "alguna (indeterminada) proposición", o a "alguna (indeterminada) función", son *prima facie* sin-sentidos, aunque en ciertos casos permitan una interpretación intachable. Surgen contradicciones en el uso de tales frases, en aquellos casos donde no pueda encontrarse un significado sin doblez.

Si la matemática debe ser posible, es absolutamente necesario (como se explicó en la Introducción, capítulo II) que dispongamos de algún método de conseguir enunciados que, normalmente, sean equivalentes a los que tenemos en el pensamiento cuando (incorrectamente) hablamos de "todas las propiedades de x". (Una "propiedad de x" puede definirse como una función proposicional satisfecha por x). Por tanto, debemos encontrar, si es posible, algún método de reducir el orden de una función proposicional sin que quede afectada la verdad o falsedad de sus valores. Esto parece ser lo que el sentido común realiza mediante la incorporación de las "clases". Dada una función proposicional ψx, de cualquier orden, se supone equivalente, para todos los valores de x, a una expresión de la forma "x pertenece a la clase α". Suponiendo ahora que hay una entidad tal que la clase α, esta expresión es de primer orden, ya que no entraña alusión a una función variable. En efecto, su única ventaja práctica respecto de la expresión original ψx, es que es de primer orden. No ofrece ventaja suponer que en realidad hay cosas tales como clases; y la contradicción acerca de las clases que no son miembros de sí mismos muestra que, si hay clases, deben ser cosas radicalmente diferentes de los individuales. Podría parecer que la única finalidad para la que sirven las clases –y una razón principal que las hace lingüísticamente convenientes–, es que proporcionan un método para reducir el orden de una función proposicional. Por consiguiente, no supondremos nada de lo que puede parecer que entraña la admisión de las clases por el sentido común, excepto esto: que cada función proposicional es equivalente, para todos sus valores, a alguna función predicativa del mismo argumento o argumentos.

Esta suposición con respecto a las funciones puede hacerse cualquiera que sea el tipo de sus argumentos. Sea *fu* una función, de cualquier orden, de un argumento *n*, que pueda por sí mismo ser un individual o una función de cualquier orden. Si *f* es una matriz, escribimos la función en la forma $f!u$; en tal caso, decimos que *f* es una función *predicativa*. Así pues, una función predicativa de un individual es una función de primer orden; y para tipos superiores de argumentos, las funciones predicativas ocupan el mismo lugar que las funciones de primer orden toman con respecto a los individuales. Suponemos entonces, que cada función de una variable es equivalente, para todos sus valores, a alguna función predicativa del mismo argumento. Esta suposición parece ser la esencia de la suposición usual de las clases; en todo caso, conserva de las clases cuanto teníamos para cualquier uso, y lo suficiente para evitar las contradicciones que una pequeña concesión maliciosa de clases está pronta a producir. A esta suposición la llamaremos el *"axioma de las clases* o el *axioma de la reducibilidad"*.

De manera semejante supondremos que cada función de dos variables es equivalente, para todos sus valores, a una función predicativa de esas variables, es decir, a una matriz. Esta suposición es lo que se quiere dar a entender cuando decimos que una expresión acerca de dos variables define una relación entre ellas. A este supuesto lo denominamos el *axioma de las relaciones* o (como en el axioma previo) el *axioma de la reducibilidad.*

En cuanto a las relaciones entre más de dos términos, se necesitarían suposiciones similares para tres, cuatro... variables. Pero estas suposiciones no son indispensables para nuestro propósito y, por lo tanto, no se llevan a cabo en este trabajo.

Expresado en símbolos, las dos formas del axioma de la reducibilidad son las siguientes:

$*12{\cdot}1.\quad \vdash : (\exists f) : \phi x \,.\equiv_x .\, f!x \qquad \text{Pp}$

$*12{\cdot}11.\quad \vdash : (\exists f) : \phi(x, y) \,.\equiv_{x,y} .\, f!(x, y) \qquad \text{Pp}$

Decimos que dos funciones, $\phi\hat{x}$ y $\psi\hat{x}$, son *formalmente equivalentes* cuando $\phi x \,.\equiv_x .\, \psi x$; y, de manera similar, decimos que $\phi(\hat{x}, \hat{y})$ y $\psi(\hat{x}, \hat{y})$ son formalmente equivalentes cuando

$$\phi(x, y) \,.\equiv_{x,y} .\, \psi(x, y).$$

Así, pues, los axiomas anteriores expresan que cualquier función de una o dos variables es formalmente equivalente a alguna función *predicativa* de una o dos variables, según sea el caso.

De los axiomas de arriba, el primero es ante todo necesario en la teoría de clases (*20), y el segundo en la teoría de relaciones (*21). Pero el primero es también esencial para la teoría de la identidad, si la indentidad debe definirse (como hemos hecho en el *13.01); su empleo en la teoría de la identidad se incorpora, más adelante, en la prueba de la $*13{\cdot}101$.

Podemos resumir lo que se ha expuesto en este número de la siguiente forma:

1) Una función de primer orden es la que no entraña variables excepto individuales, tanto si son variables aparentes como si son argumentos.

2) Una función de orden $(n + 1)$ es el que por lo menos tiene un argumento o variable aparente de orden n, y no contiene argumento o variable aparente que no sea una función de primer orden, o una función de segundo orden, o... o una función de orden n.

3) Una función predicativa es la que no tiene variables aparentes; es decir, es una matriz. Es posible, sin detrimento de generalización, no usar variables excepto matrices e individuales, con tal que no requieran *proposiciones* variables.

4) Cualquier función de un argumento (o de dos) es formalmente equivalente a una función predicativa del mismo argumento (o argumentos).

*13. LA IDENTIDAD

Sumario del *13.

La función proposicional "x es idéntica a y" se escribirá "$x = y$". Veremos que el uso del signo de igualdad abarca todos los empleos comunes de la igualdad que se dan en matemáticas. La definición es la siguiente:

***13·01.** $x = y . =: (\phi) : \phi ! x . \supset . \phi ! y$ Df

Esta definición expresa que x e y se llaman idénticas cuando cada función predicativa que la satisface x también la satisface y. No podemos sentar que *cada* función satisfecha por x está también satisfecha por y, porque x satisface funciones de varios órdenes, y no todas éstas se pueden cubrir por una variable aparente. Pero, en virtud del axioma de la reducibilidad, resulta que, si $x = y$ y x satisface a ψx, siendo ψ una función cualquiera, predicativa o no predicativa, entonces y también satisface a ψy (cf. *13·101, más abajo). Por eso, en la práctica, la definición es tan fuerte como lo sería si pudiese extenderse hasta cubrir *todas* las funciones de x.

Obsérvese que el segundo signo de igualdad en la definición anterior está combinado con "Df" y, por lo tanto, no es realmente el mismo símbolo que el signo de igualdad que se definió. Así, pues, la definición no es circular, aunque a primera vista lo parezca.

Las proposiciones de este número se citan de manera continuada. Muchas de ellas son autoevidentes y las pruebas no ofrecen dificultad. Las proposiciones más importantes de este número son las siguientes:

***13·101.** $\vdash : x = y . \supset . \psi x \supset \psi y$

Esto es, si x e y son idénticas, cualquier propiedad de x es propiedad de y.

***13·12.** $\vdash : x = y . \supset . \psi x \equiv \psi y$

Esta incluye la *13·101 juntamente con el hecho de que si x e y son idénticas, cualquier propiedad de y es propiedad de x.

***13·15·16·17**, que establecen que la identidad es reflexiva, simétrica y transitiva.

***13·191.** $\vdash :. y = x . \supset_y . \phi y : \equiv . \phi x$

Esto es, expresar que todo lo que es idéntico a x posee una cierta propiedad es equivalente a manifestar que x tiene esa propiedad.

***13·195.** $\vdash : (\exists y) . y = x . \phi y . \equiv . \phi x$

Esto es, expresar que algo idéntico a x tiene una determinada propiedad es equivalente a decir que x tiene esa propiedad.

***13·22.** $\vdash : (\exists z, w) . z = x . w = y . \phi(z, w) . \equiv . \phi(x, y)$

Esta es la análoga de la *13·195 para dos variables.

***13·01.** $x=y.=:(\phi):\phi!x.\supset.\phi!y$ Df

Las siguientes definiciones incorporan abreviaturas que a menudo son convenientes

***13·02.** $x\neq y.=.\sim(x=y)$ Df

***13·03.** $x=y=z.=.x=y.y=z$ Df

***13·1.** $\vdash:.x=y.\equiv:\phi!x.\supset_{\phi}.\phi!y$ [*4·2.(*13·01).(*10·02)]

***13·101.** $\vdash:x=y.\supset.\psi x\supset\psi y$

Dem.

$\vdash.*12{\cdot}1.\supset\vdash:.(\exists\phi):.\psi x.\equiv.\phi!x:\psi y.\equiv.\phi!y$ (1)

$\vdash.*13{\cdot}1.\supset\vdash::\mathrm{Hp}.\supset:.\phi!x.\supset_{\phi}.\phi!y:.$

[*4·84·85.*10·27] $\supset:.\psi x.\equiv.\phi!x:\psi y.\equiv.\phi!y:\supset_{\phi}:\psi x.\supset.\psi y:.$

[*10·23] $\supset:.(\exists\phi):\psi x.\equiv.\phi!x:\psi y.\equiv.\phi!y:\supset:\psi x.\supset.\psi y$ (2)

$\vdash.(1).(2).\supset\vdash.\mathrm{Prop}$

En virtud de esta proposición, si $x=y$, y satisface a cualquier función, sea predicativa o no predicativa, que es satisfecha por x. Se observará que la prueba usa el axioma de la reducibilidad (*12·1). Pero, por este axioma, dos términos x e y pueden concordar por lo que respecta a todas las funciones *predicativas* pero no por lo que respecta a todas las funciones no-predicativas. De este modo, nos conducirá a identidades de grados diferentes, de acuerdo con el grado de las funciones con respecto a las que x e y concuerdan. En este caso, la identidad estricta tendría que considerarse como una idea primitiva, y la *13·101 debe tomarse como una proposición primitiva, así como también las *13·15·16·17.

***13·11.** $\vdash:.x=y.\equiv:\phi!x.\equiv_{\phi}.\phi!y$

Dem.

$\vdash.*10{\cdot}22.\quad\supset\vdash:.\phi!x.\equiv_{\phi}.\phi!y:\supset:\phi!x.\supset_{\phi}.\phi!y:$

[*13·1] $\supset:x=y$ (1)

$\vdash.*13{\cdot}101.\quad\supset\vdash:.x=y.\supset.\phi!x\supset\phi!y$ (2)

$\vdash.*13{\cdot}101.*1{\cdot}7.\quad\supset\vdash:.x=y.\supset.\sim\phi!x\supset\sim\phi!y.$

[Transp] $\supset.\phi!y\supset\phi!x$ (3)

$\vdash.(2).(3).\mathrm{Comp}.\supset\vdash:x=y.\supset.\phi!x\equiv\phi!y:$

[*10·11·21] $\supset\vdash:.x=y.\supset:\phi!x.\equiv_{\phi}.\phi!y$ (4)

$\vdash.(1).(4).\quad\supset\vdash.\mathrm{Prop}$

***13·12.** $\vdash:x=y.\supset.\psi x\equiv\psi y$

Dem.

$\vdash.*13{\cdot}101.\mathrm{Comp}.\supset\vdash:x=y.\supset.\psi x\supset\psi y.\sim\psi x\supset\sim\psi y.$

[Transp] $\supset.\psi x\equiv\psi y:\supset\vdash.\mathrm{Prop}$

***13·13.** $\vdash:\psi x.x=y.\supset.\psi y$ [*13·101.Comm.Imp]

***13·14.** $\vdash:\psi x.\sim\psi y.\supset.x\neq y$ [*13·13.*4·14]

***13·15.** $\vdash . x = x$ [Id . *10·11 . *13·1]

***13·16.** $\vdash : x = y . \equiv . y = x$ [*13·11 . *10·32]

***13·17.** $\vdash : x = y . y = z . \supset . x = z$

Dem.

$\vdash . *13{\cdot}1 . \supset \vdash :: \mathrm{Hp} . \supset :. \phi ! x . \supset_{\phi} . \phi ! y : \phi ! y . \supset_{\phi} . \phi ! z :.$

[*10·3] $\supset :. \phi ! x . \supset_{\phi} . \phi ! z :: \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

En el empleo anterior de la *10·3, $\phi ! x$, $\phi ! y$, $\phi ! z$ son consideradas como tres funciones diferentes de ϕ, y ϕ sustituye a la x de la *10·3.

Las tres últimas proposiciones muestran que la identidad es reflexiva (*13·15), simétrica (*13·16), y transitiva (*13·17). Estas son las tres características típicas que tienen las propiedades formales que comúnmente asociamos con el signo de igualdad.

***13·171.** $\vdash : x = y . x = z . \supset . y = z$ [*13·16·17]

***13·172.** $\vdash : y = x . z = x . \supset . y = z$ [*13·16·17]

***13·18.** $\vdash : x = y . x \neq z . \supset . y \neq z$ [*13·17 . *4·14]

***13·181.** $\vdash : x = y . y \neq z . \supset . x \neq z$ [*13·171 . *4·14]

***13·182.** $\vdash :. x = y . \supset : z = x . \equiv . z = y$ [*13·17·172 . Exp . Comp]

***13·183.** $\vdash :. x = y . \equiv : z = x . \equiv_z . z = y$

Dem.

$\vdash . *13{\cdot}182 . *10{\cdot}11{\cdot}21 . \supset \vdash :. x = y . \supset : z = x . \equiv_z . z = y$ (1)

$\vdash . *10{\cdot}1 . \quad \supset \vdash :. z = x . \equiv_z . z = y : \supset : x = x . \supset . x = y :$

[*13·15] $\supset : x = y$ (2)

$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***13·19.** $\vdash . (\exists y) . y = x$ [*13·15 . *10·24]

***13·191.** $\vdash :. y = x . \supset_y . \phi y : \equiv . \phi x$

Dem.

$\vdash . *10{\cdot}1 . \quad \supset \vdash :. y = x . \supset_y . \phi y : \supset : x = x . \supset . \phi x :$

[*13·15] $\supset : \phi x$ (1)

$\vdash . *13{\cdot}12 . \supset \vdash :. y = x . \supset : \phi x . \supset . \phi y :.$

[Comm] $\supset \vdash :. \phi x . \supset : y = x . \supset . \phi y :.$

[*10·11·21] $\supset \vdash :. \phi x . \supset : y = x . \supset_y . \phi y$ (2)

$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

Esta proposición se usa constantemente en las pruebas que siguen

***13·192.** $\vdash :. (\exists c) : x = b . \equiv_x . x = c : \psi c : \equiv . \psi b$

Dem.

$\vdash . *4{\cdot}2 . *3{\cdot}2 . \supset \vdash :: \psi b . \supset :. x = b . \equiv_x . x = b : \psi b :.$

[*10·24] $\supset :. (\exists c) : x = b . \equiv_x . x = c : \psi c$ (1)

$\vdash . *10{\cdot}1 . \supset \vdash :. x = b . \equiv_x . x = c : \psi c : \supset : b = b . \equiv . b = c : \psi c :$

[*5·501.*13·15] $\supset : b = c . \psi c :$

[*13·13] $\supset : \psi b$ (2)

$\vdash . (2) . *10{\cdot}11{\cdot}23 . \supset \vdash :. (\exists c) : x = b . \equiv_x . x = c : \psi c : \supset . \psi b$ (3)

$\vdash .(1).(3).\supset \vdash .\text{Prop}$

Esta proporción es útil con la teoría de descripciones (*14).

***13·193.** $\vdash : \phi x . x = y . \equiv . \phi y . x = y$

Dem.

$\vdash .\text{Simp} . \quad \supset \vdash : \phi x . x = y . \supset . x = y$ (1)

$\vdash .*13{\cdot}13 . \quad \supset \vdash : \phi x . x = y . \supset . \phi y$ (2)

$\vdash .(1).(2).\text{Comp} . \supset \vdash : \phi x . x = y . \supset . \phi y . x = y$ (3)

$\vdash .*13{\cdot}16 . \text{Fact} . \quad \supset \vdash : \phi y . x = y . \supset . \phi y . y = x .$

$\left[(3)\frac{y, x}{x, y}\right] \qquad \supset . \phi x . y = x .$

$[*13{\cdot}16.\text{Fact}] \qquad \supset . \phi x . x = y$ (4)

$\vdash .(3).(4). \supset \vdash .\text{Prop}$

Esta proposición se usa muy frecuentemente

***13·194.** $\vdash : \phi x . x = y . \equiv . \phi x . \phi y . x = y$ [*13·13 . *4·71]

Esta proposición se usa en la *37·65 y en la *101·14

***13·195.** $\vdash : (\exists y) . y = x . \phi y . \equiv . \phi x$

Dem.

$\vdash . *3{\cdot}2 . *13{\cdot}15 . \quad \supset \vdash : \phi x . \supset . x = x . \phi x .$

$[*10{\cdot}24] \qquad \supset . (\exists y) . y = x . \phi y$ (1)

$\vdash . *13{\cdot}13 . *10{\cdot}11 . \supset \vdash :. (y) : y = x . \phi y . \supset . \phi x :$

$[*10{\cdot}23] \qquad \supset \vdash :. (\exists y) . y = x . \phi y . \supset . \phi x$ (2)

$\vdash .(1).(2). \qquad \supset \vdash .\text{Prop}$

Es muy frecuente el uso de esta proposición en las pruebas que siguen

***13·196.** $\vdash :. \sim \phi x . \equiv : \phi y . \supset_y . y \neq x$ [*13·195 . Transp . *10·51]

***13·21.** $\vdash :. z = x . w = y . \supset_{z,w} . \phi(z, w) : \equiv . \phi(x, y)$

Dem.

$\vdash . *11{\cdot}62 . \supset$

$\vdash :: z = x . w = y . \supset_{z,w} . \phi(z, w) : \equiv :. z = x . \supset_z : w = y . \supset_w . \phi(z, w) :.$

$[*13{\cdot}191] \qquad \equiv :. w = y . \supset_w . \phi(x, w) :.$

$[*13{\cdot}191] \qquad \equiv :. \phi(x, y) :: \supset \vdash .\text{Prop}$

Esta proposición es la análoga, para dos variables, de la *13·191.

***13·22.** $\vdash : (\exists z, w) . z = x . w = y . \phi(z, w) . \equiv . \phi(x, y)$

Dem.

$\vdash . *11{\cdot}55 . \supset \vdash :. (\exists z, w) . z = x . w = y . \phi(z, w) .$

$\equiv : (\exists z) : z = x : (\exists w) . w = y . \phi(z, w) :$

$[*13{\cdot}195] \qquad \equiv : (\exists w) . w = y . \phi(x, w) :$

$[*13{\cdot}195] \qquad \equiv : \phi(x, y) :. \supset \vdash .\text{Prop}$

Esta proposición es la análoga, para dos variables, de la *13·195. Se usa con frecuencia, especialmente en la teoría de los pares (*54, *55, *56).

La proposición siguiente es útil en la teoría de tipos. Su objeto es mostrar que, si

a es un argumento cualquiera para el que "ϕa" es significante, esto es, para el que tenemos $\phi a \vee \sim \phi a$, entonces "ϕx" es significante cuando, y sólo cuando, x o es idéntico a a o no es idéntico a a.

Resulta (como se probará en la *20·81) que, si "ϕa" y "ψa" son significantes, la clase de los valores de x para los que "ϕx" es significante es la misma que la clase de aquellos para los que "ψx" es significante; es decir, dos tipos que tienen un miembro común son idénticos.

En la prueba siguiente, el punto principal a observar es el uso de la *10·221. Hay dos variables, a y x, a identificar. En el primer uso, dependemos del hecho de que tanto ϕa como $x = a$ ocurran en (4) y en (5): el que ϕa tenga lugar en ambos justifica la identificación de las dos x's (Salvo que las a's hubieran sido ya identificadas, esto no debería ser legítimo, porque "$x = a$" es típicamente ambigua si ocurre que ni la x ni la a son de un tipo dado). El segundo empleo de la *10·221 está justificado por el hecho de que tanto ϕa como ϕx tienen lugar en (2) y en (6).

***13·3.** $\vdash :: \phi a \vee \sim \phi a . \supset :. \phi x \vee \sim \phi x . \equiv : x = a . \vee . x \neq a$

Dem.

$\vdash . *2·11 . \quad \supset \vdash . \phi x \vee \sim \phi x$ (1)

$\vdash . (1) . \text{Simp} . \quad \supset \vdash : \phi a \vee \sim \phi a . \supset . \phi x \vee \sim \phi x$ (2)

$\vdash . *2·11 . \quad \supset \vdash : x = a . \vee . x \neq a$ (3)

$\vdash . (3) . \text{Simp} . \quad \supset \vdash :. \phi a \vee \sim \phi a . \supset : x = a . \vee . x \neq a$ (4)

$\vdash . *13·101 . \text{Comm} . \supset \vdash :. \phi a \vee \sim \phi a . \supset : x = a . \supset . \phi x \vee \sim \phi x$ (5)

$\vdash . (4) . (5) . *10·13·221 . \supset$

$\vdash :: \phi a \vee \sim \phi a . \supset : x = a . \vee . x \neq a :. \phi a \vee \sim \phi a . \supset : x = a . \supset . \phi x \vee \sim \phi x$ (6)

$\vdash . (2) . (6) . *10·13·221 . \supset$

$\vdash :: \phi a \vee \sim \phi a . \supset . \phi x \vee \sim \phi x :. \phi a \vee \sim \phi a . \supset : x = a . \vee . x \neq a :.$

$\phi a \vee \sim \phi a . \supset : x = a . \supset . \phi x \vee \sim \phi x$ (7)

$\vdash . (7) . \text{Simp} . \supset$

$\vdash :: \phi a \vee \sim \phi a . \supset . \phi x \vee \sim \phi x :. \phi a \vee \sim \phi a . \supset : x = a . \vee . x \neq a$ (8)

$\vdash . (8) . *5·35 . \quad \supset \vdash :: \phi a \vee \sim \phi a . \supset :. \phi x \vee \sim \phi x . \equiv : x = a . \vee . x \neq a ::$

$\supset \vdash . \text{Prop}$

*14. LAS DESCRIPCIONES

Sumario del *14.

Una *descripción* es una frase de la forma "el término que, etc.", o, más explícitamente, "el término x que satisface a $\phi\hat{x}$", en donde $\phi\hat{x}$ es una función a la que satisface un y sólo un argumento. Por las razones explicadas en la Introducción (Cap. III), no definimos "la x que satisface a $\phi\hat{x}$", sino que definimos cualquier proposición en la que tiene lugar esta frase. Así, cuando decimos: "El término x que satisface a $\phi\hat{x}$, satisface a $\psi\hat{x}$" entenderemos: "Hay un término b tal que ϕx es verdadero cuando, y sólo cuando, x sea b, y ψb sea verdadero". Esto es, escribiendo "$(\imath x)(\phi x)$" por "el término x que satisface a ϕx", $\psi(\imath x)(\phi x)$ significa

$$(\exists b) : \phi x . \equiv_x . x = b : \psi b.$$

Esto, sin embargo, no es todavía una definición completamente adecuada, pues cuando $(\imath x)(\phi x)$ tenga lugar en una proposición que es parte de una proposición mayor, existe la duda de si es la proposición más pequeña o la mayor la que debe ser considerada como "$\psi(\imath x)(\phi x)$". Tomemos, por ejemplo, $\psi(\imath x)(\phi x) . \supset . p$. Esto puede ser o bien

$$(\exists b) : \phi x . \equiv_x . x = b : \psi b : \supset . p$$

o bien

$$(\exists b) :. \phi x . \equiv_x . x = b : \psi b . \supset . p.$$

Si "$(\exists b) : \phi x . \equiv_x . x = b$" es falso, la primera de éstas debe ser verdadera, mientras que la segunda debe ser falsa. Así, esto es muy necesario para diferenciarlos.

La proposición que se constituye como "$\psi(\imath x)(\phi x)$ se denomina el *alcance* de $(\imath x)(\phi x)$. Así, en la primera de las dos proposiciones anteriores, el alcance de $(\imath x)(\phi x)$ es $\psi(\imath x)(\phi x)$, mientras que en la segunda es $\psi(\imath x)(\phi x) . \supset . p$. A fin de evitar ambigüedades en cuanto al alcance, indicaremos el alcance escribiendo "$[(\imath x)(\phi x)]$" al principio del alcance, seguido del suficiente número de puntos para establecer el final del alcance. De este modo, con referencia a las dos proposiciones últimas, la primera es

$$[(\imath x)(\phi x)] . \psi(\imath x)(\phi x) . \supset . p,$$

mientras que la segunda es

$$[(\imath x)(\phi x)] : \psi(\imath x)(\phi x) . \supset . p.$$

Así, llegamos a la siguiente definición:

***14·01.** $[(\imath x)(\phi x)] . \psi(\imath x)(\phi x) . = : (\exists b) : \phi x . \equiv_x . x = b : \psi b$ Df

En la práctica, nos encontraremos que lo que el alcance generalmente requiere es la menor proposición encerrada entre puntos o entre corchetes en la cual intervenga "$(\imath x)(\phi x)$". Por tanto, cuando este alcance se dé a $(\imath x)(\phi x)$, usualmente omitiremos la mención explícita del alcance. Así, por ejemplo, tenemos

$$a \neq (\imath x)(\phi x) \ .=: \ (\exists b) : \phi x \ . \equiv_x . \ x = b : a \neq b,$$
$$\sim\{a = (\imath x)(\phi x)\} \ . = . \sim\{(\exists b) : \phi x \ . \equiv_x . \ x = b : a = b\}.$$

De éstas, la primera necesariamente implica $(\exists^{\,b}) : \phi x \ . \equiv_x . \ x = b$, mientras la segunda, no. Ponemos

*14·02. $\mathrm{E}\,!\,(\imath x)(\phi x) \ . = : (\exists b) : \phi x \ . \equiv_x . \ x = b$ Df

Esto define: "La x que satisface a $\phi\hat{x}$ existe", lo que es válido cuando, y sólo cuando, $\phi\hat{x}$ se satisface por un sólo valor de x y no por otro valor.

Cuando dos o más descripciones intervienen en la misma proposición, hay necesidad de evitar ambigüedad en cuanto a cual tiene el alcance mayor. Con esta finalidad escribimos

*14·03. $[(\imath x)(\phi x), (\imath x)(\psi x)] \ . f\{(\imath x)(\phi x), (\imath x)(\psi x)\} \ . = :$
$$[(\imath x)(\phi x)] : [(\imath x)(\psi x)] \ . f\{(\imath x)(\phi x), (\imath x)(\psi x)\} \quad \text{Df}$$

Se verá (*14·113) que el valor de verdad de una proposición que contenga dos descripciones no está afectada por la cuestión de cuál tenga el alcance mayor. Por lo tanto, en general, adoptaremos el convenio de que la descripción que tipográficamente aparezca en primer lugar es la que tiene el alcance mayor, salvo que expresamente se indique lo contrario. Así, por ejemplo

$$(\imath x)(\phi x) = (\imath x)(\psi x)$$

significa
$$(\exists b) : \phi x \ . \equiv_x . \ x = b : b = (\imath x)(\psi x),$$

es decir,
$$(\exists b) :. \ \phi x \ . \equiv_x . \ x = b :. (\exists c) : \psi x \ . \equiv_x . \ x = c : b = c.$$

Mediante este convenio seremos capaces casi siempre de evitar la indicación explícita del orden de eliminación de dos o más descripciones. Sin embargo, si necesitamos un alcance mayor para la descripción posterior, escribimos

*14·04. $[(\imath x)(\psi x)] \ . f\{(\imath x)(\phi x), (\imath x)(\psi x)\} \ . =$.
$$[(\imath x)(\psi x), (\imath x)(\phi x)] \ . f\{(\imath x)(\phi x), (\imath x)(\psi x)\} \quad \text{Df}$$

Siempre que tengamos $\mathrm{E}\,!\,(\imath x)(\phi x)$ interviene $(\imath x)(\phi x)$, formalmente, como un argumento ordinario para cualquier función en la cual pueda intervenir. Este hecho se incorpora en la siguiente proposición:

*14·18. $\vdash :. \mathrm{E}\,!\,(\imath x)(\phi x) \ . \supset : (x) \ . \psi x \ . \supset . \ \psi\,(\imath x)(\phi x)$

Es decir, cuando existe $(\imath x)(\phi x)$, ello tiene alguna propiedad que pertenece a todo. Esto no se cumple cuando $(\imath x)(\phi x)$ no existe; por ejemplo, el actual rey de Francia no goza de la propiedad de ser calvo o no calvo.

Si $(\imath x)(\phi x)$ tiene alguna propiedad, cualquiera que sea, debe existir. Este hecho se consigna en la proposición:

*14·21. $\vdash : \psi(\imath x)(\phi x) . \supset . \mathrm{E}!(\imath x)(\phi x)$

Esta proposición es obvia, ya que "$\mathrm{E}!(\imath x)(\phi x)$" es, en virtud de las definiciones, parte de "$\psi(\imath x)(\phi x)$". Cuando, en el lenguaje ordinario o en filosofía, alguna cosa se dice que "existe", siempre es algo *descrito,* es decir, no es algo que se presente de manera inmediata, como un punto o una mancha de color, sino algo como, "materia" o "pensamiento" u "Homero" (significando "el autor de los poemas homéricos"), lo cual se conoce por la descripción como "el tal y tal cosa", y, por tanto, es de la forma $(\imath x)(\phi x)$. De este modo, en todos los casos así, la existencia del sujeto (gramatical) $(\imath x)(\phi x)$ puede inferirse analíticamente de cualquier proposición que tenga este sujeto gramatical. Parecería que la palabra "existencia" no puede aplicarse significativamente a sujetos dados de forma inmediata; esto es, no sólo nuestra definición no da significado a "$\mathrm{E}!\,x$", sino que no hay razón, en filosofía, para suponer que un significado de existencia podría encontrarse que fuese aplicable a sujetos dados inmediatamente.

Además de las anteriores, las que vienen a continuación están entre las proposiciones más útiles de este número.

*14·202. $\vdash :. \phi x . \equiv_x . x = b : \equiv : (\imath x)(\phi x) = b : \equiv : \phi x . \equiv_x . b = x : \equiv : b = (\imath x)(\phi x)$

De la primera equivalencia que figura en esta proposición se sigue que

*14·204. $\vdash : \mathrm{E}!(\imath x)(\phi x) . \equiv . (\exists b) . (\imath x)(\phi x) = b$

Esto es, $(\imath x)(\phi x)$ existe cuando hay algo que sea $(\imath x)(\phi x)$. Tenemos

*14·205. $\vdash : \psi(\imath x)(\phi x) . \equiv . (\exists b) . b = (\imath x)(\phi x) . \psi b$

Es decir, $(\imath x)(\phi x)$ tiene la propiedad ψ cuando hay algo que sea $(\imath x)(\phi x)$ y que tenga la propiedad ψ.

Hemos de probar que símbolos tales como "$(\imath x)(\phi x)$" obedecen a las mismas reglas relativas a la identidad como los símbolos que directamente representan objetos. A esto, sin embargo, hay una excepción parcial, pues en lugar de tener

$$(\imath x)(\phi x) = (\imath x)(\phi x),$$

solamente tenemos

*14·28. $\vdash : \mathrm{E}!(\imath x)(\phi x) . \equiv . (\imath x)(\phi x) = (\imath x)(\phi x)$

Esto es, "$(\imath x)(\phi x)$" sólo satisface la propiedad reflexiva de la identidad si $(\imath x)(\phi x)$ existe.

La propiedad simétrica de la identidad se cumple para símbolos tales como $(\imath x)(\phi x)$, sin necesidad de suponer su existencia; es decir, tenemos

*14·13. $\vdash : a = (\imath x)(\phi x) . \equiv . (\imath x)(\phi x) = a$

*14·131. $\vdash : (\imath x)(\phi x) = (\imath x)(\psi x) . \equiv . (\imath x)(\psi x) = (\imath x)(\phi x)$

Similarmente, la propiedad transitiva de la identidad se cumple sin necesidad de suponer la existencia. Esto se prueba en las *14·14·142·144.

---

*14·01. $[(\imath x)(\phi x)] . \psi(\imath x)(\phi x) . = : (\exists b) : \phi x . \equiv_x . x = b : \psi b$ Df

*14·02. $\mathrm{E}!(\imath x)(\phi x) . = : (\exists b) : \phi x . \equiv_x . x = b$ Df

*14·03. $[(\imath x)(\phi x), (\imath x)(\psi x)] . f\{(\imath x)(\phi x), (\imath x)(\psi x)\} . = :$
$[(\imath x)(\phi x)] : [(\imath x)(\psi x)] . f\{(\imath x)(\phi x), (\imath x)(\psi x)\}$ Df

*14·04. $[(\imath x)(\psi x)] . f\{(\imath x)(\phi x), (\imath x)(\psi x)\} . = .$
$[(\imath x)(\psi x), (\imath x)(\phi x)] . f\{(\imath x)(\phi x), (\imath x)(\psi x)\}$ Df

*14·1. $\vdash :. [(\imath x)(\phi x)] . \psi(\imath x)(\phi x) . \equiv : (\exists b) : \phi x . \equiv_x . x = b : \psi b$
[*4·2 . (*14·01)]

En virtud de nuestros convenios en cuanto al alcance propuesto cuando no se indica explícitamente, la proposición anterior es la misma que la siguiente:

*14·101. $\vdash :. \psi(\imath x)(\phi x) . \equiv : (\exists b) : \phi x . \equiv_x . x = b : \psi b$ [*14·1]

*14·11. $\vdash :. \mathrm{E}!(\imath x)(\phi x) . \equiv : (\exists b) : \phi x . \equiv_x . x = b$ [*4·2 . (*14·02)]

*14·111. $\vdash :. [(\imath x)(\psi x)] . f\{(\imath x)(\phi x), (\imath x)(\psi x)\} . \equiv :$
$(\exists b, c) : \phi x . \equiv_x . x = b : \psi x . \equiv_x . x = c : f(b, c)$

Dem.

$\vdash . *4·2 . (*14·04·03) . \supset$

$\vdash :: [(\imath x)(\psi x)] . f\{(\imath x)(\phi x), (\imath x)(\psi x)\} . \equiv :.$
$[(\imath x)(\psi x)] : [(\imath x)(\phi x)] . f\{(\imath x)(\phi x), (\imath x)(\psi x)\} :.$

[*14·1] $\equiv :. [(\imath x)(\psi x)] :. (\exists b) : \phi x . \equiv_x . x = b : f\{b, (\imath x)(\psi x)\} :.$

[*14·1] $\equiv :. (\exists c) :. \psi x . \equiv_x . x = c :. (\exists b) : \phi x . \equiv_x . x = b : f(b, c) :.$

[*11·55] $\equiv :. (\exists b, c) : \phi x . \equiv_x . x = c : \psi x . \equiv_x . x = b : f(b, c) :: \supset \vdash .$ Prop

*14·112. $\vdash :. f\{(\imath x)(\phi x), (\imath x)(\psi x)\} . \equiv :$
$(\exists b, c) : \phi x . \equiv_x . x = b : \psi x . \equiv_x . x = c : f(b, c)$

[Se prueba como en la *14·11]

En esta proposición, suponemos el convenio explicado en la página 236, después de la expresión de la *14·03.

*14·113. $\vdash : [(\imath x)(\psi x)] . f\{(\imath x)(\phi x), (\imath x)(\psi x)\} . \equiv . f\{(\imath x)(\phi x), (\imath x)(\psi x)\}$
[*14·111·112]

Esta proposición muestra que cuando dos descripciones intervienen en la misma proposición, el valor de verdad de la proposición no queda afectada por la cuestión de cuál tenga el alcance mayor.

*14·12. $\vdash :. \mathrm{E}!(\imath x)(\phi x) . \supset : \phi x . \phi y . \supset_{x,y} . x = y$

Dem.

$\vdash . *14·11 \qquad \supset \vdash :. \mathrm{Hp} . \supset : (\exists b) : \phi x . \equiv_x . x = b$ (1)

$\vdash . *4·38 . *10·1 . *11·11·3 . \supset$

$\vdash :. \phi x . \equiv_x . x = b : \supset : \phi x . \phi y . \equiv_{x,y} . x = b . y = b .$

[*13·172] $\qquad \supset_{x,y} . x = y$ (2)

$\vdash .(2).*10{\cdot}11{\cdot}23. \quad \supset \vdash :. (\exists b) : \phi x . \equiv_x . x = b : \supset : \phi x . \phi y . \supset_{x,y} . x = y$ (3)

$\vdash .(1).(3). \quad \supset \vdash .$ Prop

***14·121.** $\vdash :. \phi x . \equiv_x . x = b : \phi x . \equiv_x . x = c : \supset . b = c$

Dem.

$\vdash .*10{\cdot}1 . \supset \vdash :.$ Hp $. \supset : \phi b . \equiv . b = b : \phi b . \equiv . b = c :$

[*13·15] $\supset : \phi b : \phi b . \equiv . b = c :$

[Ass] $\supset : b = c :. \supset \vdash .$ Prop

***14·122.** $\vdash :. \phi x . \equiv_x . x = b : \equiv : \phi x . \supset_x . x = b : \phi b :$

$\equiv : \phi x . \supset_x . x = b : (\exists x) . \phi x$

Dem.

$\vdash .*10{\cdot}22. \quad \supset \vdash :. \phi x . \equiv_x . x = b : \equiv : \phi x . \supset_x . x = b : x = b . \supset_x . \phi x :$

[*13·191] $\equiv : \phi x . \supset_x . x = b : \phi b$ (1)

$\vdash .*4{\cdot}71. \quad \supset \vdash :. \phi x . \supset . x = b : \supset : \phi x . \equiv . \phi x , x = b :.$

[*10·11·27] $\supset \vdash :. \phi x . \supset_x . x = b : \supset : \phi x . \equiv_x . \phi x . x = b :$

[*10·281] $\supset : (\exists x) . \phi x . \equiv . (\exists x) . \phi x . x = b .$

[*13·195] $\equiv . \phi b$ (2)

$\vdash .(2).*5{\cdot}32 . \supset \vdash :. \phi x . \supset_x . x = b : (\exists x) . \phi x : \equiv : \phi x . \supset_x . x = b : \phi b$ (3)

$\vdash .(1).(3). \quad \supset \vdash .$ Prop

Las dos proposiciones siguientes (*14·123·124) se sitúan aquí por razón de la analogía con la *14·122, pero no se emplearán hasta llegar a la teoría de pares (*55 y *56).

***14·123.** $\vdash :. \phi(z, w) . \equiv_{z,w} . z = x . w = y :$

$\equiv : \phi(z, w) . \supset_{z,w} . z = x . w = y : \phi(x, y) :$

$\equiv : \phi(z, w) . \supset_{z,w} . z = x . w = y : (\exists z, w) . \phi(z, w)$

Dem.

$\vdash .*11{\cdot}31. \quad \supset \vdash :. \phi(z, w) . \equiv_{z,w} . z = x . w = y :$

$\equiv : \phi(z, w) . \supset_{z,w} . z = x . w = y : z = x . w = y . \supset_{z,w} . \phi(z, w) :$

[*13·21] $\equiv : \phi(z, w) . \supset_{z,w} . z = x . w = y : \phi(x, y)$ (1)

$\vdash .*4{\cdot}71. \quad \supset \vdash :. \phi(z, w) . \supset . z = x . w = y :$

$\supset : \phi(z, w) . \equiv . \phi(z, w) . z = x . w = y :.$

[*11·11·32] $\supset \vdash :. \phi(z, w) . \supset_{z,w} . z = x . w = y :$

$\supset : \phi(z, w) . \equiv_{z,w} . \phi(z, w) . z = x . w = y :$

[*11·341] $\supset : (\exists z, w) . \phi(z, w) . \equiv . (\exists z, w) . \phi(z, w) . z = x . w = y .$

[*13·22] $\equiv . \phi(x, y)$ (2)

$\vdash .(2).*5{\cdot}32 . \supset \vdash :. \phi(z, w) . \supset_{z,w} . z = x . w = y : (\exists z, w) . \phi(z, w) :$

$\equiv : \phi(z, w) . \supset_{z,w} . z = x . w = y : \phi(x, y)$ (3)

$\vdash .(1).(3). \quad \supset \vdash .$ Prop

***14·124.** $\vdash :. (\exists x, y) : \phi(z, w) . \equiv_{z,w} . z = x . w = y :$

$\equiv : (\exists x, y) . \phi(x, y) : \phi(z, w) . \phi(u, v) . \supset_{z,w,u,v} . z = u . w = v$

Dem.

$\vdash .*14{\cdot}123 . *3{\cdot}27 . \supset$

$$\vdash :. (\exists x, y) : \phi(z, w) . \equiv_{z,w} . z = x . w = y : \supset . (\exists x, y) . \phi(x, y) \tag{1}$$

$\vdash . *11{\cdot}1 . *3{\cdot}47 . \supset \vdash :. \phi(z, w) . \equiv_{z,w} . z = x . w = y :$

$$\supset : \phi(z, w) . \phi(u, v) . \supset . z = x . w = y . u = x . v = y .$$

[*13·172] $$\supset . z = u . w = v \tag{2}$$

$\vdash . (2) . *11{\cdot}11{\cdot}35 . \supset$

$\vdash :. (\exists x, y) : \phi(z, w) . \equiv_{z,w} . z = x . w = y :$

$$\supset : \phi(z, w) . \phi(u, v) . \supset . z = u . w = v \tag{3}$$

$\vdash . (3) . *11{\cdot}11{\cdot}3 . \supset$

$\vdash :. (\exists x, y) : \phi(z, w) . \equiv_{z,w} . z = x . w = y :$

$$\supset : \phi(z, w) . \phi(u, v) . \supset_{z,w,u,v} . z = u . w = v \tag{4}$$

$\vdash . *11{\cdot}1 . \supset \vdash :. \phi(x, y) : \phi(z, w) . \phi(u, v) . \supset_{z,w,u,v} . z = u . w = v :$

$$\supset : \phi(x, y) : \phi(z, w) . \phi(x, y) . \supset_{z,w} . z = x . w = y :$$

[*5·33] $$\supset : \phi(x, y) : \phi(z, w) . \supset_{z,w} . z = x . w = y :$$

[*14·123] $$\supset : \phi(z, w) . \equiv_{z,w} . z = x . w = y \tag{5}$$

$\vdash . (5) . *11{\cdot}11{\cdot}34{\cdot}45 . \supset$

$\vdash :. (\exists x, y) . \phi(x, y) : \phi(z, w) . \phi(u, v) . \supset_{z,w,u,v} . z = u . w = v :$

$$\supset : (\exists x, y) : \phi(z, w) . \equiv_{z,w} . z = x . w = y \tag{6}$$

$\vdash . (1) . (4) . (6) . \supset \vdash .$ Prop

***14·13.** $\vdash : a = (\imath x)(\phi x) . \equiv . (\imath x)(\phi x) = a$

Dem.

$\vdash . *14{\cdot}1 .$ $\supset \vdash :. a = (\imath x)(\phi x) . \equiv : (\exists b) : \phi x . \equiv_x . x = b : a = b$ (1)

$\vdash . *13{\cdot}16 . *4{\cdot}36 . \supset \vdash :. \phi x . \equiv_x . x = b : a = b : \equiv : \phi x . \equiv_x . x = b : b = a :$

[*10·11·281] $\supset \vdash :. (\exists b) : \phi x . \equiv_x . x = b : a = b :$

$$\equiv : (\exists b) : \phi x . \equiv_x . x = b : b = a :$$

[*14·1] $$\equiv : (\imath x)(\phi x) = a \tag{2}$$

$\vdash . (1) . (2) .$ $\supset \vdash .$ Prop

Esta proposición no es una consecuencia *inmediata* de la *13·16, porque "$a = (\imath x)(\phi x)$" no es un valor de la función "$x = y$". Observaciones semejantes se aplican a las proposiciones que siguen.

***14·131.** $\vdash : (\imath x)(\phi x) = (\imath x)(\psi x) . \equiv . (\imath x)(\psi x) = (\imath x)(\phi x)$

Dem.

$\vdash . *14{\cdot}1 . \supset \vdash :: (\imath x)(\phi x) = (\imath x)(\psi x) . \equiv :. (\exists b) : \phi x . \equiv_x . x = b : b = (\imath x)(\psi x) :.$

[*14·1] $\equiv :. (\exists b) :. \phi x . \equiv_x . x = b :. (\exists c) : \psi x . \equiv_x . x = c : b = c :.$

[*11·6] $\equiv :. (\exists c) :. \psi x . \equiv_x . x = c :. (\exists b) : \phi x . \equiv_x . x = b : b = c :.$

[*14·1] $\equiv :. (\exists c) :. \psi x . \equiv_x . x = c : (\imath x)(\phi x) = c :.$

[*14·13] $\equiv :. (\exists c) :. \psi x . \equiv_x . x = c : c = (\imath x)(\phi x) :.$

[*14·1] $\equiv :. (\imath x)(\psi x) = (\imath x)(\phi x) :: \supset \vdash .$ Prop

En esta proposición, de acuerdo con nuestro convenio, la expresión descriptiva $(\imath x)(\phi x)$ se elimina ante $(\imath x)(\psi x)$ porque se presenta primero en "$(\imath x)(\phi x) = (\imath x)(\psi x)$"; pero en "$(\imath x)(\psi x) = (\imath x)(\phi x)$", es la primera en ser eliminada. El orden de eliminación no repercute en el valor de verdad, como se probó en la *14·113.

La proposición anterior también puede probarse como sigue

$\vdash . *14{\cdot}111 . \supset \vdash :. (\imath x)(\phi x) = (\imath x)(\psi x) .$

$\equiv : (\exists b, c) : \phi x . \equiv_x . x = b : \psi x . \equiv_x . x = c : b = c :$

[*4·3.*13·16.*11·11·341] $\equiv : (\exists b, c) : \psi x . \equiv_x . x = c : \phi x . \equiv_x . x = b : c = b :$

[*11·2.*14·111] $\equiv : (\imath x)(\psi x) = (\imath x)(\phi x) :. \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***14·14.** $\vdash : a = b . b = (\imath x)(\phi x) . \supset . a = (\imath x)(\phi x)$ [*13·13]

***14·142.** $\vdash : a = (\imath x)(\phi x) . (\imath x)(\phi x) = (\imath x)(\psi x) . \supset . a = (\imath x)(\psi x)$

Dem.

$\vdash . *14{\cdot}1 . \supset \vdash :: \mathrm{Hp} . \supset :. (\exists b) : \phi x . \equiv_x . x = b : a = b :.$

$(\exists c) : \phi x . \equiv_x . x = c : c = (\imath x)(\psi x) :.$

[*13·195] $\supset :. \phi x . \equiv_x . x = a :. (\exists c) : \phi x . \equiv_x . x = c : c = (\imath x)(\psi x) :.$

[*10·35] $\supset :. (\exists c) :. \phi x . \equiv_x . x = a : \phi x . \equiv_x . x = c : c = (\imath x)(\psi x) :.$

[*14·121] $\supset :. (\exists c) :. \phi x . \equiv_x . x = a : a = c : c = (\imath x)(\psi x) :.$

[*3·27.*13·195] $\supset :. a = (\imath x)(\psi x) :: \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***14·144.** $\vdash : (\imath x)(\phi x) = (\imath x)(\psi x) . (\imath x)(\psi x) = (\imath x)(\chi x) . \supset . (\imath x)(\phi x) = (\imath x)(\chi x)$

Dem.

$\vdash . *14{\cdot}111 . \supset \vdash :: \mathrm{Hp} . \supset :. (\exists a, b) : \phi x . \equiv_x . x = a : \psi x . \equiv_x . x = b : a = b :.$

$(\exists c, d) : \psi x . \equiv_x . x = c : \chi x . \equiv_x . x = d : c = d :.$

[*13·195] $\supset :. (\exists a) : \phi x . \equiv_x . x = a : \psi x . \equiv_x . x = a :.$

$(\exists c) : \psi x . \equiv_x . x = c : \chi x . \equiv_x . x = c :.$

[*11·54] $\supset :. (\exists a, c) : \phi x . \equiv_x . x = a : \psi x . \equiv_x . x = a :$

$\psi x . \equiv_x . x = c : \chi x . \equiv_x . x = c :.$

[*14·121.*11·42] $\supset :. (\exists a, c) : \phi x . \equiv_x . x = a : \chi x . \equiv_x . x = c : a = c :.$

[*14·111] $\supset :. (\imath x)(\phi x) = (\imath x)(\chi x) :: \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***14·145.** $\vdash : a = (\imath x)(\phi x) . a = (\imath x)(\psi x) . \supset . (\imath x)(\phi x) = (\imath x)(\psi x)$

Dem.

$\vdash . *14{\cdot}1 . \quad \supset \vdash :. a = (\imath x)(\phi x) . \equiv : (\exists b) : \phi x . \equiv_x . x = b : a = b :$

[*13·195] $\equiv : \phi x . \equiv_x . x = a$ (1)

$\vdash . (1) . *14{\cdot}1 . \supset \vdash :: \mathrm{Hp} . \equiv :. \phi x . \equiv_x . x = a :. (\exists b) : \psi x . \equiv_x . x = b : a = b :.$

[*10·35] $\equiv :. (\exists b) :. \phi x . \equiv_x . x = a : \psi x . \equiv_x . x = b : a = b :.$

[*14·111] $\supset :. (\imath x)(\phi x) = (\imath x)(\psi x) :: \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***14·15.** $\vdash :. (\imath x)(\phi x) = b . \supset : \psi \{(\imath x)(\phi x)\} . \equiv . \psi b$

Dem.

$\vdash . *14{\cdot}1 . \supset$

$\vdash :: \mathrm{Hp} . \supset :. (\exists c) : \phi x . \equiv_x . x = c : c = b :.$

[*13·195] $\supset :. \phi x . \equiv_x . x = b$ (1)

$\vdash . (1) . *14{\cdot}1 . \supset$

$\vdash :: \mathrm{Hp} . \supset :. \psi \{(\imath x)(\phi x)\} . \equiv : (\exists c) : x = b . \equiv_x . x = c : \psi c :$

[*13·192] $\equiv : \psi b :: \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***14·16.** $\vdash :. (\imath x)(\phi x) = (\imath x)(\psi x) . \supset : \chi \{(\imath x)(\phi x)\} . \equiv . \chi \{(\imath x)(\psi x)\}$

Dem.

$\vdash . *14{\cdot}1 . \supset \vdash :. \mathrm{Hp} . \supset : (\exists b) : \phi x . \equiv_x . x = b : b = (\imath x)(\psi x)$ (1)

$\vdash . *14{\cdot}1 . \supset \vdash :: \phi x . \equiv_x . x = b : \supset :.$

$\chi\{(\imath x)(\phi x)\} . \equiv : (\exists c) : x = b . \equiv_x . x = c : \chi c :$

[*13·192] $\equiv : \chi b$ (2)

$\vdash . *14{\cdot}13{\cdot}15 . \supset \vdash :. b = (\imath x)(\psi x) . \supset : \chi b . \equiv . \chi\{(\imath x)(\psi x)\}$ (3)

$\vdash . (2) . (3) . \quad \supset \vdash :. \phi x . \equiv_x . x = b : b = (\imath x)(\psi x) :$

$\supset : \chi\{(\imath x)(\phi x)\} . \equiv . \chi\{(\imath x)(\psi x)\}$ (4)

$\vdash . (1) . (4) . *10{\cdot}1{\cdot}23 . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***14·17.** $\vdash :. (\imath x)(\phi x) = b . \equiv : \psi ! (\imath x)(\phi x) . \equiv_\psi . \psi ! b$

Dem.

$\vdash . *14{\cdot}15 . *10{\cdot}11{\cdot}21 . \supset$

$\vdash :. (\imath x)(\phi x) = b . \supset : \psi ! (\imath x)(\phi x) . \equiv_\psi . \psi ! b$ (1)

$\vdash . *10{\cdot}1 . *4{\cdot}22 . \supset \vdash :: \chi ! x . \equiv_x . x = b : \psi ! (\imath x)(\phi x) . \equiv_\psi . \psi ! b :$

$\supset : (\imath x)(\phi x) = b . \equiv . b = b :$

[*13·15] $\supset : (\imath x)(\phi x) = b$ (2)

$\vdash . (2) . \mathrm{Exp} . *10{\cdot}11{\cdot}23 . \supset$

$\vdash :: (\exists \chi) : \chi ! x . \equiv_x . x = b : \supset :. \psi ! (\imath x)(\phi x) . \equiv_\psi . \psi ! b : \supset . (\imath x)(\phi x) = b$ (3)

$\vdash . *12{\cdot}1 . \quad \supset \vdash : (\exists \chi) : \chi ! x . \equiv_x . x = b$ (4)

$\vdash . (3) . (4) . \supset \vdash :. \psi ! (\imath x)(\phi x) . \equiv_\psi . \psi ! b : \supset . (\imath x)(\phi x) = b$ (5)

$\vdash . (1) . (5) . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

Debe observarse que *no* tenemos

$$(\imath x)(\phi x) = b . \equiv : \psi ! (\imath x)(\phi x) . \supset_\psi . \psi ! b$$

porque, si $\sim \mathrm{E} ! (\imath x)(\phi x)$, $\psi ! (\imath x)(\phi x)$ es siempre falso y, por lo tanto,

$$\psi ! (\imath x)(\phi x) . \supset_\psi . \psi ! b$$

es válido para todos los valores de b. Pero tenemos

***14·171.** $\vdash :. (\imath x)(\phi x) = b . \equiv : \psi ! b . \supset_\psi . \psi ! (\imath x)(\phi x)$

Dem.

$\vdash . *14{\cdot}17 . \quad \supset \vdash :. (\imath x)(\phi x) = b . \supset : \psi ! b . \supset_\psi . \psi ! (\imath x)(\phi x)$ (1)

$\vdash . *10{\cdot}1 . *12{\cdot}1 . \supset \vdash :. \psi ! b . \supset_\psi . \psi ! (\imath x)(\phi x) : \supset : b = b . \supset . (\imath x)(\phi x) = b :$

[*13·15] $\supset : (\imath x)(\phi x) = b$ (2)

$\vdash . (1) . (2) . \quad \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***14·18.** $\vdash :. \mathrm{E} ! (\imath x)(\phi x) . \supset : (x) . \psi x . \supset . \psi (\imath x)(\phi x)$

Dem.

$\vdash . *10{\cdot}1 . \quad \supset \vdash : (x) . \psi x . \supset . \psi b :$

[Fact] $\supset \vdash :. \phi x . \equiv_x . x = b : (x) . \psi x : \supset : \phi x . \equiv_x . x = b : \psi b :$

[*10·11·28] $\supset \vdash :. (\exists b) : \phi x . \equiv_x . x = b : (x) . \psi x : \supset : (\exists b) : \phi x . \equiv_x . x = b : \psi b :.$

[*10·35] $\supset \vdash :: (\exists b) : \phi x . \equiv_x . x = b :. (x) . \psi x :. \supset : (\exists b) : \phi x . \equiv_x . x = b : \psi b :.$

[*14·1·11] $\supset \vdash :. \mathrm{E} ! (\imath x)(\phi x) : (x) . \psi x : \supset : \psi (\imath x)(\phi x) :. \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

La última proposición muestra que, siempre que $(\imath x)(\phi x)$ exista, tiene (formalmente hablando) todas las propiedades lógicas de los símbolos que directamente representan objetos. Por lo tanto, cuando $(\imath x)(\phi x)$ existe, el hecho de que sea un símbolo incompleto es irrelevante para los valores de verdad de las proposiciones lógicas en las que intervenga.

***14·2.** $\vdash .(\imath x)(x=a)=a$

Dem.

$\vdash .$ *14·101 $. \supset \vdash :. (\imath x)(x=a)=a . \equiv : (\exists b) : x=a . \equiv_x . x=b : b=a :$

[*13·195] $\equiv : x=a . \equiv_x . x=a$ (1)

$\vdash .(1) .$ Id $. \supset \vdash .$ Prop

***14·201.** $\vdash : \mathrm{E}!(\imath x)(\phi x) . \supset . (\exists x) . \phi x$

Dem.

$\vdash .$ *14·11 $. \supset \vdash :.$ Hp $. \supset : (\exists b) : \phi x . \equiv_x . x=b :$

[*10·1] $\supset : (\exists b) : \phi b . \equiv . b=b :$

[*13·15] $\supset : (\exists b) . \phi b :. \supset \vdash .$ Prop

***14·202.** $\vdash :. \phi x . \equiv_x . x=b : \equiv : (\imath x)(\phi x)=b : \equiv : \phi x . \equiv_x . b=x : \equiv : b=(\imath x)(\phi x)$

Dem.

$\vdash .$ *14·1 $. \supset \vdash :. (\imath x)(\phi x)=b . \equiv : (\exists c) : \phi x . \equiv_x . x=c : c=b :$

[*13·195] $\equiv : \phi x . \equiv_x . x=b :. \supset \vdash .$ Prop

[La segunda mitad se prueba de la misma manera que la primera mitad]

***14·203.** $\vdash :. \mathrm{E}!(\imath x)(\phi x) . \equiv : (\exists x) . \phi x : \phi x . \phi y . \supset_{x,y} . x=y$

Dem.

$\vdash .$ *14·12·201 $. \supset \vdash :. \mathrm{E}!(\imath x)(\phi x) . \supset : (\exists x) . \phi x : \phi x . \phi y . \supset_{x,y} . x=y$ (1)

$\vdash .$ *10·1 $. \supset \vdash :. \phi b : \phi x . \phi y . \supset_{x,y} . x=y : \supset : \phi b : \phi x . \phi b . \supset_x . x=b :$

[*5·33] $\supset : \phi b : \phi x . \supset_x . x=b :$

[*13·191] $\supset : x=b . \supset_x . \phi x :$

$\phi x . \supset_x . x=b :$

[*10·22] $\supset : \phi x . \equiv_x . x=b$ (2)

$\vdash .(2) .$ *10·1·28 $. \supset \vdash :. (\exists b) : \phi b : \phi x . \phi y . \supset_{x,y} . x=y : \supset : (\exists b) : \phi x . \equiv_x . x=b :.$

[*10·35] $\supset \vdash :. (\exists b) . \phi b : \phi x . \phi y . \supset_{x,y} . x=y : \supset : (\exists b) : \phi x . \equiv_x . x=b :$

[*14·11] $\supset : \mathrm{E}!(\imath x)(\phi x)$ (3)

$\vdash .(1) .(3) . \quad \supset \vdash .$ Prop

***14·204.** $\vdash :. \mathrm{E}!(\imath x)(\phi x) . \equiv : (\exists b) . (\imath x)(\phi x)=b$

Dem.

$\vdash .$ *14·202 $. $ *10·11 $. \supset$

$\vdash :. (b) :. \phi x . \equiv_x . x=b : \equiv : (\imath x)(\phi x)=b :. \supset$

[*10·281] $\vdash :. (\exists b) : \phi x . \equiv_x . x=b : \equiv : (\exists b) . (\imath x)(\phi x)=b$ (1)

$\vdash .(1) .$ *14·11 $. \supset \vdash .$ Prop

***14·205.** $\vdash : \psi(\imath x)(\phi x) . \equiv . (\exists b) . b=(\imath x)(\phi x) . \psi b$ [*14·202·1]

***14·21.** $\vdash : \psi(\imath x)(\phi x) . \supset . \mathrm{E}!(\imath x)(\phi x)$

Dem.

$$\vdash . *14{\cdot}1 . \supset$$
$$\vdash :. \psi\{(\iota x)(\phi x)\} . \supset : (\exists b) : \phi x . \equiv_x . x = b : \psi b :$$
$$[*10{\cdot}5] \qquad \supset : (\exists b) : \phi x . \equiv_x . x = b :$$
$$[*14{\cdot}11] \qquad \supset : \mathrm{E}\,!\,(\iota x)(\phi x) :. \supset \vdash . \mathrm{Prop}$$

Esta proposición muestra que si puede establecerse alguna expresión verdadera acerca de $(\iota x)(\phi x)$, entonces $(\iota x)(\phi x)$ debe existir. En lo que resta de esta obra, su empleo será muy frecuente.

Aun cuando $(\iota x)(\phi x)$ no exista, existen a pesar de ello proposiciones verdaderas en las que interviene "$(\iota x)(\phi x)$; pero en tales proposiciones, tiene una presencia *secundaria,* en el sentido explicado en el Capítulo III de la Introducción; esto es, la proposición aseverada a la que nos referimos no es de la forma $\psi(\iota x)(\phi x)$, sino de la forma $f\{\psi(\iota x)(\phi x)\}$, o, dicho de otra manera, la proposición que es el alcance de $(\iota x)(\phi x)$ es sólo parte de la proposición que está aseverada en su totalidad.

***14·22.** $\vdash : \mathrm{E}\,!\,(\iota x)(\phi x) . \equiv . \phi(\iota x)(\phi x)$

Dem.

$$\vdash . *14{\cdot}122 . \quad \supset \vdash :. \phi x . \equiv_x . x = b : \supset . \phi b \qquad (1)$$
$$\vdash . (1) . *4{\cdot}71 . \supset \vdash :. \phi x . \equiv_x . x = b : \equiv : \phi x . \equiv_x . x = b : \phi b :.$$
$$[*10{\cdot}11{\cdot}281] \quad \supset \vdash :. (\exists b) : \phi x . \equiv_x . x = b : \equiv : (\exists b) : \phi x . \equiv_x . x = b : \phi b :.$$
$$[*14{\cdot}11{\cdot}101] \quad \supset \vdash : \mathrm{E}\,!\,(\iota x)(\phi x) . \equiv . \phi(\iota x)(\phi x) : \supset \vdash . \mathrm{Prop}$$

Como un ejemplo de esta proposición, tenemos el siguiente: "La proposición 'el autor de Waverley existió' es equivalente a 'el hombre que escribió Waverley escribió Waverley' ". Una proposición tal como "el hombre que escribió Waverley escribió Waverley" no incorpora una verdad lógicamente necesaria, puesto que sería falsa si el Waverley no se hubiese escrito o si lo hubieran escrito dos personas en colaboración. Por ejemplo, "el hombre que cuadró el círculo cuadró el círculo" es una proposición falsa.

***14·23.** $\vdash : \mathrm{E}\,!\,(\iota x)(\phi x . \psi x) . \equiv . \phi\{(\iota x)(\phi x . \psi x)\}$

Dem.

$$\vdash . *14{\cdot}22 . \supset \vdash :. \mathrm{E}\,!\,(\iota x)(\phi x . \psi x) .$$
$$\equiv : [(\iota x)(\phi x . \psi x)] : \phi\{(\iota x)(\phi x . \psi x)\} . \psi\{(\iota x)(\phi x . \psi x)\}$$
$$[*10{\cdot}5.*3{\cdot}26] \qquad \supset : \phi\{(\iota x)(\phi x . \psi x)\} \qquad (1)$$
$$\vdash . *14{\cdot}21 . \supset \vdash : \phi\{(\iota x)(\phi x . \psi x)\} . \supset . \mathrm{E}\,!\,(\iota x)(\phi x . \psi x) \qquad (2)$$
$$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$$

Obsérvese que en la segunda línea de la última prueba, se necesita la $*10{\cdot}5$ además de la $*3{\cdot}26$. En cuanto al alcance del símbolo descriptivo $(\iota x)(\phi x\ \psi x)$ es el producto total $\phi\{(\iota x)(\phi x . \psi x)\} . \psi\{(\iota x)(\phi x . \psi x)\}$, de forma que, aplicando la $*14{\cdot}1$, la proposición que está a la derecha en la primera línea se convierte en

$$(\exists b) : \phi x . \psi x . \equiv_x . x = b : \phi b . \psi b$$

la cual, por la *10·5 y la *3·26, implica

$$(\exists b) : \phi x . \psi x . \equiv_x . x = b : \phi b,$$

es decir,

$$\phi \{(\imath x)(\phi x . \psi x)\}.$$

***14·24.** $\vdash :. \mathrm{E}!(\imath x)(\phi x) . \equiv : [(\imath x)(\phi x)] : \phi y . \equiv_y . y = (\imath x)(\phi x)$

Dem.

$\vdash . *14·1 . \supset \vdash :. [(\imath x)(\phi x)] : \phi y . \equiv_y . y = (\imath x)(\phi x) :$

$\equiv : (\exists b) : \phi y . \equiv_y . y = b : \phi y . \equiv_y . y = b :$ [*4·24.*10·281]

$\equiv : (\exists b) : \phi y . \equiv_y . y = b :$ [*14·11]

$\equiv : \mathrm{E}!(\imath x)(\phi x) :. \supset \vdash .$ Prop

Esta proposición debe compararse con la *14·241 donde, en virtud del menor alcance de $(\imath x)(\phi x)$, llegamos a una implicación en vez de una equivalencia.

***14·241.** $\vdash :. \mathrm{E}!(\imath x)(\phi x) . \supset : \phi y . \equiv_y . y = (\imath x)(\phi x)$

Dem.

$\vdash . *14·203 . \supset \vdash :: \mathrm{Hp} . \supset :. \phi y . \phi x . \supset . y = x :.$

$\supset :. \phi y . \supset : \phi x . \supset . y = x ::$ [Exp]

$\supset \vdash :: \mathrm{Hp} . \supset :. \phi y . \supset : \phi x . \supset_x . y = x :.$ [*10·11·21]

$\supset :. \phi y . \equiv : \phi y : \phi x . \supset_x . y = x :$ [*4·71]

$\equiv : y = x . \supset_x . \phi x : \phi x . \supset_x . y = x :$ [*13·191]

$\equiv : \phi x . \equiv_x . y = x :$ [*10·22]

$\equiv : y = (\imath x)(\phi x) :: \supset \vdash .$ Prop [*14·202]

***14·242.** $\vdash :. \phi x . \equiv_x . x = b : \supset : \psi b . \equiv . \psi (\imath x)(\phi x)$ [*14·202·15]

***14·25.** $\vdash :. \mathrm{E}!(\imath x)(\phi x) . \supset : \phi x \supset_x \psi x . \equiv . \psi (\imath x)(\phi x)$

Dem.

$\vdash . *4·84 . *10·27·271 . \supset \vdash :: \phi x . \equiv_x . x = b : \supset :. \phi x \supset_x \psi x . \equiv : x = b . \supset_x . \psi x :$

$\equiv : \psi b :$ [*13·191]

$\equiv . \psi (\imath x)(\phi x)$ [*14·242] (1)

$\vdash . (1) . *10·11·23 . \supset \vdash :. (\exists b) : \phi x . \equiv_x . x = b :$

$\supset : \phi x \supset_x \psi x . \equiv . \psi (\imath x)(\phi x)$ (2)

$\vdash . (2) . *14·11 . \quad \supset \vdash .$ Prop

***14·26.** $\vdash :. \mathrm{E}!(\imath x)(\phi x) . \supset : (\exists x) . \phi x . \psi x . \equiv . \psi \{(\imath x)(\phi x)\} . \equiv . \phi x \supset_x \psi x$

Dem.

$\vdash . *14·11 . \supset$

$\vdash :. \mathrm{Hp} . \supset : (\exists b) : \phi x . \equiv_x . x = b$ (1)

$\vdash . *10·311 . \supset \vdash :: \phi x . \equiv_x . x = b : \supset :. \phi x . \psi x . \equiv_x . x = b . \psi x :.$

$\supset :. (\exists x) . \phi x . \psi x . \equiv . (\exists x) . x = b . \psi x .$ [*10·281]

$\equiv . \psi b .$ [*13·195]

$\equiv . \psi \{(\imath x)(\phi x)\}$ [*14·242] (2)

$\vdash . (2) . *10·11·23 . \supset$

$\vdash :. (\exists b) : \phi x . \equiv_x . x = b : \supset : (\exists x) . \phi x . \psi x . \equiv . \psi \{(\imath x)(\phi x)\}$ (3)

$\vdash . (1) . (3) . *14·25 . \supset \vdash .$ Prop

***14·27.** $\vdash :. \mathrm{E}!(\imath x)(\phi x) . \supset : \phi x \equiv_x \psi x . \equiv . (\imath x)(\phi x) = (\imath x)(\psi x)$

Dem.

$\vdash . *4{\cdot}86{\cdot}21 . \quad \supset \vdash :: \phi x . \equiv . x = b : \supset :. \phi x . \equiv . \psi x : \equiv : \psi x . \equiv . x = b$ (1)

$\vdash . (1) . *10{\cdot}11{\cdot}27 . \supset \vdash :: \phi x . \equiv_x . x = b : \supset :. (x) :. \phi x . \equiv . \psi x : \equiv : \psi x . \equiv . x = b :.$

[*10·271] $\supset :. \phi x . \equiv_x . \psi x : \equiv : \psi x . \equiv_x . x = b :$

[*14·202] $\equiv : b = (\imath x)(\psi x) :$

[*14·242] $\equiv : (\imath x)(\phi x) = (\imath x)(\psi x)$ (2)

$\vdash . (2) . *10{\cdot}11{\cdot}23 . *14{\cdot}11 . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***14·271.** $\vdash :. \phi x . \equiv_x . \psi x : \supset : \mathrm{E}!(\imath x)(\phi x) . \equiv . \mathrm{E}!(\imath x)(\psi x)$

Dem.

$\vdash . *4{\cdot}86 . \quad \supset \vdash :: \phi x \equiv \psi x . \supset :. \phi x . \equiv . x = b : \equiv : \psi x . \equiv . x = b ::$

[*10·11·27] $\supset \vdash :: \mathrm{Hp} . \quad \supset :. (x) :. \phi x . \equiv . x = b : \equiv : \psi x . \equiv . x = b :.$

[*10·271] $\supset :. (x) : \phi x . \equiv . x = b : \equiv : (x) : \psi x . \equiv . x = b ::$

[*10·11·21] $\supset \vdash :: \mathrm{Hp} . \quad \supset :. (b) :. \phi x . \equiv_x . x = b : \equiv : \psi x . \equiv_x . x = b :.$

[*10·281] $\supset :. (\exists b) : \phi x . \equiv_x . x = b : \equiv : (\exists b) : \psi x . \equiv_x . x = b ::$

$\supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***14·272.** $\vdash :. \phi x . \equiv_x . \psi x : \supset : \chi(\imath x)(\phi x) . \equiv . \chi(\imath x)(\psi x)$

Dem.

$\vdash . *4{\cdot}86 . \quad \supset \vdash :: \phi x \equiv \psi x . \supset :. \phi x . \equiv . x = b : \equiv : \psi x . \equiv . x = b :.$

[*10·11·414] $\supset \vdash :: \mathrm{Hp} . \quad \supset :. \phi x . \equiv_x . x = b : \equiv : \psi x . \equiv_x . x = b :.$

[Fact] $\supset :. \phi x . \equiv_x . x = b : \chi b : \equiv : \psi x . \equiv_x . x = b : \chi b :.$

[*10·11·21] $\supset \vdash :: \mathrm{Hp} . \quad \supset :. (b) :. \phi x . \equiv_x . x = b : \chi b : \equiv : \psi x . \equiv_x . x = b : \chi b :.$

[*10·281] $\supset :. (\exists b) : \phi x . \equiv_x . x = b : \chi b : \equiv$

$: (\exists b) : \psi x . \equiv_x . x = b : \chi b :.$

[*14·101] $\supset :. \chi(\imath x)(\phi x) . \equiv . \chi(\imath x)(\psi x) :: \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

Las dos últimas proposiciones muestran que $\mathrm{E}!(\imath x)(\phi x)$ y $\chi(\imath x)(\phi x)$ son propiedades "extensionales" de $\phi\hat{x}$; es decir que su valor de verdad no cambia al realizar la sustitución de $\phi\hat{x}$ por cualquier otra función, $\psi\hat{x}$, formalmente equivalente.

***14·28.** $\vdash : \mathrm{E}!(\imath x)(\phi x) . \equiv . (\imath x)(\phi x) = (\imath x)(\phi x)$

Dem.

$\vdash . *13{\cdot}15 . *4{\cdot}73 . \supset \vdash :. \phi x . \equiv_x . x = b : \equiv : \phi x . \equiv_x . x = b : b = b$ (1)

$\vdash . (1) . *10{\cdot}11{\cdot}281 . \supset$

$\vdash :. (\exists b) : \phi x . \equiv_x . x = b : \equiv : (\exists b) : \phi x . \equiv_x . x = b : b = b$ (2)

$\vdash . (2) . *14{\cdot}1{\cdot}11 . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

Esta proposición manifiesta que $(\imath x)(\phi x)$ es idéntica a sí misma siempre que exista, pero no en otro caso. Así, por ejemplo, la proposición "el actual rey de Francia es el actual rey de Francia" es falsa.

El objeto de las proposiciones que vienen a continuación es mostrar que, cuando $\mathrm{E}!(\imath x)(\phi x)$, el alcance de $(\imath x)(\phi x)$ no importa para el valor de verdad de cualquier proposición en donde aparezca $(\imath x)(\phi x)$. Esta proposición no puede probarse de una manera general, pero sí en cada caso particular. Las siguientes proposiciones muestran el método, que siempre se obtiene por medio de las *14·242, *10·23 y

*14·11. La proposición puede probarse de un modo general cuando $(\imath x)(\phi x)$ se presente en la forma $\chi(\imath x)(\phi x)$, y $\chi(\imath x)(\phi x)$ intervenga en lo que podemos llamar una "función de verdad", es decir, una función cuya verdad o falsedad depende sólo de la verdad o falsedad de su argumento o argumentos. Esto abarca todos los casos con los que hemos de encontrarnos. Es decir, si $\chi(\imath x)(\phi x)$ tiene lugar en cualquiera de las vías que pueden originarse por los procedimientos de *1—*11, entonces, supuesto que $\mathrm{E}!(\imath x)(\phi x)$, el valor de verdad de $f\{[(\imath x)(\phi x)]\cdot\chi(\imath x)(\phi x)\}$ es el mismo que el de

$$[(\imath x)(\phi x)]\,.\,f\{\chi(\imath x)(\phi x)\}.$$

Esto se prueba en la siguiente proposición. En esta proposición, sin embargo, el empleo de proposiciones como variables aparentes entraña un aparato que no es preciso en ninguna otra parte y, por lo tanto, no hemos de usar esta proposición en las pruebas que vienen a continuación.

***14·3.** $\vdash :. p \equiv q\,.\supset_{p,q}.\,f(p)\equiv f(q) : \mathrm{E}!(\imath x)(\phi x) :\supset :$
$f\{[(\imath x)(\phi x)]\cdot\chi(\imath x)(\phi x)\}\,.\equiv.\,[(\imath x)(\phi x)]\,.\,f\{\chi(\imath x)(\phi x)\}$

Dem.

$\vdash .$ *14·242 $.\supset$
$\vdash :. \phi x\,.\equiv_x .\,x=b :\supset : [(\imath x)(\phi x)]\,.\,\chi(\imath x)(\phi x)\,.\equiv.\,\chi b$ (1)
$\vdash .(1).\supset\vdash :. p\equiv q\,.\supset_{p,q}.\,f(p)\equiv f(q) : \phi x\,.\equiv_x .\,x=b :\supset :$
$f\{[(\imath x)(\phi x)]\cdot\chi(\imath x)(\phi x)\}\,.\equiv.\,f(\chi b)$ (2)
$\vdash .$ *14·242 $.\supset$
$\vdash :. \phi x\,.\equiv_x .\,x=b :\supset : [(\imath x)(\phi x)]\,.\,f\{\chi(\imath x)(\phi x)\}\,.\equiv.\,f(\chi b)$ (3)
$\vdash .(2).(3).\supset$
$\vdash :. p\equiv q\,.\supset_{p,q}.\,f(p)\equiv f(q) : \phi x\,.\equiv_x .\,x=b :\supset :$
$f\{[(\imath x)(\phi x)]\cdot\chi(\imath x)(\phi x)\}\,.\equiv.\,[(\imath x)(\phi x)]\,.\,f\{\chi(\imath x)(\phi x)\}$ (4)
$\vdash .(4).$ *10·23 $.$ *14·11 $.\supset\vdash .$ Prop

Las proposiciones siguientes son aplicaciones inmediatas de la anterior. No obstante, se prueban independientemente, debido a que la *14·3 introduce proposiciones (a saber, p y q) como variables aparentes —cosa que no hemos hecho en parte alguna— y que no puede hacerse legítimamente sin la introducción explícita de la jerarquía de proposiciones con un axioma de reducibilidad tal como el *12·1.

***14·31.** $\vdash :: \mathrm{E}!(\imath x)(\phi x)\,.\supset :.\,[(\imath x)(\phi x)]\,.\,p\vee\chi(\imath x)(\phi x)\,.$
$\equiv : p\,.\vee.\,[(\imath x)(\phi x)]\,.\,\chi(\imath x)(\phi x)$

Dem.

$\vdash .$ *14·242 $.\supset\vdash :. \phi x\,.\equiv_x .\,x=b :\supset : [(\imath x)(\phi x)].\,p\vee\chi(\imath x)(\phi x).\equiv.\,p\vee\chi b$ (1)
$\vdash .$ *14·242 $.\supset\vdash :. \phi x\,.\equiv_x .\,x=b :\supset : [(\imath x)(\phi x)]\,.\,\chi(\imath x)(\phi x)\,.\equiv.\,\chi b :$
[*4·37] $\supset : p\vee[(\imath x)(\phi x)]\,\chi(\imath x)(\phi x)\,.\equiv.\,p\vee\chi b$ (2)
$\vdash .(1).(2).\supset\vdash :. \phi x\,.\equiv_x .\,x=b :\supset : [(\imath x)(\phi x)]\,.\,p\vee\chi(\imath x)(\phi x)\,.$
$\equiv .\,p\vee[(\imath x)(\phi x)]\,\chi(\imath x)(\phi x)$ (3)
$\vdash .(3).$ *10·23 $.$ *14·11 $.\supset\vdash .$ Prop

Las proposiciones siguientes se prueban precisamente de la misma manera que la

*14·31; por tanto, daremos una mera referencia a las proposiciones usadas en las pruebas.

***14·32.** $\vdash :. \mathrm{E}!(\imath x)(\phi x) . \equiv : [(\imath x)(\phi x)] . \sim \chi(\imath x)(\phi x) .$
$\equiv . \sim \{[(\imath x)(\phi x)] . \chi(\imath x)(\phi x)\}$
[*14·242 . *4·11 . *10·23 . *14·11]

La equivalencia aseverada aquí falla cuando $\sim \mathrm{E}!(\imath x)(\phi x)$. Así, por ejemplo, supongamos que ϕy significa "y es el rey de Francia". Sea χy "y es calvo". Entonces $[(\imath x)(\phi x)] . \sim \chi(\imath x)(\phi x) . = .$ el rey de Francia existe y no es calvo; pero $\sim \{[(\imath x)(\phi x)] . \chi(\imath x)(\phi x)\} . = .$ es falso que el rey de Francia exista y que sea calvo. De estas, la primera es falsa y la segunda verdadera.

Cualquiera de ellas pudo entenderse como "el rey de Francia no es calvo", lo cual es ambiguo; pero lo más natural sería tomar la primera (falsa) interpretación como la significación de las palabras. Si el rey de Francia existió, las dos serían equivalentes; así como aplicada al rey de Inglaterra, ambas son o verdaderas o falsas.

***14·33.** $\vdash :: \mathrm{E}!(\imath x)(\phi x) . \supset :. [(\imath x)(\phi x)] . p \supset \chi(\imath x)(\phi x) .$
$\equiv : p . \supset . [(\imath x)(\phi x)] . \chi(\imath x)(\phi x)$
[*14·242 . *4·85 . *10·23 . *14·11]

***14·331.** $\vdash :: \mathrm{E}!(\imath x)(\phi x) . \supset :. [(\imath x)(\phi x)] . \chi(\imath x)(\phi x) \supset p .$
$\equiv : [(\imath x)(\phi x)] . \chi(\imath x)(\phi x) . \supset . p$
[*4·84 . *14·242 . *10·23 . *14·11]

***14·332.** $\vdash :: \mathrm{E}!(\imath x)(\phi x) . \supset :. [(\imath x)(\phi x)] . p \equiv \chi(\imath x)(\phi x) . \equiv$
$: p . \equiv . [(\imath x)(\phi x)] . \chi(\imath x)(\phi x)$
[*4·86 . *14·242 . *10·23 . *14·11]

***14·34.** $\vdash :. p : [(\imath x)(\phi x)] . \chi(\imath x)(\phi x) : \equiv : [(\imath x)(\phi x)] : p . \chi(\imath x)(\phi x)$

Esta proposición no precisa de la hipótesis $\mathrm{E}!(\imath x)(\phi x)$.

Dem.

$\vdash . *14·1 . \supset$
$\vdash :. p : [(\imath x)(\phi x)] . \chi(\imath x)(\phi x) : \equiv : p : (\exists b) : \phi x . \equiv_x . x = b : \chi b :$
[*10·35] $\equiv : (\exists b) : p : \phi x . \equiv_x . x = b : \chi b :$
[*14·1] $\equiv : [(\imath x)(\phi x)] : p . \chi(\imath x)(\phi x) :. \supset \vdash .$ Prop

Proposiciones del tipo de estas últimas se pueden continuar obteniendo indefinidamente, pero como pueden probarse mediante un mismo esquema, no es necesario ir más allá de los casos fundamentales: $p \vee q$, $\sim p$, $p \supset q$ y $p . q$.

Puede observarse que la proposición en la que $(\imath x)(\phi x)$ tiene el alcance mayor implica siempre una correspondiente en la que tiene el alcance menor, pero la implicación conversa sólo se cumple si: *a*) tenemos $\mathrm{E}!(\imath x)(\phi x)$, o *b*) la proposición en la que $(\imath x)(\phi x)$ tiene el alcance menor implica $\mathrm{E}!(\imath x)(\phi x)$. El segundo caso ocurre en la *14·34, y es la razón por la que encontramos una equivalencia sin la hipótesis $\mathrm{E}!(\imath x)(\phi x)$. La proposición en la que $(\imath x)(\phi x)$ tiene el alcance mayor implica siempre $\mathrm{E}!(\imath x)(\phi x)$, en virtud de la *14·21.

SECCION C

CLASES Y RELACIONES

*20. TEORIA GENERAL DE CLASES

Sumario del *20.

La siguiente teoría de clases, aunque ofrece una notación para representarlas, evita el supuesto de que sean cosas tales como clases. Esto se hace solamente para definir proposiciones en cuyas expresiones intervengan símbolos que representan clases, del mismo modo a como, en el *14, definíamos las proposiciones que contienen descripciones.

Lo característico de una clase es que se compone de todos los términos que satisfacen alguna función proposicional, de forma que cada función proposicional determina una clase, y que dos funciones que son formalmente equivalentes (esto es, tales que cuando una de ellas es verdadera, la otra es también verdadera) determinan la misma clase, a la vez que, a la inversa, dos funciones que determinan la misma clase son formalmente equivalentes. Cuando dos funciones son formalmente equivalentes, diremos que tienen la misma *extensión*. Los símbolos incompletos que sustituyen a las clases, sirven para proporcionar técnicamente algo idéntico, en el caso de dos funciones que tengan la misma extensión; sin que haya algo que represente a las clases, no podemos, por ejemplo, contar las combinaciones que pueden formarse fuera de un conjunto dado de objetos.

Las proposiciones en las que intervenga una función ϕ pueden depender, en cuanto a su valor de verdad, de la función particular ϕ, o sólo de la *extensión* de ϕ. En el primer caso diremos que la proposición se refiere a una función *intensional* de ϕ; en el último caso, a una función *extensional* de ϕ. Así, por ejemplo, $(x) . \phi x$ o $(\exists x) . \phi x$ es una función extensional de ϕ, porque si ϕ es formalmente equivalente a ψ, es decir, si $\phi x . \equiv_x . \psi x$ tenemos $(x) . \phi x . \equiv . (x) . \psi x$ y $(\exists x) . \phi x . \equiv . (\exists x) . \psi x$. Pero, por otra parte, "Yo creo $(x) . \phi x$" es una función *intensional*, porque, aun cuando $\phi x . \equiv_x . \psi x$, no por ello resulta que yo creo $(x) . \psi x$ porque se dé que yo creo $(x) . \phi x$. Lo que caracteriza a una función extensional f de una función $\phi ! \hat{z}$ es

$$\phi ! x . \equiv_x . \psi ! x : \supset_{\phi,\psi} : f(\phi ! \hat{z}) . \equiv . f(\psi ! \hat{z}).$$

(Escribimos "$\phi ! \hat{z}$" cuando deseamos hablar de una función en sí, en cuanto opuesta a su argumento). Las funciones de funciones con las que especialmente se interesa las matemáticas son todas extensionales.

Cuando una función de $\phi ! \hat{z}$ es extensional puede considerarse como perteneciente a la clase determinada por $\phi ! \hat{z}$, ya que su valor de verdad permanece

invariable con tal que no cambie la clase. Por tanto, en teoría de clases, necesitamos un método para obtener una función extensional a partir de cualquier función de función dada. Esto se lleva a efecto mediante la siguiente definición:

$$*20{\cdot}01.\quad f\{\hat{z}(\psi z)\}.=:(\exists\phi):\phi!x.\equiv_x.\psi x:f\{\phi!\hat{z}\}\quad \text{Df}$$

Aquí $f\{\hat{z}(\psi z)\}$ es en realidad una función de $\psi\hat{z}$, la cual está definida siempre que $f\{\phi!\hat{z}\}$ sea significante para funciones predicativas $\phi!\hat{z}$. Pero es conveniente considerar a $f\{\hat{z}(\psi z)\}$ como si tuviese un argumento $\hat{z}(\psi z)$, al que llamaremos "la clase determinada por la función $\phi\hat{z}$". Enseguida se probará que $f\{\hat{z}(\psi z)\}$ es siempre una función *extensional* de $\psi\hat{z}$, y que, aplicando la definición de la identidad (*13·01) a los objetos ficticios $\hat{z}(\phi z)$ y $\hat{z}(\psi z)$, tenemos

$$\hat{z}(\phi z)=\hat{z}(\psi z).\equiv:(x):\phi x.\equiv.\psi x.$$

Esta última es la característica distintiva de las clases, y nos justifica al considerar a $\hat{z}(\psi z)$ como la clase determinada por $\psi\hat{z}$.

En cuanto al alcance de $\hat{z}(\psi z)$ y al orden de eliminación de dos expresiones de este tipo, adoptaremos los mismos convenios que se explicaron en el *14 para $(\imath x)(\phi x)$. La condición correspondiente a

$$\mathrm{E}!(\imath x)(\psi x)\ \text{es}\ (\exists\phi):\phi!x.\equiv_x.\psi x,$$

que siempre está satisfecha en virtud de la *12·1.

Siguiendo a Peano, usaremos la notación

$$x\in\hat{z}(\psi z)$$

para expresar "x es un miembro de la clase determinada por $\psi\hat{z}$". En consecuencia, introducimos la siguiente definición

$$*20{\cdot}02.\quad x\in(\phi!\hat{z}).=.\phi!x\quad \text{Df}$$

En esta forma, la definición no se usa nunca; se introduce sólo en atención a la proposición

$$\vdash:.x\in\hat{z}(\psi z).\equiv:(\exists\phi):\psi y.\equiv_y.\phi!y:\phi!x$$

que resulta de las *20·02 y *20·01, y que nos lleva a

$$\vdash:x\in\hat{z}(\psi z).\equiv.\psi x$$

con la ayuda de la *12·1.

Usaremos letras griegas minúsculas (distintas de: $\epsilon, \iota, \pi, \phi, \psi, \chi, \theta$) para significar clases, es decir, para representar símbolos de la forma $\hat{z}(\phi!z)$ o $\hat{z}(\phi z)$. Cuando una letra griega minúscula se presente como una variable aparente, debe interpretarse como que significa un símbolo de la forma $\hat{z}(\phi!z)$, en donde ϕ es la adecuada variable aparente en cuestión. El empleo de letras aisladas en lugar de símbolos tales como $\hat{z}(\phi z)$ o $\hat{z}(\phi!z)$ es casi prácticamente indispensable, ya que de otra forma la notación enseguida llegaría a ser intolerablemente engorrosa. Así, "$x\in a$" significa "x es un miembro de la clase a", y puede emplearse en donde no se cuestione una definición especial de una función de la clase α.

La siguiente definición aclara lo que se entiende por una *clase.*

*20·03. $\mathrm{Cls} = \hat{\alpha}\,\{(\exists\phi)\,.\,\alpha = \hat{z}\,(\phi\,!\,z)\}$ Df

Nótese que la expresión "$\hat{\alpha}\,\{(\exists\phi)\,.\,\alpha = \hat{z}\,(\phi\,!\,z)\}$" no tiene una significación aislada: hemos definido sencillamente (en la *20·01) ciertos *usos* de tales expresiones. Lo que la definición de arriba decide es que el símbolo "Cls" puede sustituir al símbolo "$\hat{\alpha}\,\{(\exists\phi)\,.\,\alpha = \hat{z}\,(\phi\,!\,z)\}$", dondequiera que se presente en adelante, y que el significado de la combinación de símbolos a que nos hemos referido permanece de este modo invariable. Así, pues, "Cls" tampoco tiene significado aisladamente, sino sólo en ciertos usos.

La última definición, al igual que muchas definiciones que saldrán en el futuro, es ambigua por lo que respecta al tipo. La letra latina z, de acuerdo con nuestros convenios, está para representar el tipo más bajo que interviene; de este modo, ϕ es tipo inmediato superior a éste. Es conveniente hablar de una clase como algo del mismo tipo que su función de definición; así, α es del tipo inmediatamente superior al de z y "Cls" es del tipo siguiente al de α.De esta manera, el tipo de "Cls" está relativamente fijado al tipo más bajo que intervenga; pero si, en dos diferentes contextos, dos tipos diferentes son los más bajos, el significado de "Cls" sólo viene a quedar definido cuando se especifique el tipo más bajo que intervenga.

La igualdad entre clases se define aplicando la *13·01, simbólicamente invariable, a sus funciones de definición, y usando después la *20·01.

Las proposiciones que figuran en este número pueden dividirse en tres conjuntos. Primero, tenemos aquellas que versan acerca de las propiedades fundamentales de las clases; éstas terminan con la *20·43. Después tenemos un conjunto de proposiciones que tratan al mismo tiempo de clases y descripciones; éstas van desde la *20·5 hasta la *20·59 (excepto las *20·53·54). Finalmente, tenemos un conjunto de proposiciones designadas para probar que las clases de clases tienen todas las mismas propiedades formales que las clases de individuales.

En el primer conjunto, las principales proposiciones son las siguientes

*20·15. $\vdash :. \psi x\,.\equiv_x .\,\chi x : \equiv .\,\hat{z}\,(\psi z) = \hat{z}\,(\chi z)$

Esto es, dos clases son idénticas cuando, y sólo cuando, sus funciones de definición son formalmente equivalentes. Esta es la propiedad principal de las clases.

*20·31. $\vdash :. \hat{z}\,(\psi z) = \hat{z}\,(\chi z)\,.\equiv : x \in \hat{z}\,(\psi z)\,.\equiv_x .\, x \in \hat{z}\,(\chi z)$

Es decir, dos clases son idénticas cuando, y sólo cuando, tienen los mismos miembros.

*20·43. $\vdash :. \alpha = \beta\,.\equiv : x \in \alpha\,.\equiv_x .\, x \in \beta$

Esta es la misma proposición que la *20·31, simplemente empleando letras griegas en vez de $\hat{z}\,(\psi z)$ y $\hat{z}\,(\chi z)$.

*20·18. $\vdash :. \hat{z}\,(\phi z) = \hat{z}\,(\psi z)\,.\supset : f\{\hat{z}\,(\phi z)\}\,.\equiv .\, f\{\hat{z}\,(\psi z)\}$

Esto es, si dos clases son idénticas, cualquier propiedad de una de ellas también pertenece a la otra. Esta es la análoga de la *13·12.

*20·2·21·22, que prueban que la identidad entre clases es reflexiva, simétrica y transitiva.

*20·3. $\vdash : x \in \hat{z}(\psi z) . \equiv . \psi x$

Es decir, un término pertenece a una clase cuando, y sólo cuando, satisface a la función de definición de la clase.

En el segundo grupo de proposiciones (*20·5–·59), mostramos que, bajo circunstancias apropiadas, expresiones tales como $(\imath x)(\phi x)$ pueden sustituirse por x en la *20·3 y en otras varias proposiciones del primer grupo; también probamos unas cuantas propiedades de expresiones tales como "$(\imath\alpha)(f\alpha)$", es decir, "la clase que satisface a la función f".

Aquí debe recordarse que "α" significa "$\hat{z}(\phi z)$" y que "$f\alpha$", por lo tanto, significa "$f\{\hat{z}(\phi z)\}$". Esto es, en realidad, una función de $\phi\hat{z}$, a saber, la función extensional asociada con $f(\psi ! \hat{z})$ por medio de la *20·01. Así, pues, una expresión que contenga una clase variable es siempre una abreviatura por una expresión que contenga una función variable.

En el tercer grupo de proposiciones, probamos que las clases variables satisfacen todas las proposiciones primitivas supuestas para los individuales o funciones variables, de donde resulta –por mera repetición de las pruebas del primer conjunto de proposiciones (*20·1–·43)– que las clases de clases tienen todas las propiedades formales de las clases de individuales o de funciones. Nunca tendremos una ocasión para considerar explícitamente clases de funciones; sin embargo, contínuamente se estarán presentando clases de clases –por ejemplo, cada número cardinal se definirá como una clase de clases. Las clases de relaciones, que también aparecerán con frecuencia, se estudiarán en el *21.

---

*20·01. $f\{\hat{z}(\psi z)\} . = : (\exists\phi) : \phi ! x . \equiv_x . \psi x : f\{\phi ! \hat{z}\}$ Df

*20·02. $x \in (\phi ! \hat{z}) . = . \phi ! x$ Df

*20·03. $\mathrm{Cls} = \hat{\alpha}\{(\exists\phi) . \alpha = \hat{z}(\phi ! z)\}$ Df

Las tres definiciones que vienen seguidamente sólo tienen interés para efectos de abreviación.

*20·04. $x, y \in \alpha . = . x \in \alpha . y \in \alpha$ Df

*20·05. $x, y, z \in \alpha . = . x, y \in \alpha . z \in \alpha$ Df

*20·06. $x \sim\in \alpha . = . \sim(x \in \alpha)$ Df

Las siguientes definiciones simplemente llevan a símbolos que representen clases las definiciones que ya se han dado para otros símbolos, con un mínimo de modificaciones.

$*20{\cdot}07.\ (\alpha).f\alpha.=.(\phi).f\{\hat{z}(\phi!z)\}$ Df

$*20{\cdot}071.\ (\exists\alpha).f\alpha.=.(\exists\phi).f\{\hat{z}(\phi!z)\}$ Df

$*20{\cdot}072.\ [(\imath\alpha)(\phi\alpha)].f(\imath\alpha)(\phi\alpha).=:(\exists\gamma):\phi\alpha.\equiv_{\alpha}.\alpha=\gamma:f\gamma$ Df

$*20{\cdot}08.\ f\{\hat{\alpha}(\psi\alpha)\}.=:(\exists\phi):\psi\alpha.\equiv_{\alpha}.\phi!\alpha:f(\phi!\hat{\alpha})$ Df

$*20{\cdot}081.\ \alpha\,\epsilon\,\psi!\hat{\alpha}.=.\psi!\alpha$ Df

Las proposiciones que vienen a continuación ofrecen las propiedades más generales de las clases.

$*20{\cdot}1.\quad \vdash:.f\{\hat{z}(\psi z)\}.\equiv:(\exists\phi):\phi!x.\equiv_{x}.\psi x:f\{\phi!\hat{z}\}\quad[*4{\cdot}2.(*20{\cdot}01)]$

$*20{\cdot}11.\quad \vdash:.\psi x.\equiv_{x}.\chi x:\supset:f\{\hat{z}(\psi z)\}.\equiv.f\{\hat{z}(\chi z)\}$

Dem.

$\vdash.*4{\cdot}86.\supset\vdash::\mathrm{Hp}.\supset:.\phi!x.\equiv_{x}.\psi x:\equiv_{\phi}:\phi!x.\equiv_{x}.\chi x:.$

$[*4{\cdot}36]\qquad \supset:.\phi!x.\equiv_{x}.\psi x:f\{\phi!\hat{z}\}:\equiv_{\phi}:\phi!x.\equiv_{x}.\chi x:f\{\phi!\hat{z}\}:.$

$[*10{\cdot}281]\qquad \supset:.(\exists\phi):\phi!x.\equiv_{x}.\psi x:f\{\phi!\hat{z}\}:$

$\equiv:(\exists\phi):\phi!x.\equiv_{x}.\chi x:f\{\phi!\hat{z}\}:.$

$[*20{\cdot}1]\qquad \supset:.f\{\hat{z}(\psi z)\}.\equiv.f\{\hat{z}(\chi z)\}::\supset\vdash.\mathrm{Prop}$

Esto prueba que cada proposición acerca de una clase expresa una propiedad extensional de la función determinante de la clase y, por lo tanto, no depende para su verdad o falsedad de la función particular elegida para determinar las clases, sino sólo de la extensión de la función determinante.

$*20{\cdot}111.\ \vdash:.f(\phi!\hat{z}).\equiv_{\phi}.g(\phi!\hat{z}):\supset:f\{\hat{z}(\phi!z)\}.\equiv_{\phi}.g\{\hat{z}(\phi!z)\}$

Dem.

$\vdash.\mathrm{Fact}.\quad \supset\vdash::\mathrm{Hp}.\supset:.\phi!x.\equiv_{x}.\psi!x:f(\psi!\hat{z}):\equiv:\phi!x.\equiv_{x}.\psi!x:g(\psi!\hat{z})::$

$[*10{\cdot}11{\cdot}21]\ \supset\vdash::\mathrm{Hp}.\supset:.\phi!x.\equiv_{x}.\psi!x:f(\psi!\hat{z}):\equiv_{\psi}:\phi!x.\equiv_{x}.\psi!x:g(\psi!\hat{z}):.$

$[*10{\cdot}281]\ \supset:.(\exists\psi):\phi!x.\equiv_{x}.\psi!x:f(\psi!\hat{z}):\equiv:(\exists\psi):\phi!x.\equiv_{x}.\psi!x:g(\psi!\hat{z}):.$

$[*20{\cdot}1]\qquad \supset:.f\{\hat{z}(\phi!x)\}.\equiv.g\{\hat{z}(\phi!x)\}\qquad(1)$

$\vdash.(1).*10{\cdot}11{\cdot}21.\supset\vdash.\mathrm{Prop}$

$*20{\cdot}112.\ \vdash:.(\exists g):.f\{\hat{z}(\phi!z)\}.\equiv_{\phi}.g!\{\hat{z}(\phi!z)\}$

Dem.

$\vdash.*12{\cdot}1.\supset\vdash:.(\exists g):f(\phi!\hat{z}).\equiv_{\phi}.g!(\phi!\hat{z})\qquad(1)$

$\vdash.(1).*20{\cdot}111.\supset\vdash.\mathrm{Prop}$

Así, pues, el axioma de la reducibilidad sigue teniendo validez para las clases como argumentos.

$*20{\cdot}12.\quad \vdash:(\exists\phi):\phi!x.\equiv_{x}.\psi x:f\{\hat{z}(\psi z)\}.\equiv.f\{\hat{z}(\phi!z)\}\quad[*20{\cdot}11.*12{\cdot}1]$

$*20{\cdot}13.\quad \vdash:.\psi x.\equiv_{x}.\chi x:\supset.\hat{z}(\psi z)=\hat{z}(\chi z)$

El significado de "$\hat{z}(\psi z)=\hat{z}(\chi z)$" se obtiene por una doble aplicación de la $*20{\cdot}01$ a la $*13{\cdot}01$, teniendo en cuenta el convenio de que $\hat{z}(\psi z)$ tiene un alcance mayor que $\hat{z}(\chi z)$ debido a que aparece primero.

Dem.

$\vdash.*20{\cdot}1.\supset\vdash::\hat{z}(\psi z)=\hat{z}(\chi z).\equiv:.(\exists\phi):\psi x.\equiv_{x}.\phi!x:\phi!\hat{z}=\hat{z}(\chi z):.$

$[*20{\cdot}1] \qquad \equiv :. (\exists \phi, \theta) :. \psi x . \equiv_x . \phi ! x : \chi x . \equiv_x . \theta ! x : \phi ! \hat{z} = \theta ! \hat{z} \qquad (1)$
$\vdash . *12{\cdot}1 . *10{\cdot}321 . \supset$
$\vdash :: \mathrm{Hp} . \supset :. (\exists \phi) : \psi x . \equiv_x . \phi ! x : \chi x . \equiv_x . \phi ! x :.$
$[*13{\cdot}195] \supset :. (\exists \phi, \theta) :. \psi x . \equiv_x . \phi ! x : \chi x . \equiv_x . \theta ! x : \phi ! \hat{z} = \theta ! \hat{z} \qquad (2)$
$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***20·14.** $\vdash :. \hat{z}(\psi z) = \hat{z}(\chi z) . \supset : \psi x . \equiv_x . \chi x$

Dem.

$\vdash . *20{\cdot}1 . \supset \vdash :: \hat{z}(\psi z) = \hat{z}(\chi z) . \equiv :. (\exists \phi) : \psi x . \equiv_x . \phi ! x : \phi ! \hat{z} = \hat{z}(\chi z) :.$
$[*20{\cdot}1] \quad \equiv :. (\exists \phi, \theta) :. \psi x . \equiv_x . \phi ! x : \chi x . \equiv_x . \theta ! x : \phi ! \hat{z} = \theta ! \hat{z} :.$
$[*13{\cdot}195] \quad \equiv :. (\exists \phi) :. \psi x . \equiv_x . \phi ! x : \chi x . \equiv_x . \phi ! x :.$
$[*10{\cdot}322] \quad \supset :. \psi x . \equiv_x . \chi x :: \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

Esta proposición es la conversa de la *20·13.

***20·15.** $\vdash :. \psi x . \equiv_x . \chi x : \equiv . \hat{z}(\psi z) = \hat{z}(\chi z) \quad [*20{\cdot}13{\cdot}14]$

Esta proposición establece que dos funciones determinan la misma clase cuando, y sólo cuando, sean formalmente equivalentes, es decir, se satisfacen por el mismo conjunto de valores. Esta es la propiedad esencial de las clases, y proporciona la justificación de la definición *20·01.

***20·151.** $\vdash . (\exists \phi) . \hat{z}(\psi z) = \hat{z}(\phi ! z)$

Dem.

$\vdash . *20{\cdot}15 . \quad \supset \vdash :. \psi x . \equiv_x . \phi ! x : \supset . \hat{z}(\psi z) = \hat{z}(\phi ! z) :.$
$[*10{\cdot}11{\cdot}28] \quad \supset \vdash :. (\exists \phi) : \psi x . \equiv_x . \phi ! x : \supset . (\exists \phi) . \hat{z}(\psi z) = \hat{z}(\phi ! z) \qquad (1)$
$\vdash . (1) . *12{\cdot}1 . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

En virtud de esta proposición, todas las clases pueden obtenerse de funciones predicativas. Este hecho es especialmente importante cuando las clases se usan como variables aparentes. Pues, en ese caso, de acuerdo con las definiciones *20·07·071, la variable aparente que realmente interviene es una función predicativa. En virtud de la *20·151, estos puntos no suponen limitación sobre las clases, excepto la limitación que inevitablemente resulta de la naturaleza de sus miembros. Una clase, por lo tanto, distintamente a una función, tiene perfectamente determinado su orden por el orden de sus posibles miembros, es decir, de los argumentos que hacen significante su función de definición.

***20·16.** $\vdash : (\exists \phi) : f\{\hat{z}(\psi z)\} . \equiv . f\{\hat{z}(\phi ! z)\} \qquad [*20{\cdot}12]$

***20·17.** $\vdash : (\phi) . f\{\hat{z}(\phi ! z)\} . \supset . f\{\hat{z}(\psi z)\} \qquad [*20{\cdot}16 . *10{\cdot}1]$

***20·18.** $\vdash :. \hat{z}(\phi z) = \hat{z}(\psi z) . \supset : f\{\hat{z}(\phi z)\} . \equiv . f\{\hat{z}(\psi z)\} \quad [*20{\cdot}11{\cdot}15]$

***20·19.** $\vdash :. \hat{z}(\psi z) = \hat{z}(\chi z) . \equiv : (f) : f ! \hat{z}(\psi z) . \supset . f ! \hat{z}(\chi z)$

Dem.

$\vdash . *20{\cdot}18 . *10{\cdot}11{\cdot}21 . \supset \vdash :. \hat{z}(\psi z) = \hat{z}(\chi z) . \supset :$
$(f) : f ! \hat{z}(\psi z) . \supset . f ! \hat{z}(\chi z) \qquad (1)$
$\vdash . *20{\cdot}18{\cdot}15 . \supset \vdash :: \phi ! x . \equiv_x . \psi x : \theta ! x . \equiv_x . \chi x : f ! \hat{z}(\psi z) . \supset . f ! \hat{z}(\chi z) : \supset :$
$f ! \hat{z}(\phi ! z) . \supset . f ! \hat{z}(\theta ! z) \qquad (2)$
$\vdash . (2) . *10{\cdot}11{\cdot}27{\cdot}33 . \supset$

$\vdash :: \phi!x . \equiv_x . \psi x : \theta!x . \equiv_x . \chi x :. (f) : f!\hat{z}(\psi z) . \supset . f!\hat{z}(\chi z) :. \supset :.$
$(f) : f!\hat{z}(\phi!z) . \supset . f!\hat{z}(\theta!z) :.$

[*20·112.*10·1] $\supset :. \phi!x . \equiv_x . \phi!x : \supset : \phi!x . \equiv_x . \theta!x :.$

[*4·2] $\supset :. \phi!x . \equiv_x . \theta!x :.$

[*10·301·32.Hp] $\supset :. \psi x . \equiv_x . \chi x :.$

[*20·15] $\supset :. \hat{z}(\psi z) = \hat{z}(\chi z)$ (3)

$\vdash . (3) . *10·11·23·35 . \supset$

$\vdash :: (\exists \phi, \theta) : \phi!x . \equiv_x . \psi x : \theta!x . \equiv_x . \chi x :. (f) : f!\hat{z}(\psi z) . \supset . f!\hat{z}(\chi z) :.$
$\supset . \hat{z}(\psi z) = \hat{z}(\chi z)$ (4)

$\vdash . (4) . *12·1 . \supset \vdash :. (f) : f!\hat{z}(\psi z) . \supset . f!\hat{z}(\chi z) : \supset . \hat{z}(\psi z) = \hat{z}(\chi z)$ (5)

$\vdash . (1) . (5) . \quad \supset \vdash .$ Prop

***20·191.** $\vdash :. \hat{z}(\psi z) = \hat{z}(\chi z) . \equiv : (f) : f!\hat{z}(\psi z) . \equiv . f!\hat{z}(\chi z)$ [*20·18·19 . *10·22]

***20·2.** $\vdash . \hat{z}(\phi z) = \hat{z}(\phi z)$

Dem.

$\vdash . *20·15 . \supset \vdash :. \hat{z}(\phi z) = \hat{z}(\phi z) . \equiv : \phi x . \equiv_x . \phi x$ (1)

$\vdash . (1) . *4·2 . *10·11 . \supset \vdash .$ Prop

***20·21.** $\vdash : \hat{z}(\phi z) = \hat{z}(\psi z) . \equiv . \hat{z}(\psi z) = \hat{z}(\phi z)$ [*20·15 . *10·32]

***20·22.** $\vdash : \hat{z}(\phi z) = \hat{z}(\psi z) . \hat{z}(\psi z) = \hat{z}(\chi z) . \supset . \hat{z}(\phi z) = \hat{z}(\chi z)$ [*20·15 . *10·301]

Estas proposiciones no son consecuencias *inmediatas* de las *13·15·16·17, por una razón análoga a la explicada en la nota a la *14·13, a saber, porque $f\{\hat{z}(\phi z)\}$ no es una valor de $f\hat{x}$, y, por tanto, en particular "$\hat{z}(\phi z) = \hat{z}(\psi z)$" no es una valor de "$x = y$".

***20·23.** $\vdash : \hat{z}(\phi z) = \hat{z}(\psi z) . \hat{z}(\phi z) = \hat{z}(\chi z) . \supset . \hat{z}(\psi z) = \hat{z}(\chi z)$ [*20·21·22]

***20·24.** $\vdash : \hat{z}(\psi z) = \hat{z}(\phi z) . \hat{z}(\chi z) = \hat{z}(\phi z) . \supset . \hat{z}(\psi z) = \hat{z}(\chi z)$ [*20·21·22]

***20·25.** $\vdash :. \alpha = \hat{z}(\phi z) . \equiv_\alpha . \alpha = \hat{z}(\psi z) : \equiv . \hat{z}(\phi z) = \hat{z}(\psi z)$

Dem.

$\vdash . *10·1 . \quad \supset \vdash :. \alpha = \hat{z}(\phi z) . \equiv_\alpha . \alpha = \hat{z}(\psi z) : \supset :$
$\hat{z}(\phi z) = \hat{z}(\phi z) . \equiv . \hat{z}(\phi z) = \hat{z}(\psi z) :$
[*20·2] $\supset : \hat{z}(\phi z) = \hat{z}(\psi z)$ (1)

$\vdash . *20·22 . \quad \supset \vdash : \alpha = \hat{z}(\phi z) . \hat{z}(\phi z) = \hat{z}(\psi z) . \supset . \alpha = \hat{z}(\psi z) :$

[Exp.Comm] $\supset \vdash :. \hat{z}(\phi z) = \hat{z}(\psi z) . \supset : \alpha = \hat{z}(\phi z) . \supset . \alpha = \hat{z}(\psi z)$ (2)

$\vdash . *20·24 . \quad \supset \vdash :. \hat{z}(\phi z) = \hat{z}(\psi z) . \alpha = \hat{z}(\psi z) . \supset . \alpha = \hat{z}(\phi z) :.$

[Exp] $\supset \vdash :. \hat{z}(\phi z) = \hat{z}(\psi z) . \supset : \alpha = \hat{z}(\psi z) . \supset . \alpha = \hat{z}(\phi z)$ (3)

$\vdash . (2) . (3) . \quad \supset \vdash :. \hat{z}(\phi z) = \hat{z}(\psi z) . \supset : \alpha = \hat{z}(\phi z) . \equiv . \alpha = \hat{z}(\psi z) :.$

[*10·11·21] $\supset \vdash :. \hat{z}(\phi z) = \hat{z}(\psi z) . \supset : \alpha = \hat{z}(\phi z) . \equiv_\alpha . \alpha = \hat{z}(\psi z)$ (4)

$\vdash . (1) . (4) . \quad \supset \vdash .$ Prop

***20·3.** $\vdash : x \in \hat{z}(\psi z) . \equiv . \psi x$

Dem.

$\vdash . *20·1 . \supset$

$\vdash :: x \in \hat{z}(\psi z) . \equiv :. (\exists \phi) :. \psi y . \equiv_y . \phi!y : x \in (\phi!\hat{z}) :.$

$$
\begin{array}{ll}
[(*20{\cdot}02)] & \equiv :. (\exists \phi) :. \psi y \,.\, \equiv_y \,.\, \phi ! y : \phi ! x :. \\
[*10{\cdot}43] & \equiv :. (\exists \phi) :. \psi y \,.\, \equiv_y \,.\, \phi ! y : \psi x :. \\
[*10{\cdot}35] & \equiv :. (\exists \phi) : \psi y \,.\, \equiv_y \,.\, \phi ! y :. \psi x :. \\
[*12{\cdot}1] & \equiv :. \psi x :: \supset \vdash . \text{Prop}
\end{array}
$$

Esta proposición muestra que x es un miembro de la clase determinaa por ψ cuando, y sólo cuando, x satisface a ψ.

***20·31.** $\vdash :. \hat{z}(\psi z) = \hat{z}(\chi z) . \equiv : x \in \hat{z}(\psi z) . \equiv_x . x \in \hat{z}(\chi z)$ [*20·15·3]

***20·32.** $\vdash . \hat{x}\{x \in \hat{z}(\phi z)\} = \hat{z}(\phi z)$ [*20·3·15]

***20·33.** $\vdash :. \alpha = \hat{z}(\phi z) . \equiv : x \in \alpha . \equiv_x . \phi x$

Dem.

$$
\begin{array}{ll}
 & \vdash . *20{\cdot}31 . \quad \supset \vdash :. \alpha = \hat{z}(\phi z) . \equiv : x \in \alpha . \equiv_x . x \in \hat{z}(\phi z) \qquad (1) \\
 & \vdash . (1) . *20{\cdot}3 . \supset \vdash . \text{Prop}
\end{array}
$$

Aquí se escribe α en lugar de una expresión de la forma $\hat{z}(\psi z)$. El uso de la letra griega aislada es más conveniente cuando ocurra que la función determinante esté fuera de lugar

***20·34.** $\vdash :. x = y . \equiv : x \in \alpha . \supset_\alpha . y \in \alpha$

Dem.

$$
\begin{array}{ll}
\vdash . *4{\cdot}2 . (*20{\cdot}07) . \supset \vdash :. x \in \alpha . \supset_\alpha . y \in \alpha : \equiv : x \in \hat{z}(\phi ! z) . \supset_\phi . y \in \hat{z}(\phi ! z) : & \\
[*20{\cdot}3] & \equiv : \phi ! x . \supset_\phi . \phi ! y : \\
[*13{\cdot}1] & \equiv : x = y :. \supset \vdash . \text{Prop}
\end{array}
$$

Esta proposición, así como la *20·25, ilustra el uso de las letras griegas como variables aparentes.

***20·35.** $\vdash :. x = y . \equiv : x \in \alpha . \equiv_\alpha . y \in \alpha$ [*20·3 . *13·11]

***20·4.** $\vdash : \alpha \in \text{Cls} . \equiv . (\exists \phi) . \alpha = \hat{z}(\phi ! z)$ [*20·3 . (*20·03)]

***20·41.** $\vdash . \hat{z}(\psi z) \in \text{Cls}$ [*20·4·151]

***20·42.** $\vdash . \hat{z}(z \in \alpha) = \alpha$

Una letra griega, tal como la α, es sencillamente una abreviatura de una expresión de la forma $\hat{z}(\phi z)$; de este modo, esta proposición es la *20·32 repetida.

Dem.

$$
\begin{array}{ll}
 & \vdash . *20{\cdot}3 . *10{\cdot}11 . \supset \vdash : x \in \hat{z}(\psi z) . \equiv_x . \psi x : \\
[*20{\cdot}15] & \qquad \supset \vdash . \hat{x}\{x \in \hat{z}(\psi z)\} = \hat{x}(\psi x) . \supset \vdash . \text{Prop}
\end{array}
$$

***20·43.** $\vdash :. \alpha = \beta . \equiv : x \in \alpha . \equiv_x . x \in \beta$ [*20·31]

Las siguientes proposiciones versan acerca de los casos en los que intervienen clases y descripciones. En tales casos, adoptaremos –salvo que haya indicación de lo contrario– el convenio de que las descripciones tiene un alcance mayor que las clases, en aplicación de las definiciones *14·01 y *20·01.

***20·5.** $\vdash : (\imath x)(\phi x) \in \hat{z}(\psi z) . \equiv . \psi\{(\imath x)(\phi x)\}$

Dem.

$$\vdash . *14{\cdot}1 . \supset \vdash :: (\imath x)(\phi x) \in \hat{z}(\psi z) . \equiv :. (\exists c) : \phi x . \equiv_x . x = c : c \in \hat{z}(\psi z) :.$$

[*20·3] $\equiv :. (\exists c) : \phi x . \equiv_x . x = c : \psi c :.$

[*14·1] $\equiv :. \psi \{(\iota x)(\phi x)\} :: \supset \vdash .$ Prop

***20·51.** $\vdash :. (\iota x)(\phi x) = b . \equiv : (\iota x)(\phi x) \in \alpha . \equiv_\alpha . b \in \alpha$

Dem.

$\vdash . *20·5·3 . \supset$

$\vdash :. (\iota x)(\phi x) \in \hat{z}(\psi ! z) . \equiv . b \in \hat{z}(\psi ! z) : \equiv : \psi ! (\iota x)(\phi x) . \equiv . \psi ! b :. \supset$

[*10·11] $\vdash :. (\iota x)(\phi x) \in \alpha . \equiv_\alpha . b \in \alpha : \equiv : \psi ! (\iota x)(\phi x) . \equiv_\psi . \psi ! b :$

[*14·17] $\equiv : (\iota x)(\phi x) = b :. \supset \vdash .$ Prop

***20·52.** $\vdash :. \mathrm{E} ! (\iota x)(\phi x) . \equiv : (\exists b) : (\iota x)(\phi x) \in \alpha . \equiv_\alpha . b \in \alpha$

Dem.

$\vdash . *20·51 . *10·11·281 . \supset$

$\vdash :. (\exists b) . (\iota x)(\phi x) = b . \equiv : (\exists b) : (\iota x)(\phi x) \in \alpha . \equiv_\alpha . b \in \alpha$ (1)

$\vdash . (1) . *14·204 . \supset \vdash .$ Prop

***20·53.** $\vdash :. \beta = \alpha . \supset_\beta . \phi\beta : \equiv . \phi\alpha$

Esta es la análoga de la *13·191.

Dem.

$\vdash . *10·1 . \quad \supset \vdash :. \beta = \alpha . \supset_\beta . \phi\beta : \supset : \alpha = \alpha . \supset . \phi\alpha :$

[*20·2] $\supset : \phi\alpha$ (1)

$\vdash . *20·18·21 . \supset \vdash :. \beta = \alpha . \supset : \phi\alpha . \supset . \phi\beta :.$

[Comm] $\supset \vdash :. \phi\alpha . \supset : \beta = \alpha . \supset . \phi\beta :.$

[*10·11·21] $\supset \vdash :. \phi\alpha . \supset : \beta = \alpha . \supset_\beta . \phi\beta$ (2)

$\vdash . (1) . (2) . \quad \supset \vdash .$ Prop

***20·54.** $\vdash : (\exists \beta) . \beta = \alpha . \phi\beta . \equiv . \phi\alpha$

Esta proposición es la análoga de la *13·195.

Dem.

$\vdash . *20·18 . *10·11 . \supset \vdash : \beta = \alpha . \phi\beta . \supset_\beta . \phi\alpha :$

[*10·23] $\supset \vdash : (\exists \beta) . \beta = \alpha . \phi\beta . \supset . \phi\alpha$ (1)

$\vdash . *20·2 . *3·2 . \quad \supset \vdash : \phi\alpha . \supset . \alpha = \alpha . \phi\alpha .$

[*10·24] $\supset . (\exists \beta) . \beta = \alpha . \phi\beta$ (2)

$\vdash . (1) . (2) . \quad \supset \vdash .$ Prop

***20·55.** $\vdash . \hat{z}(\phi z) = (\iota\alpha)(x \in \alpha . \equiv_x . \phi x)$

Dem.

$\vdash . *20·33 . \supset \vdash :: x \in \alpha . \equiv_x . \phi x : \equiv_\alpha . \alpha = \hat{z}(\phi z) :.$

[*20·54] $\supset \vdash :. (\exists \beta) :. x \in \alpha . \equiv_x . \phi x : \equiv_\alpha . \alpha = \beta :. \hat{z}(\phi z) = \beta :.$

[*14·1] $\supset \vdash . \hat{z}(\phi z) = (\iota\alpha)(x \in \alpha . \equiv_x . \phi x) . \supset \vdash .$ Prop

***20·56.** $\vdash . \mathrm{E} ! (\iota\alpha)(x \in \alpha . \equiv_x . \phi x) \quad [*20·55 . *14·21]$

***20·57.** $\vdash :. \hat{z}(\phi z) = (\iota\alpha)(f\alpha) . \supset : g\{\hat{z}(\phi z)\} . \equiv . g\{(\iota\alpha)(f\alpha)\}$

Dem.

$\vdash . *14·1 . \quad \supset \vdash :: \mathrm{Hp} . \equiv :. (\exists \beta) : f\alpha . \equiv_\alpha . \alpha = \beta : \hat{z}(\phi z) = \beta :.$

[*20·54] $\equiv :. f\alpha . \equiv_\alpha . \alpha = \hat{z}(\phi z)$ (1)

$\vdash .*14{\cdot}1 . \quad \supset \vdash :. g\{(\iota\alpha)(f\alpha)\} . \equiv : (\exists\beta) : f\alpha . \equiv_{\alpha} . \alpha = \beta : g\beta$ (2)

$\vdash .(1).(2). \supset \vdash :: \mathrm{Hp} . \supset :. g\{(\iota\alpha)(f\alpha)\} . \equiv : (\exists\beta) : \alpha = \hat{z}(\phi z) . \equiv_{\alpha} . \alpha = \beta : g\beta :$

[*13·183] $\equiv : (\exists\beta) . \hat{z}(\phi z) = \beta . g\beta :$

[*20·54] $\equiv : g\{\hat{z}(\phi z)\} :: \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***20·58.** $\vdash . \hat{z}(\phi z) = (\iota\alpha)\{\alpha = \hat{z}(\phi z)\}$

Dem.

$\vdash .*4{\cdot}2 .*10{\cdot}11 . \supset \vdash : \alpha = \hat{z}(\phi z) . \equiv_{\alpha} . \alpha = \hat{z}(\phi z) :$

[*20·54] $\supset \vdash :. (\exists\beta) :. \alpha = \hat{z}(\phi z) . \equiv_{\alpha} . \alpha = \beta : \hat{z}(\phi z) = \beta :.$

[*14·1] $\supset \vdash . \hat{z}(\phi z) = (\iota\alpha)\{\alpha = \hat{z}(\phi z)\} . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***20·59.** $\vdash : \hat{z}(\phi z) = (\iota\alpha)(f\alpha) . \equiv . (\iota\alpha)(f\alpha) = \hat{z}(\phi z)$

Dem.

$\vdash .*20{\cdot}1 . \supset \vdash :. \hat{z}(\phi z) = (\iota\alpha)(f\alpha) . \equiv : (\exists\psi) : \phi x . \equiv_{x} . \psi ! x : \psi ! \hat{z} = (\iota\alpha)(f\alpha) :$

[*14·13] $\equiv : (\exists\psi) : \phi x . \equiv_{x} . \psi ! x : (\iota\alpha)(f\alpha) = \psi ! \hat{z} :$

[*20·1] $\equiv : (\iota\alpha)(f\alpha) = \hat{z}(\phi z) :. \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

En las proposiciones que siguen probaremos que todas las clases gozan de las propiedades formales de los individuales, y que tienen las mismas relaciones con las clases de clases que tienen los individuales con las clases de individuales. Sólo es necesario probar las análogas de nuestras proposiciones primitivas, así como de nuestras definiciones en aquellos casos en que sus análogas no sean definiciones por sí mismas. Tomaremos las proposicones *10·1·11·12·121·122, mejor que las del *9, y probaremos la análoga de la *10·01. Como se indicó en el *10, podremos, de este modo, probar cuanto dependa de las pruebas subsiguientes. Las análogas de las *20·01·02 y de la *14·01 siguen siendo definiciones, pero las de *10·01 y de *13·01 son proposiciones que han de probarse. La proposición *9·131 debe ampliarse por la definición: Dos clases son "del mismo tipo" cuando tiene funciones de definición predicativas del mismo tipo. Además de esas, hemos de probar las análogas de las *10·1·11·12·121·122, *11·07 y de la *12·1·11. Cuando éstas se hayan probado, las análogas de otras proposiciones resultan por mera repetición de las pruebas anteriores. Estas análogas se citarán, por lo tanto, mediante los números de las proposiciones originales de las que son análogas

***20·6.** $\vdash : (\exists\alpha) . f\alpha . \equiv . \sim\{(\alpha) . \sim f\alpha\}$

Dem.

$\vdash .*4{\cdot}2 . (*20{\cdot}071) . \supset$

$\vdash : (\exists\alpha) . f\alpha . \equiv . (\exists\phi) . f\{\hat{z}(\phi ! z)\} .$

[(*10·01)] $\equiv . \sim[(\phi) . \sim f\{\hat{z}(\phi ! z)\}] .$

[(*20·07)] $\equiv . \sim\{(\alpha) . \sim f\alpha\} : \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

Esta es la análoga de la *10·01

***20·61.** $\vdash : (\alpha) . f\alpha . \supset . f\beta$

Dem.

$\vdash .*10{\cdot}1 . (*20{\cdot}07) . \supset \vdash : (\alpha) . f\alpha . \supset . f\{\hat{z}(\phi ! z)\} : \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

Esta es la análoga de la *10·1.

En la práctica también necesitamos

$$\vdash : (\alpha) . f\alpha . \supset . f\{\hat{z}(\psi z)\}.$$

Esta es la *20·17.

Además necesitaremos $\vdash . (\exists \alpha) . \hat{z}(\psi z) = \alpha.$

Esta es la *20·41.

***20·62.** Cuando $f\beta$ sea verdadero, para cualquier argumento posible de la forma $\hat{z}(\phi ! z)$ que β pueda tener, entonces $(\alpha) . f\alpha$ es verdadero.

Esta es la análoga de la *10·11.

Dem.

$\vdash . *10·11 . \supset .$ cuando $f\{\hat{z}(\phi ! z)\}$ sea verdadero, cualquiera que sea el posible argumento ϕ, entonces $(\phi) . f\{\hat{z}(\phi ! z)\}$ es verdadero; es decir (por la *20·07), $(\alpha) . f\alpha$ es verdadero.

***20·63.** $\vdash :. (\alpha) . p \vee f\alpha . \supset : p . \vee . (\alpha) . f\alpha$

Esta es la análoga de la *10·12.

Dem.

$$\begin{aligned}
&\vdash . *4·2 . (*20·07) . \supset \\
&\vdash :. (\alpha) . p \vee f\alpha . \equiv : (\phi) . p \vee f\{\hat{z}(\phi ! z)\} : \\
&[*10·12] \qquad \equiv : p . \vee . (\phi) . f\{\hat{z}(\phi ! z)\} : \\
&[(*20·07)] \qquad \equiv : p . \vee . (\alpha) . f\alpha :. \supset \vdash . \text{Prop}
\end{aligned}$$

***20·631.** Si "$f\alpha$" es significante, entonces si β es del mismo tipo que α, "$f\beta$" es significante; y viceversa.

Esta es la análoga de la proposición *10·121.

Dem.

Por la *20·151, α es de la forma $\hat{z}(\phi ! z)$, y, por lo tanto, por la *20·01, $f\alpha$ es una función de $\phi ! \hat{z}$. De igual manera, β es de la forma $\hat{z}(\psi ! z)$, y $f\beta$ es una función de $\psi ! \hat{z}$. Por tanto, aplicando la *10·121 a $\phi ! \hat{z}$ y a $\psi ! \hat{z}$ se obtiene el resultado.

***20·632.** Si, para alguna α, existe una proposición $f\alpha$, entonces existe una función $f\hat{\alpha}$, y viceversa.

Dem.

Por la definición *20·01, $f\{\hat{z}(\psi ! z)\}$ es una función de $\psi ! \hat{z}$. Por lo tanto, la proposición resulta de la *10·122.

***20·633.** "Cualquiera que pueda ser la clase posible α, $f(\alpha, \beta)$ es verdadera cualquiera que sea la clase β" implica la expresión correspondiente con α y β intercambiados, excepto en "$f(\alpha, \beta)$".

Esta es la análoga de la de la *11·07, y se sigue al mismo tiempo de la *11·07, porque $f(\alpha, \beta)$ es una función de las funciones de definición de α y de β.

***20·64.** $\vdash :. (\alpha) . f\alpha : (\alpha) . g\alpha : \supset . f\beta . g\beta$

Dem.

$\vdash . *4·2 . (*20·07) . \supset$

$\vdash :. (\alpha) . f\alpha : (\alpha) . g\alpha : \equiv : (\phi) . f\{\hat{z}(\phi ! z)\} : (\phi) . g\{\hat{z}(\phi ! z)\} :$

[*10·14] $\supset : f\{\hat{z}(\psi ! z)\} . g\{\hat{z}(\psi ! z)\} :. \supset \vdash .$ Prop

Obsérvese que "β" es simplemente una abreviatura de cualquier símbolo de la forma $\hat{z}(\psi ! z)$. Esta es la razón por la que no se requiere nada adicional en la prueba anterior.

La última proposición es la análoga de la *10·14. A semejanza de esa proposición, requiere, para la significación de la conclusión, que f y g sean funciones que tomen argumentos del mismo tipo. Esto no se precisa para la significación de la hipótesis. Por tanto, aunque la última proposición es verdadera siempre que tenga significación, no siempre es verdadera cuando su hipótesis sea significante.

***20·7.** $\vdash : (\exists g) : f\alpha . \equiv_{\alpha} . g ! \alpha$ [*20·112]

Esta es la análoga de la *12·1.

***20·701.** $\vdash : (\exists g) : f\{\hat{z}(\phi ! z), x\} . \equiv_{\phi, x} . g ! \{\hat{z}(\phi ! z), x\}$

[La prueba se lleva a cabo como en *20·117, usando la *12·11 en vez de la *12·1.]

***20·702.** $\vdash : (\exists g) : f\{x, \hat{z}(\phi ! z)\} . \equiv_{\phi, x} . g ! \{x, \hat{z}(\phi ! z)\}$

[La prueba es como en la *20·701.]

***20·703.** $\vdash : (\exists g) : f\{\hat{z}(\phi ! z), \hat{z}(\psi ! z)\} . \equiv_{\phi, \psi} . g ! \{\hat{z}(\phi ! z), \hat{z}(\psi ! z)\}$

Dem.

$\vdash . *10·311 . \supset \vdash :. f\{\chi ! \hat{z}, \theta ! \hat{z}\} . \equiv_{\chi, \theta} . g ! \{\chi ! \hat{z}, \theta ! \hat{z}\} : \supset :$

$\phi ! x \equiv_x \chi ! x . \psi ! x \equiv_x \theta ! x . f\{\chi ! \hat{z}, \theta ! \hat{z}\} . \equiv_{\chi, \theta} .$

$\phi ! x \equiv_x \chi ! x . \psi ! x \equiv_x \theta ! x . g ! \{\chi ! \hat{z}, \theta ! \hat{z}\}$ (1)

$\vdash . (1) . *11·11·3·341 . \supset$

$\vdash :. \text{Hp}(1) . \quad \supset : (\exists \chi, \theta) . \phi ! x \equiv_x \chi ! x . \psi ! x \equiv_x \theta ! x . f\{\chi ! \hat{z}, \theta ! \hat{z}\} . \equiv_{\phi, \psi} .$

$(\exists \chi, \theta) . \phi ! x \equiv_x \chi ! x . \psi ! x \equiv_x \theta ! x . g ! \{\chi ! \hat{z}, \theta ! \hat{z}\} :$

[*20·1.*10·35] $\supset : f\{\hat{z}(\phi ! z), \hat{z}(\psi ! z)\} . \equiv_{\phi, \psi} . g ! \{\phi ! \hat{z}, \psi ! \hat{z}\}$ (2)

$\vdash . (2) . *10·11·281 . \supset$

$\vdash :. (\exists g) : f\{\chi ! \hat{z}, \theta ! \hat{z}\} . \equiv_{\chi, \theta} . g ! \{\chi ! \hat{z}, \theta ! \hat{z}\} : \supset :$

$(\exists g) : f\{\hat{z}(\phi ! z), \hat{z}(\psi ! z)\} . \equiv_{\phi, \psi} . g ! \{\hat{z}(\phi ! z), \hat{z}(\psi ! z)\}$ (3)

$\vdash . (3) . *12·11 . \supset \vdash .$ Prop

Las *20·701·702·703 dan lugar a las análogas, para clases, de la *12·11.

***20·71.** $\vdash :. \alpha = \beta . \equiv : g ! \alpha . \supset_g . g ! \beta$ [*20·19]

Esta es la análoga de la *13·01.

Esto completa la prueba de que todas las proposiciones dadas hasta ahora se

aplican tanto a las clases como a los individuales. Precisamente un razonamiento similar extiende este resultado a las clases de clases, a las clases de clases de clases, etc.

A partir de las proposiciones anteriores se pone de manifiesto que, aunque las expresiones del tipo $\hat{z}\,(\phi z)$ no tiene significación aisladamente, sin embargo, aquellas de sus propiedades formales, de las que hasta ahora nos hemos ocupado, son las mismas que las propiedades correspondientes de los símbolos que tienen una significación por sí solos. Por lo tanto, nada del aparato introducido hasta aquí nos exige determinar si un símbolo dado significa una clase o no, a no ser que el símbolo se presente de manera que sólo intervenga significativamente una clase. Este es un resultado importante que nos capacita para proporcionar mucha mayor generalidad a nuestras proposiciones de la que fuese posible de otro modo.

Las dos proposiciones siguientes (*20·8·81) son consecuencias de la *13·3. El "tipo" de cualquier objeto x se definirá en el *63 como la clase de términos que son idénticos a x o no idénticos a x. Podemos definir el "tipo de los argumentos para $\phi\hat{z}$" como la clase de los argumentos x para los que "ϕx" es significante; esto es, la clase $\hat{x}\,(\phi x \vee \sim \phi x)$. Entonces, la primera de las siguientes proposiciones muestra que si "ϕ" es significante, el tipo de los argumentos para "$\phi\hat{z}$ es el tipo de a; la segunda proposición muestra que, si "ϕa" y "ψa" son significantes, el tipo de argumentos para $\phi\hat{z}$ es el mismo que el tipo de los argumentos para $\psi\hat{z}$, porque cada uno es del tipo de a. La *20·8 se usará en la *63·11, que es una proposición fundamental en la teoría de los tipos relativos.

***20·8.** $\vdash : \phi a \vee \sim \phi a \,.\supset.\, \hat{x}\,(\phi x \vee \sim \phi x) = \hat{x}\,(x = a \,.\vee.\, x \neq a)$

Dem.

$\vdash .\, *13{\cdot}3 \,.\, *10{\cdot}11{\cdot}21 \,.\supset$

$\vdash :: \mathrm{Hp} \,.\supset :. \phi x \vee \sim \phi x \,.\equiv_x : x = a \,.\vee.\, x \neq a :.$

$[*20{\cdot}15] \supset :. \hat{x}\,(\phi x \vee \sim \phi x) = \hat{x}\,(x = a \,.\vee.\, x \neq a) :: \supset \vdash .\, \mathrm{Prop}$

***20·81.** $\vdash : \phi a \vee \sim \phi a \,.\, \psi a \vee \sim \psi a \,.\supset.\, \hat{x}\,(\phi x \vee \sim \phi x) = \hat{x}\,(\psi x \vee \sim \psi x)$

Dem.

$\vdash .\, *20{\cdot}8 \,.\supset \vdash : \mathrm{Hp} \,.\supset.\, \hat{x}\,(\phi x \vee \sim \phi x) = \hat{x}\,(x = a \,.\vee.\, x \neq a)$ (1)

$\vdash .\, *20{\cdot}8 \,.\supset \vdash : \mathrm{Hp} \,.\supset.\, \hat{x}\,(\psi x \vee \sim \psi x) = \hat{x}\,(x = a \,.\vee.\, x \neq a)$ (2)

$\vdash .\, (1) \,.\, (2) \,.\, *10{\cdot}121{\cdot}13 \,.\, \mathrm{Comp} \,.\supset$

$\vdash : \mathrm{Hp} \,.\supset.\, \hat{x}\,(\phi x \vee \sim \phi x) = \hat{x}\,(x = a \,.\vee.\, x \neq a) \,.\, \hat{x}\,(\psi x \vee \sim \psi x) = \hat{x}\,(x = a \,.\vee.\, x \neq a) \,.$

$[*20{\cdot}24] \supset .\, \hat{x}\,(\phi x \vee \sim \phi x) = \hat{x}\,(\psi x \vee \sim \psi x) : \supset \vdash .\, \mathrm{Prop}$

En la tercera línea de esta prueba, el uso de la *10·121 depende del hecho de que la "a" tanto en (1) como en (2) debe ser tal que haga significante la hipótesis, esto es, tal que haga significante a

$$"\phi a \vee \sim \phi a \,.\, \psi a \vee \sim \psi a"$$

Por tanto, la "a" en (1) y la "a" en (2) deben ser del mismo tipo, en virtud del *10·121, y por tanto por la *10·13 puede aseverarse el producto de (1) y (2), identificando las dos "a"s".

Puesto que un tipo es el rango de significación de una función, si ϕx es una función que es siempre verdadera, $\hat{z}\,(\phi z)$ debe ser un tipo. Pero si una función es siempre verdadera, los argumentos para los cuales es verdadera son los mismos que los argumentos para los que es significante; por tanto, $\hat{z}\,(\phi z)$ es el rango de significación de ϕx, si $(x)\,.\,\phi x$ es válida. Así, pues cualquier clase α es un tipo si $(x)\,.\,x \in \alpha$. Resulta que, cualquiera que sea la función ϕ, $\hat{x}\,(\phi x \vee \sim \phi x)$ es un tipo; y en particular, $\hat{x}\,(x = a\,.\vee.\,x \neq a)$ es un tipo. Dado que a es un miembro de esta clase, esta clase es el tipo a la que pertenece a. En virtud de la $*20{\cdot}8$, si ϕa es significante, el tipo al que pertenece a es la clase de los argumentos para los que ϕx tiene significado, esto es, $\hat{x}\,(\phi x \vee \sim \phi x)$. Y si hay un argumento a para el que ϕa y ψa son ambos significantes, entonces $\phi\hat{x}$ y $\psi\hat{x}$ tienen el mismo rango de significación, en virtud de la $*20{\cdot}81$.

*21. TEORIA GENERAL DE RELACIONES

Sumario del *21.

Las definiciones y proposiciones de este número son exactamente análogas a las del *20, de las cuales se diferencian por tratar con funciones de dos variables y no de una. Una *relación*, según debemos usar la palabra, se entiende en extensión: debe considerarse como la clase de pares (x, y) con los que cualquier función dada $\psi(x, y)$ es verdadera. Su relación con la función $\psi(\hat{x}, \hat{y})$ es exactamente igual a la de la clase con su función determinante. Proponemos

*21·01. $f\{\hat{x}\hat{y}\,\psi(x, y)\} . = : (\exists\phi) : \phi ! (x, y) . \equiv_{x,y} . \psi(x, y) : f\{\phi ! (\hat{u}, \hat{v})\}$ Df

Aquí, "$\hat{x}\hat{y}\ \psi(x, y)$" aisladamente no tiene significación, aunque sí en algunos de sus usos. En la *21·01, el orden *alfabético* de u y de v corresponde al orden *tipográfico* de $\hat{x}$ y de $\hat{y}$ en $f\{\hat{x}\hat{y}\ \psi(x, y)\}$, de forma que

$$f\{\hat{y}\hat{x}\psi(x, y)\} . = : (\exists\phi) : \phi ! (x, y) . \equiv_{x,y} . \psi(x, y) : f\{\phi ! (\hat{v}, \hat{u})\} \quad \text{Df}$$

Esta es importante en lo que se refiere al convenio de sustitución que viene a continuación.

Se mostrará que

$$\hat{x}\hat{y}\,\psi(x, y) = \hat{x}\hat{y}\,\chi(x, y) . \equiv : \psi(x, y) . \equiv_{x,y} . \chi(x, y),$$

es decir, que dos relaciones, como se definieron antes, son idénticas cuando, y sólo cuando, se satisfacen con los mismos pares de argumentos.

Para la sustitución en $\phi ! (\hat{x}, \hat{y})$ y $\phi ! (\hat{y}, \hat{x})$, adoptamos el convenio de que cuando una función (como opuesta a sus valores) se representa en una forma que entraña a $\hat{x}$ e $\hat{y}$, o a cualesquiera otras dos letras del alfabeto, el valor de esta función para los argumentos a y b debe encontrarse mediante la sustitución de a por $\hat{x}$ y de b por $\hat{y}$, mientras el valor para los argumentos b y a se hallará por la sustitución de b por $\hat{x}$ y de a por $\hat{y}$. Es decir, el argumento que se menciona en primer lugar debe sustituirse por la letra que aparece primero en el alfabeto, y el argumento mencionado en segundo lugar por la letra posterior; así, pues, el modo de sustitución depende del orden *alfabético* de las letras que están bajo el signo circunflejo y del orden *tipográfico* de las otras letras.

Este convenio por lo que respecta al orden se presupone en la siguiente definición, en donde a es el primer argumento que se menciona y b el segundo:

*21·02. $a\{\phi ! (\hat{x}, \hat{y})\} b . = . \phi ! (a, b)$ Df

Por tanto, siguiendo el convenio,

$$b\{\phi ! (\hat{x}, \hat{y})\} a . = . \phi ! (b, a) \quad \text{Df}$$
$$a\{\phi ! (\hat{y}, \hat{x})\} b . = . \phi ! (b, a) \quad \text{Df}$$

$$b\,\{\phi\,!\,(\hat{y},\hat{x})\}\,a\,.=.\,\phi\,!\,(a,b)\quad \text{Df}$$

Esta definición no se usa tal como queda expuesta, sino que se incluye en atención a

$$a\,\{\hat{x}\hat{y}\psi\,(x,y)\}\,b\,.\equiv:(\exists\phi):\phi\,!\,(x,y)\,.\equiv_{x,y}.\,\psi\,(x,y):\phi\,!\,(a,b)$$

que resulta de las *21·01·02. Usaremos letras latinas mayúsculas para representar expresiones variables de la forma $\hat{x}\hat{y}\,\phi\,!\,(x,y)$, del mismo modo como hemos empleado letras griegas para expresiones variables de la forma $\hat{z}\,(\phi\,!\,z)$. Si una letra latina mayúscula, digamos la R, se usa como variable aparente, se supone que la R que interviene en la forma "(R)" o "$(\exists R)$" debe reemplazarse por "(ϕ)" o por "$(\exists\phi)$", mientras que la R que aparece más tarde debe sustituirse por "$\hat{x}\hat{y}\,\phi\,!\,(x,y)$". De hecho, ponemos

$$(R)\,.\,fR\,.=.\,(\phi)\,.\,f\,\{\hat{x}\hat{y}\phi\,!\,(x,y)\}\quad \text{Df.}$$

El empleo de letras únicas para expresiones tales como $\hat{x}\hat{y}\,\phi\,(x,y)$ es una conveniencia indispensable en la práctica.

La siguiente es la definición de la clase de relaciones

***21·03.** $\text{Rel} = \hat{R}\,\{(\exists\phi)\,.\,R=\hat{x}\hat{y}\phi\,!\,(x,y)\}\quad \text{Df}$

Son aplicables a ella observaciones similares a las hechas a la definición de "Cls" (*20·03).

En virtud de las definiciones *21·01·02, y del convenio de las letras latinas mayúsculas, la notación "xRy" significa "x tiene la relación R con y". Esta notación resulta práctica y, tras los preliminares, sustituirá totalmente a la notación engorrosa $x\,\{\hat{x}\hat{y}\,\phi\,(x,y)\}\,y$.

Las pruebas de las proposiciones de este número generalmente se omiten, ya que son exactamente análogas a las del *20, sin más que sustituir la *12·11 por la *12·1, y las proposiciones del *11 por las proposiciones del *10.

Las proposiciones de este número, al igual que las del *20, se encuentran en tres secciones. De las proposiciones de la segunda sección apenas nos ocuparemos. En cuanto a las de la tercera sección, (que extienden a las relaciones las propiedades formales que, hasta ahora, se había supuesto o probado para individuales y funciones), tampoco se hará referencia explícita en lo sucesivo, sino que son constantemente pertinentes; esto es, siempre que una proposición se ha supuesto o ha *sido* probada para individuales y funciones, es aplicable a las relaciones. Las principales proposiciones de esta sección son las que vienen a continuación.

***21·15.** $\vdash:.\,\psi\,(x,y)\,.\equiv_{x,y}.\,\chi\,(x,y):\equiv.\,\hat{x}\hat{y}\psi\,(x,y)=\hat{x}\hat{y}\chi\,(x,y)$

Esto es, dos relaciones son idénticas cuando, y sólo cuando, sus funciones de definición son formalmente equivalentes.

***21·31.** $\vdash:.\,\hat{x}\hat{y}\psi\,(x,y)=\hat{x}\hat{y}\chi\,(x,y)\,.\equiv:x\,\{\hat{x}\hat{y}\psi\,(x,y)\}\,y\,.\equiv_{x,y}.\,x\,\{\hat{x}\hat{y}\chi\,(x,y)\}\,y$

Es decir, dos relaciones son idénticas cuando, y sólo cuando, tienen validez entre los mismos pares de términos. El mismo hecho se expresa por la siguiente proposición:

*21·43. $\vdash :. R = S . \equiv : xRy . \equiv_{x,y} . xSy$

*21·2·21·22. Muestran que la identidad de relaciones es reflexiva, simétrica y transitiva.

*21·3. $\vdash : x\{\hat{x}\hat{y}\psi(x,y)\}\, y . \equiv . \psi(x,y)$

Es decir, dos términos tienen una relación dada cuando, y sólo cuando, satisfacen su función de definición.

*21·151. $\vdash . (\exists\phi) . \hat{x}\hat{y}\psi(x,y) = \hat{x}\hat{y}\phi!(x,y)$

Esto es, cada relación puede definirse por una función predicativa. Por tanto, cuando, al emplear la *21·07 o la *21·071, tenemos una relación como variable aparente y, por ello, están limitadas a funciones de definición predicativas, no existen pérdidas de generalización.

---

*21·01. $f\{\hat{x}\hat{y}\psi(x,y)\} . = : (\exists\phi) : \phi!(x,y) . \equiv_{x,y} . \psi(x,y) : f\{\phi!(\hat{u},\hat{v})\}$ Df

Sobre el convenio que respecto al orden adoptamos en las *21·01·02, cf. p. 263 y, de ese modo, referir $\hat{u}$, $\hat{v}$ a $\hat{x}$, $\hat{y}$, de suerte que

$$f\{\hat{y}\hat{x}\psi(x,y)\} . = : (\exists\phi) : \phi!(x,y) . \equiv_{x,y} . \psi(x,y) : f\{\phi!(\hat{v},\hat{u})\} \quad \text{Df}$$

*21·02. $a\{\phi!(\hat{x},\hat{y})\}\, b . = . \phi!(a,b)$ Df

*21·03. $\mathrm{Rel} = \hat{R}\{(\exists\phi) . R = \hat{x}\hat{y}\phi!(x,y)\}$ Df

Las siguientes definiciones sencillamente extienden a las relaciones, con la menor modificación posible, las definiciones ya dadas para otros símbolos.

*21·07. $(R) . fR . = . (\phi) . f\{\hat{x}\hat{y}\phi!(x,y)\}$ Df

*21·071. $(\exists R) . fR . = . (\exists\phi) . f\{\hat{x}\hat{y}\phi!(x,y)\}$ Df

*21·072. $[(\imath R)(\phi R)] . f(\imath R)(\phi R) . = : (\exists S) : \phi R . \equiv_R . R = S : fS$ Df

*21·08. $f\{\hat{R}\hat{S}\psi(R,S)\} . = : (\exists\phi) : \psi(R,S) . \equiv_{R,S} . \phi!(R,S) : f\{\phi!(\hat{R},\hat{S})\}$ Df

*21·081. $P\{\phi!(\hat{R},\hat{S})\}\, Q . = . \phi!(P,Q)$ Df

Aquí se conserva el convenio adoptado en cuanto a lo tipográfico y alfabético.

*21·082. $f\{\hat{R}(\psi R)\} . = : (\exists\phi) : \psi R . \equiv_R . \phi! R : f(\phi!\hat{R})$ Df

*21·083. $R \in \phi!\hat{R} . = . \phi! R$ Df

*21·1. $\vdash :. f\{\hat{x}\hat{y}\psi(x,y)\} . \equiv : (\exists\phi) : \phi!(x,y) . \equiv_{x,y} . \psi(x,y) : f\{\phi!(\hat{u},\hat{v})\}$
[*4·2 . (*21·01)]

*21·11. $\vdash :. \psi(x,y) . \equiv_{x,y} . \chi(x,y) : \supset : f\{\hat{x}\hat{y}\psi(x,y)\} . \equiv . f\{\hat{x}\hat{y}\chi(x,y)\}$
[*4·86·36 . *10·281 . *21·1]

Esta proposición prueba que cada proposición acerca de una relación expresa una propiedad extensional de la función determinante.

$*21{\cdot}111.\ \vdash :. f\{\phi!(\hat{x},\hat{y})\} . \equiv_{\phi} . g\{\phi!(x,y)\} : \supset : f\{\hat{x}\hat{y}\phi!(x,y)\} . \equiv_{\phi} . g\{\hat{x}\hat{y}\phi!(x,y)\}$
[Fact . $*11{\cdot}11{\cdot}3$. $*10{\cdot}281$. $*21{\cdot}1$]

$*21{\cdot}112.\ \vdash :. (\exists g) :. f\{\hat{x}\hat{y}\phi!(x,y)\} . \equiv_{\phi} . g!\{\hat{x}\hat{y}\phi!(x,y)\}$ [$*12{\cdot}1$. $*21{\cdot}111$]

Es la $*12{\cdot}1$ —no la $*12{\cdot}11$— la que se precisa en esta proposición, porque nos referimos a una función (f) de *una* variable, a saber, ϕ, aunque esa variable única es en sí misma una función de dos variables.

$*21{\cdot}12.\ \vdash :. (\exists\phi) :. \phi!(x,y) . \equiv_{x,y} . \psi(x,y) : f\{\hat{x}\hat{y}\psi(x,y)\} . \equiv . f\{\hat{x}\hat{y}\phi!(x,y)\}$
[$*21{\cdot}11$. $*12{\cdot}11$]

Este es el primer empleo de la proposición primitiva $*12{\cdot}11$, excepto en las $*20{\cdot}701{\cdot}702{\cdot}703$.

$*21{\cdot}13.\ \vdash :. \psi(x,y) . \equiv_{x,y} . \chi(x,y) : \supset . \hat{x}\hat{y}\psi(x,y) = \hat{x}\hat{y}\chi(x,y)$
[$*21{\cdot}1$. $*12{\cdot}11$. $*13{\cdot}195$]

$*21{\cdot}14.\ \vdash :. \hat{x}\hat{y}\psi(x,y) = \hat{x}\hat{y}\chi(x,y) . \supset : \psi(x,y) . \equiv_{x,y} . \chi(x,y)$
[Proof as in $*20{\cdot}14$]

$*21{\cdot}15.\ \vdash :. \psi(x,y) . \equiv_{x,y} . \chi(x,y) : \equiv . \hat{x}\hat{y}\psi(x,y) = \hat{x}\hat{y}\chi(x,y)$ [$*21{\cdot}13{\cdot}14$]

Esta proposición establece que dos funciones dobles determinan la misma relación cuando, y sólo cuando, sean formalmente equivalentes, es decir, cuando se satisfacen con los mismos pares de argumentos. Esta es una propiedad fundamental de las relaciones, como se definió antes ($*21{\cdot}01$).

$*21{\cdot}151.\ \vdash . (\exists\phi) . \hat{x}\hat{y}\psi(x,y) = \hat{x}\hat{y}\phi!(x,y)$ [$*21{\cdot}15$. $*12{\cdot}11$]

$*21{\cdot}16.\ \vdash : (\exists\phi) : f\{\hat{x}\hat{y}\psi(x,y)\} . \equiv . f\{\hat{x}\hat{y}\phi!(x,y)\}$ [$*21{\cdot}12$]

$*21{\cdot}17.\ \vdash : (\phi) . f\{\hat{x}\hat{y}\phi!(x,y)\} . \supset . f\{\hat{x}\hat{y}\psi(x,y)\}$ [$*21{\cdot}16$. $*10{\cdot}1$]

$*21{\cdot}18.\ \vdash :. \hat{x}\hat{y}\phi(x,y) = \hat{x}\hat{y}\psi(x,y) . \supset : f\{\hat{x}\hat{y}\phi(x,y)\} . \equiv . f\{\hat{x}\hat{y}\psi(x,y)\}$
[$*21{\cdot}11{\cdot}15$]

$*21{\cdot}19.\ \vdash :. \hat{x}\hat{y}\psi(x,y) = \hat{x}\hat{y}\chi(x,y) . \equiv : (f) : f!\hat{x}\hat{y}\psi(x,y) . \supset . f!\hat{x}\hat{y}\chi(x,y)$
[$*21{\cdot}18$. $*10{\cdot}11{\cdot}21$. $*21{\cdot}1$. $*10{\cdot}35$. $(*13{\cdot}01)$. $*21{\cdot}112$. $*10{\cdot}301$]

$*21{\cdot}191.\ \vdash :. \hat{x}\hat{y}\psi(x,y) = \hat{x}\hat{y}\chi(x,y) . \equiv : (f) : f!\hat{x}\hat{y}\psi(x,y) . \equiv . f!\hat{x}\hat{y}\chi(x,y)$
[$*21{\cdot}18{\cdot}19$]

$*21{\cdot}2.\ \vdash . \hat{x}\hat{y}\phi(x,y) = \hat{x}\hat{y}\phi(x,y)$ [$*21{\cdot}15$. $*4{\cdot}2$]

$*21{\cdot}21.\ \vdash : \hat{x}\hat{y}\phi(x,y) = \hat{x}\hat{y}\psi(x,y) . \equiv . \hat{x}\hat{y}\psi(x,y) = \hat{x}\hat{y}\phi(x,y)$ [$*21{\cdot}15$. $*10{\cdot}32$]

$*21{\cdot}22.\ \vdash : \hat{x}\hat{y}\phi(x,y) = \hat{x}\hat{y}\psi(x,y) . \hat{x}\hat{y}\psi(x,y) = \hat{x}\hat{y}\chi(x,y) . \supset .$
$\hat{x}\hat{y}\phi(x,y) = \hat{x}\hat{y}\chi(x,y)$ [$*21{\cdot}15$. $*10{\cdot}301$]

$*21{\cdot}23.\ \vdash : \hat{x}\hat{y}\phi(x,y) = \hat{x}\hat{y}\psi(x,y) . \hat{x}\hat{y}\phi(x,y) = \hat{x}\hat{y}\chi(x,y) . \supset .$
$\hat{x}\hat{y}\psi(x,y) = \hat{x}\hat{y}\chi(x,y)$ [$*21{\cdot}21{\cdot}22$]

$*21{\cdot}24.\ \vdash : \hat{x}\hat{y}\psi(x,y) = \hat{x}\hat{y}\phi(x,y) . \hat{x}\hat{y}\chi(x,y) = \hat{x}\hat{y}\phi(x,y) . \supset .$
$\hat{x}\hat{y}\psi(x,y) = \hat{x}\hat{y}\chi(x,y)$ [$*21{\cdot}21{\cdot}22$]

$*21{\cdot}3.\ \vdash : x\{\hat{x}\hat{y}\psi(x,y)\}y . \equiv . \psi(x,y)$ [$*21{\cdot}1{\cdot}02$. $*10{\cdot}43{\cdot}35$. $*12{\cdot}11$]

Esto muestra que x tiene con y la relación determinada por ψ cuando, y sólo cuando, x e y satisfagan a $\psi(x, y)$.

Obsérvese que la proposición primitiva *12·11 se necesita aquí nuevamente.

*21·31. $\vdash :. \hat{x}\hat{y}\,\psi(x,y) = \hat{x}\hat{y}\,\chi(x,y) . \equiv : x\,\{\hat{x}\hat{y}\,\psi(x,y)\}\,y . \equiv_{x,y} . x\,\{\hat{x}\hat{y}\,\chi(x,y)\}\,y$ [*21·15·3].

*21·32. $\vdash . \hat{x}\hat{y}\,[x\,\{\hat{x}\hat{y}\,\phi(x,y)\}\,y] = \hat{x}\hat{y}\,\phi(x,y)$ [*21·3·15]

*21·33. $\vdash :. R = \hat{x}\hat{y}\,\phi(x,y) . \equiv : xRy . \equiv_{x,y} . \phi(x,y)$ [*21·31·3]

Aquí R se escribe en lugar de una expresión de la forma $\hat{x}\hat{y}\ \psi(x,y)$. El uso de una letra mayúscula única para una relación es conveniente siempre que la función determinante sea irrelevante.

*21·4. $\vdash : R \in \mathrm{Rel} . \equiv . (\exists\phi) . R = \hat{x}\hat{y}\,\phi\,!\,(x,y)$ [*20·3 . (*21·03)]

*21·41. $\vdash . \hat{x}\hat{y}\,\phi(x,y) \in \mathrm{Rel}$ [*21·4·151]

*21·42. $\vdash . \hat{x}\hat{y}\,(xRy) = R$ [*21·3·15]

*21·43. $\vdash :. R = S . \equiv : xRy . \equiv_{x,y} . xSy$ [*21·15·3]

*20·5·51·52. Estas proposiciones no tienen análogas en la teoría de relaciones.

*21·53. $\vdash :. S = R . \supset_S . \phi S : \equiv . \phi R$ [*10·1 . *21·2·18·21 . Comm . *10·11·21]

*21·54. $\vdash :. (\exists S) . S = R . \phi S . \equiv . \phi R$ [*21·18 . *10·11·23 . *21·2 . *10·24]

*21·55. $\vdash . \hat{x}\hat{y}\,\phi(x,y) = (\imath R)\,\{xRy . \equiv_{x,y} . \phi(x,y)\}$ [*21·33·54 . *14·1]

*21·56. $\vdash . \mathrm{E}\,!\,(\imath R)\,\{xRy . \equiv_{x,y} . \phi(x,y)\}$ [*21·55 . *14·21]

*21·57. $\vdash :. \hat{x}\hat{y}\,\phi(x,y) = (\imath R)\,(fR) . \supset : g\,\{\hat{x}\hat{y}\,\phi(x,y)\} . \equiv . g\,\{(\imath R)\,(fR)\}$ [*14·1 . *21·54 . *13·183]

*21·58. $\vdash : \hat{x}\hat{y}\,\phi(x,y) = (\imath R)\,\{R = \hat{x}\hat{y}\,\phi(x,y)\}$ [*4·2 . *10·11 . *21·54 . *14·1]

Las siguientes proposiciones son las análogas de las *20·6 ss., y tienen un objeto similar.

*21·6. $\vdash : (\exists R) . fR . \equiv . \sim\{(R) . \sim fR\}$ [Se prueba como en la *20·6]

*21·61. $\vdash : (R) . fR . \supset . fS$ [Se prueba como en la *20·61]

*21·62. Cuando fR es verdadera, cualquier posible argumento de la forma $\hat{x}\hat{y}\ \phi\,!\,(x,y)$ que R pueda tener, $(R) . fR$ es verdadera. [Se prueba como en la *20·62]

*21·63. $\vdash :. (R) . p \vee fR . \supset : p . \vee . (R) . fR$ [Se prueba como en la *20·63]

*21·631. Si "fR" es significante, entonces si S es del mismo tipo que R, "fS" es significante, y viceversa. [Se prueba como en la *20·631]

*21·632. Si, para cualquier R, hay una proposición fR, entonces hay una función $f\hat{R}$, y viceversa. [Se prueba como en la *20·632]

*21·633. "Cualquiera que sea la relación R, $f(R, S)$ es verdadera, cualquiera que sea la posible relación S" implica que "cualquiera que pueda ser la posible relación S, $f(R, S)$ es verdadera cualquiera que pueda ser la posible relación R". [Se prueba como en la *20·633]

*21·64. $\vdash :. (R) . fR : (R) . gR : \supset . fS . gS$ [Se prueba como en la *20·64]

*21·7. $\vdash : (\exists g) : fR . \equiv_R . g\,!\,R$ [Se prueba como en la *20·7]

$*21{\cdot}701 \quad \vdash : (\exists g) : f(R, x) . \equiv_{R,x} . g!(R, x)$ [Se prueba como en la *20·701]
$*21{\cdot}702 \quad \vdash : (\exists g) : f(x, R) . \equiv_{R,x} . g!(R, x)$ [Se prueba como en la *20·702]
$*21{\cdot}703 \quad \vdash : (\exists g) : f(R, S) . \equiv_{R,S} . g!(R, S)$ [Se prueba como en la *20·703]
$*21{\cdot}704 \quad \vdash : (\exists g) : f(R, \alpha) . \equiv_{R,\alpha} . g!(R, \alpha)$ [Se prueba como en la *20·703]
$*21{\cdot}705 \quad \vdash : (\exists g) : f(\alpha, R) . \equiv_{\alpha,R} . g!(\alpha, R)$ [Se prueba como en la *20·703]
$*21{\cdot}71 \quad \vdash :. R = S . \equiv : g!R . \supset_g . g!S$ [Se prueba como en la *20·71]

Por estas últimas proposiciones se aprecia que las relaciones, al igual que las clases, tienen todas las propiedades formales que tendrían si fuesen símbolos que tuvieran un significado aisladamente. Por tanto, salvo que un símbolo se presente de tal manera que sólo puede ocurrir significativamente una relación, no necesitamos decidir si representa a una relación o no. Este resultado, al igual que el resultado correspondiente para las clases, mencionado al final del *20, es importante puesto que ofrece a nuestras proposiciones una generalización mayor de la que tendrían de otra manera. Los resultados obtenidos en los *20 y *21 para clases y relaciones cuyos miembros o términos no son ni clases ni relaciones pueden extenderse, por simple repetición de las pruebas, a clases de clases, clases de relaciones, relaciones de clases, relaciones de relaciones, y así sucesivamente.

*22. CALCULO DE CLASES

Sumario del *22.

En este número llegamos a lo que históricamente fue el punto de arranque de la lógica simbólica. Las letras griegas usadas (excepto ϕ, ψ, χ, θ) representan siempre expresiones de la forma $\hat{x}(\phi ! x)$ o, donde las letras griegas no sean variables aparentes, de la forma $\hat{x}(\phi x)$. Las letras latinas minúsculas o bien pueden tener un significado aisladamente, o bien pueden representar clases o relaciones; esto es posible en virtud de las notas que hay al final de los *20 y *21. Presentamos

*22·01. $\alpha \subset \beta . = : x \in \alpha . \supset_x . x \in \beta$ Df

Esta define "la clase α está contenida en la clase β", o "todas las α's son β's".

*22·02. $\alpha \cap \beta = \hat{x}(x \in \alpha . x \in \beta)$ Df

Esta define el producto lógico o parte común de las dos clases α y β.

*22·03. $\alpha \cup \beta = \hat{x}(x \in \alpha . \vee . x \in \beta)$ Df

Esta define la suma lógica de dos clases; es la clase que está constituida por todos los miembros de una juntamente con todos los miembros de la otra.

*22·04. $-\alpha = \hat{x}(x \sim \in \alpha)$ Df

Esta define la negación de una clase. Se lee "no-α". No es que contenga algún objeto x respecto del cual "$x \in \alpha$" resulta *no verdadero,* sino que sólo contiene aquellos objetos respecto a los que "$x \in \alpha$" *es falso*; es decir, excluye los objetos para los que "$x \in \alpha$" es un sinsentido. Así, pues, consiste en todos los objetos del tipo inmediatamente inferior a α que no son miembros de α; pero no contienen objetos de ningún otro tipo salvo de éste.

*22·05. $\alpha - \beta = \alpha \cap -\beta$ Df

Esta definición proporciona una abreviatura que convendrá usar con frecuencia.

Los postulados necesarios para el álgebra de la lógica fueron enumerados por Huntington (65). En nuestra notación son como se ofrecen seguidamente.

Supongamos una clase K, con dos reglas de combinación, a saber $\cup$ y $\cap$; entonces, precisamos los diez postulados siguientes:

I *a*. $a \cup b$ es una clase, siempre que a y b sean clases.

I *b*. $a \cap b$ es una clase, siempre que a y b sean clases.

II *a*. Hay un elemento Λ tal que, para todo elemento a, $a \cup \Lambda = a$.

---

(65) *Trans. Amer. Math. Soc.* Vol. 5, July 1904, p. 292.

II *b*. Hay un elemento V tal que, para todo elemento *a*, $a \cap V = a$.

III *a*. $a \cup b = b \cup a$, siempre que *a*, *b*, $a \cup b$, y $b \cup a$ sean clases.

III *b*. $a \cap b = b \cap a$, siempre que *a*, *b*, $a \cap b$, y $b \cap a$ sean clases.

IV *a*. $a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$, siempre que *a*, *b*, *c*, $a \cup b$, $a \cup c$, $b \cap c$, $a \cup (b \cap c)$, y $(a \cup b) \cap (a \cup c)$ sean clases.

IV*b*. $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$, siempre que *a*, *b*, *c*, $a \cap$ b, a $\cap c$, $b \cup c$, $a \cap (b \cup c)$, y $(a \cap b) \cup (a \cap c)$ sean clases.

V. Si los elementos Λ y V de los postulados II *a* y II *b* existen y son únicos, entonces, para cada elemento *a* hay un elemento $-a$ tal que $a \cup -a = V$ y $a \cap -a = \Lambda$.

VI. Hay por lo menos dos elementos, *x* e *y*, en las clases, tales que $x \neq y$.

La forma de estos postulados es tal que son mutuamente independientes; es decir, nueve cualesquiera pueden satisfacerse mediante interpretaciones de los símbolos que no satisfagan al restante postulado.

Para nuestro propósito, "*K*" puede sustituirse por "Cls". Λ y V serán la clase nula y la clase universal, que se definirán en el *24. De este modo, los diez postulados anteriores se prueban, más adelante, en los siguientes lugares:

I *a*, en el *22·37, es decir "$\vdash . \alpha \cup \beta \in$ Cls"

I *b*, en el *22·36, es decir "$\vdash . \alpha \cap \beta \in$ Cls"

II *a*, en el *22·24, es decir "$\vdash . \alpha \cup \Lambda = \alpha$"

II *b*, en el *24·26, es decir "$\vdash . \alpha \cap V = \alpha$"

III *a*, en el *22·57, es decir "$\vdash . \alpha \cup \beta = \beta \cup \alpha$"

III *b*, en el *22·51, es decir "$\vdash . \alpha \cap \beta = \beta \cap \alpha$"

IV *a*, en el *22·69, es decir "$\vdash . (\alpha \cup \beta) \cap (\alpha \cup \gamma) = \alpha \cup (\beta \cap \gamma)$"

IV *b*, en el *22·68, es decir "$\vdash . (\alpha \cap \beta) \cup (\alpha \cap \gamma) = \alpha \cap (\beta \cup \gamma)$"

V, en los *24·21·22, es decir "$\vdash . \alpha \cap - \alpha = \Lambda$" y "$\vdash . \alpha \cup - \alpha = V$"

VI, en el *24·1, es decir, "$\vdash . \Lambda \neq V$"

Por tanto, asumiendo el análisis de los postulados, debido a Huntington para el álgebra formal de la lógica, las proposiciones probadas en lo que sigue bastan para establecer que este álgebra tiene validez al operar con las clases. Las proposiciones correspondientes de las *23 y *25 prueban que tienen validez con las relaciones poniendo Rel, $\dot{\cup}$, $\dot{\cap}$, $\dot{\Lambda}$, $\dot{V}$, respectivamente, en lugar de Cls, $\cup$, $\cap$, Λ, V.

Las principales proposiciones de este número son las siguientes:

1) Las que incorporan las reglas formales:

***22·51.** $\vdash . \alpha \cap \beta = \beta \cap \alpha$

***22·57.** $\vdash . \alpha \cup \beta = \beta \cup \alpha$

Estas incorporan la ley conmutativa.

*22·52. $\vdash . (\alpha \cap \beta) \cap \gamma = \alpha \cap (\beta \cap \gamma)$

*22·7. $\vdash . (\alpha \cup \beta) \cup \gamma = \alpha \cup (\beta \cup \gamma)$

Estas incorporan la ley asociativa.

*22·5. $\vdash . \alpha \cap \alpha = \alpha$

*22·56. $\vdash . \alpha \cup \alpha = \alpha$

Estas incorporan la ley de tantología.

*22·68. $\vdash . (\alpha \cap \beta) \cup (\alpha \cap \gamma) = \alpha \cap (\beta \cup \gamma)$

*22·69. $\vdash . (\alpha \cup \beta) \cap (\alpha \cup \gamma) = \alpha \cup (\beta \cap \gamma)$

Estas incorporan la ley distributiva. Puede observarse que la segunda resulta de la primera, intercambiando todos los signos de adición y de multiplicación.

*22·8. $\vdash . - (-\alpha) = \alpha$

Este es el principio de la doble negación.

*22·81. $\vdash : \alpha \subset \beta . \equiv . - \beta \subset - \alpha$

Este es el principio de la transposición.

2) Otras proposiciones útiles son las siguientes:

*22·44. $\vdash : \alpha \subset \beta . \beta \subset \gamma . \supset . \alpha \subset \gamma$

*22·441. $\vdash : \alpha \subset \beta . x \in \alpha . \supset . x \in \beta$

Estas incorporan las dos formas del silogismo en Bárbara.

*22·62. $\vdash : \alpha \subset \beta . \equiv . \alpha \cup \beta = \beta$

*22·621. $\vdash : \alpha \subset \beta . \equiv . \alpha \cap \beta = \alpha$

Estas dos proposiciones nos capacitan para transformar una inclusión ($\alpha \subset \beta$) en una ecuación.

*22·91. $\vdash . \alpha \cup \beta = \alpha \cup (\beta - \alpha)$

Es decir, "α o β" es idéntico a "α o la parte de β que se excluye de α".

---

*22·01. $\alpha \subset \beta . = : x \in \alpha . \supset_x . x \in \beta$ Df

*22·02. $\alpha \cap \beta = \hat{x}(x \in \alpha . x \in \beta)$ Df

*22·03. $\alpha \cup \beta = \hat{x}(x \in \alpha . \vee . x \in \beta)$ Df

*22·04. $-\alpha = \hat{x}(x \sim \in \alpha)$ Df

*22·05. $\alpha - \beta = \alpha \cap - \beta$ Df

*22·1. $\vdash :. \alpha \subset \beta . \equiv : x \in \alpha . \supset_x . x \in \beta$ [*4·2 . (*22·01)]

*22·2. $\vdash . \alpha \cap \beta = \hat{x}(x \in \alpha . x \in \beta)$ [*20·2 . (*22·02)]

*22·3. $\vdash . \alpha \cup \beta = \hat{x}(x \in \alpha . \vee . x \in \beta)$ [*20·2 . (*22·03)]

*22·31. $\vdash . - \alpha = \hat{x}(x \sim \in \alpha)$ [*20·2 . (*22·04)]

*22·32. $\vdash . \alpha - \beta = \hat{x}(x \in \alpha . x \sim \in \beta)$ [*20·2 . (*22·05) . *22·2 . *20·32]

*22·33. $\vdash : x \in \alpha \cap \beta . \equiv . x \in \alpha . x \in \beta$ [*20·3 . *22·2]

***22·34.** $\vdash :. x \in \alpha \cup \beta . \equiv : x \in \alpha . \vee . x \in \beta$ [*20·3 . *22·3]

***22·35.** $\vdash : x \in -\alpha . \equiv . x \sim\in \alpha$ [*20·3 . *22·31]

***22·351.** $\vdash . -\alpha \neq \alpha$

Dem.

$\vdash . *22·35 . *5·19 . \supset \vdash : \sim\{x \in -\alpha . \equiv . x \in \alpha\} :$

[*10·11] $\supset \vdash : (x) : \sim\{x \in -\alpha . \equiv . x \in \alpha\} :$

[*10·251] $\supset \vdash : \sim\{(x) : x \in -\alpha . \equiv . x \in \alpha\} :$

[*20·43.Transp] $\supset \vdash : \sim(-\alpha = \alpha) : \supset \vdash .$ Prop

Esta proposición se usa para probar que la clase nula no es idéntica a la clase que contiene todas las cosas (*24·1), la cual se emplea para mostrar que por lo menos existen dos clases. Nuestros axiomas no bastan para probar que existe más de un *individual,* pero prueban la existencia de, por lo menos, dos *clases* y por lo menos dos *relaciones.*

***22·36.** $\vdash . \alpha \cap \beta \in \text{Cls}$ [*20·41]

***22·37.** $\vdash . \alpha \cup \beta \in \text{Cls}$ [*20·41]

***22·38.** $\vdash . -\alpha \in \text{Cls}$ [*20·41]

***22·39.** $\vdash . \hat{z}(\phi z) \cap \hat{z}(\psi z) = \hat{z}(\phi z . \psi z)$

Dem.

$\vdash . *22·33 . \quad \supset \vdash : x \in \hat{z}(\phi z) \cap \hat{z}(\psi z) . \equiv . x \in \hat{z}(\phi z) . x \in \hat{z}(\psi z) .$

[*20·3] $\equiv . \phi x . \psi x$ (1)

$\vdash . (1) . *20·33 . \supset \vdash .$ Prop

***22·391.** $\vdash . \hat{z}(\phi z) \cup \hat{z}(\psi z) = \hat{z}(\phi z \vee \psi z)$ [Prueba similar]

***22·392.** $\vdash . -\hat{z}(\phi z) = \hat{z}(\sim\phi z)$ [Prueba similar]

***22·4.** $\vdash :. \alpha \subset \beta . \beta \subset \alpha . \equiv : x \in \alpha . \equiv_x . x \in \beta$

Dem.

$\vdash . *22·1 . \supset \vdash :: \alpha \subset \beta . \equiv : x \in \alpha . \supset_x . x \in \beta :. \beta \subset \alpha . \equiv : x \in \beta . \supset_x . x \in \alpha :.$

[*4·38] $\supset \vdash :: \alpha \subset \beta . \beta \subset \alpha . \equiv :. x \in \alpha . \supset_x . x \in \beta : x \in \beta . \supset_x . x \in \alpha :.$

[*10·22] $\equiv :. x \in \alpha . \equiv_x . x \in \beta :: \supset \vdash .$ Prop

***22·41.** $\vdash : \alpha \subset \beta . \beta \subset \alpha . \equiv . \alpha = \beta$ [*22·4 . *20·43]

***22·42.** $\vdash . \alpha \subset \alpha$ [Id . *10·11]

***22·43.** $\vdash : \alpha \cap \beta \subset \alpha$ [*3·26 . *10·11]

***22·44.** $\vdash : \alpha \subset \beta . \beta \subset \gamma . \supset . \alpha \subset \gamma$ [*10·3]

Esta es una forma de silogismo en Bárbara. Otra forma es la siguiente:

***22·441.** $\vdash : \alpha \subset \beta . x \in \alpha . \supset . x \in \beta$ [*10·1 . Imp]

***22·45.** $\vdash : \alpha \subset \beta . \alpha \subset \gamma . \equiv . \alpha \subset \beta \cap \gamma$

Dem.

$\vdash . *22·1 . \supset \vdash :. \alpha \subset \beta . \alpha \subset \gamma . \equiv : x \in \alpha . \supset_x . x \in \beta : x \in \alpha . \supset_x . x \in \gamma :$

[*10·29] $\equiv : x \in \alpha . \supset_x . x \in \beta . x \in \gamma :$

[*22·33.*10·413] $\equiv : x \in \alpha . \supset_x . x \in \beta \cap \gamma :. \supset \vdash .$ Prop

***22·46.** $\vdash : x \in \alpha . \alpha \subset \beta . \supset . x \in \beta$ [*22·441 . Perm]

$*22{\cdot}47.\ \vdash : \alpha \subset \gamma . \supset . \alpha \cap \beta \subset \gamma$ [22·43·44]

$*22{\cdot}48.\ \vdash : \alpha \subset \beta . \supset . \alpha \cap \gamma \subset \beta \cap \gamma$ [*10·31]

$*22{\cdot}481.\ \vdash : \alpha = \beta . \supset . \alpha \cap \gamma = \beta \cap \gamma$

Dem.

$\vdash . *22{\cdot}41 . \supset :. \mathrm{Hp} . \supset : \alpha \subset \beta . \beta \subset \alpha :$

[*22·48] $\supset : \alpha \cap \gamma \subset \beta \cap \gamma . \beta \cap \gamma \subset \alpha \cap \gamma :$

[*22·41] $\supset : \alpha \cap \gamma = \beta \cap \gamma :. \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

$*22{\cdot}49.\ \vdash : \alpha \subset \beta . \gamma \subset \delta . \supset . \alpha \cap \gamma \subset \beta \cap \delta$ [*10·39]

$*22{\cdot}5.\ \vdash . \alpha \cap \alpha = \alpha$

Dem.

$\vdash . *22{\cdot}33 . \supset \vdash :. x \in \alpha \cap \alpha . \equiv : x \in \alpha . x \in \alpha :$

[*4·24] $\equiv : x \in \alpha$ (1)

$\vdash . (1) . *10{\cdot}11 . *20{\cdot}43 . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

La última es la ley de tautología para el producto lógico de clases.

$*22{\cdot}51.\ \vdash . \alpha \cap \beta = \beta \cap \alpha$ [*22·33 . *4·3 . *10·11 . *20·43]

$*22{\cdot}52.\ \vdash . (\alpha \cap \beta) \cap \gamma = \alpha \cap (\beta \cap \gamma)$ [*22·33 . *4·32 . *10·11 . *20·43]

Así, pues, el producto lógico de clases obedece a las leyes conmutativa y asociativa. Las referencias a las *22·33·34·35 y a la *20·43 se omitirán con frecuencia en el futuro.

$*22{\cdot}53.\ \alpha \cap \beta \cap \gamma = (\alpha \cap \beta) \cap \gamma$ Df

Esta definición sólo sirve para evitar el uso de paréntesis.

$*22{\cdot}54.\ \vdash :. \alpha = \beta . \supset : \alpha \subset \gamma . \equiv . \beta \subset \gamma$ [*20·18]

$*22{\cdot}55.\ \vdash :. \alpha = \beta . \supset : \gamma \subset \alpha . \equiv . \gamma \subset \beta$ [*20·18]

$*22{\cdot}551.\ \vdash : \alpha = \beta . \supset . \alpha \cup \gamma = \beta \cup \gamma$ [*10·411]

$*22{\cdot}56.\ \vdash . \alpha \cup \alpha = \alpha$ [*4·25 . *10·11]

La última es la ley de la tautología para la suma lógica de clases.

$*22{\cdot}57.\ \vdash . \alpha \cup \beta = \beta \cup \alpha$ [*4·31 . *10·11]

$*22{\cdot}58.\ \vdash . \alpha \subset \alpha \cup \beta . \beta \subset \alpha \cup \beta$ [*1·3 . *2·2]

$*22{\cdot}59.\ \vdash : \alpha \subset \gamma . \beta \subset \gamma . \equiv . \alpha \cup \beta \subset \gamma$

Dem.

$\vdash . *22{\cdot}1 . \supset \vdash :: \mathrm{Hp} . \equiv :. x \in \alpha . \supset_x . x \in \gamma : x \in \beta . \supset_x . x \in \gamma :.$

[*10·22] $\equiv :. (x) :. x \in \alpha . \supset . x \in \gamma : x \in \beta . \supset . x \in \gamma :.$

[*4·77.*10·271] $\equiv :. (x) :. x \in \alpha . \vee . x \in \beta : \supset . x \in \gamma :.$

[*22·34.*10·413] $\equiv :. (x) : x \in \alpha \cup \beta . \supset . x \in \gamma :: \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

La análoga de la *4·78, es decir,

$$\alpha \subset \beta . \vee . \alpha \subset \gamma : \equiv . \alpha \subset \beta \cup \gamma$$

es falsa. Tenemos sólo

$$\alpha \subset \beta . \vee . \alpha \subset \gamma : \supset . \alpha \subset \beta \cup \gamma .$$

Una observación similar se aplica a la análoga de la *4·79. Cf. *22·64·65.

***22·6.** $\vdash :. x \in \alpha \cup \beta . \equiv : \alpha \subset \gamma . \beta \subset \gamma . \supset_{\gamma} . x \in \gamma$

Dem.

$\vdash . *22{\cdot}59 . \supset \vdash :. \alpha \subset \gamma . \beta \subset \gamma . \supset : x \in \alpha \cup \beta . \supset . x \in \gamma :.$

[Comm] $\supset \vdash :. x \in \alpha \cup \beta . \supset : \alpha \subset \gamma . \beta \subset \gamma . \supset . x \in \gamma :.$

[*10·11·21] $\supset \vdash :. x \in \alpha \cup \beta . \supset : \alpha \subset \gamma . \beta \subset \gamma . \supset_{\gamma} . x \in \gamma$ (1)

$\vdash . *10{\cdot}1 . \supset \vdash :. \alpha \subset \gamma . \beta \subset \gamma . \supset_{\gamma} . x \in \gamma : \supset : \alpha \subset \alpha \cup \beta . \beta \subset \alpha \cup \beta . \supset . x \in \alpha \cup \beta :$

[*22·58] $\supset : x \in \alpha \cup \beta$ (2)

$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash .$ Prop

***22·61.** $\vdash : \alpha \subset \beta . \supset . \alpha \subset \beta \cup \gamma$ [*22·44·58]

***22·62.** $\vdash : \alpha \subset \beta . \equiv . \alpha \cup \beta = \beta$

Dem.

$\vdash . *4{\cdot}72 . \quad \supset \vdash :: x \in \alpha . \supset . x \in \beta : \equiv :. x \in \alpha . \vee . x \in \beta : \equiv . x \in \beta :.$

[*22·34] $\equiv :. x \in \alpha \cup \beta . \equiv . x \in \beta$ (1)

$\vdash . (1) . *10{\cdot}271 . \supset \vdash :: \quad \alpha \subset \beta . \equiv :. x \in \alpha \cup \beta . \equiv_{x} . x \in \beta :.$

[*20·43] $\equiv :. \alpha \cup \beta = \beta :: \supset \vdash .$ Prop

***22·621.** $\vdash : \alpha \subset \beta . \equiv . \alpha \cap \beta = \alpha$ [*4·71]

La prueba se efectúa como en la *22·62. La proposición *22·621 es una de las más útiles en este número.

***22·63.** $\vdash : \alpha \cup (\alpha \cap \beta) = \alpha$ [*4·44]

El proceso de obtención de la *22·63 a partir de la *4·44 es semejante al empleado en las pruebas efectuadas en otros capítulos. Por ende, la *4·44 sólo se indica la referencia numérica. De manera semejante restringiremos las referencias para las proposiciones siguientes de este capítulo. El proceso es siempre, más o menos, como sigue: p, q, r se sustituyen por $x \in \alpha$, $x \in \beta$, $x \in \gamma$; a continuación se aplica *10·11, así como las proposiciones del Capítulo *10 que se precisen, juntamente con las *22·33·34·35.

***22·631.** $\vdash . \alpha \cap (\alpha \cup \beta) = \alpha$ [*22·58·621]

***22·632.** $\vdash : \alpha = \beta . \supset . \alpha = \alpha \cap \beta$ [*22·42·621]

***22·633.** $\vdash : \alpha \subset \beta . \supset . \alpha \cup \gamma = (\alpha \cap \beta) \cup \gamma$ [*22·551·621]

***22·64.** $\vdash :. \alpha \subset \gamma . \vee . \beta \subset \gamma : \supset . \alpha \cap \beta \subset \gamma$

Dem.

$\vdash . *22{\cdot}47{\cdot}51 . \supset \vdash : \alpha \subset \gamma . \supset . \alpha \cap \beta \subset \gamma : \beta \subset \gamma . \supset . \alpha \cap \beta \subset \gamma$ (1)

$\vdash . (1) . *4{\cdot}77 . \supset \vdash .$ Prop

La conversa de esta proposición no tiene validez, porque la conversa de la *10·41 no es válida.

***22·65.** $\vdash :. \alpha \subset \beta . \vee . \alpha \subset \gamma : \supset . \alpha \subset \beta \cup \gamma$ [*22·61·57 . *4·77]

Nuevamente aquí, la conversa no es verdadera.

$*22{\cdot}66.\quad \vdash : \alpha \subset \beta . \supset . \alpha \cup \gamma \subset \beta \cup \gamma \qquad [*2{\cdot}38]$

$*22{\cdot}68.\quad \vdash . (\alpha \cap \beta) \cup (\alpha \cap \gamma) = \alpha \cap (\beta \cup \gamma)$

Dem.

$\vdash . *22{\cdot}34 . \supset \vdash :: x \in \{(\alpha \cap \beta) \cup (\alpha \cap \gamma)\} . \equiv :. x \in \alpha \cap \beta . \vee . x \in \alpha \cap \gamma :.$

$[*22{\cdot}33] \qquad \equiv :. x \in \alpha . x \in \beta . \vee . x \in \alpha . x \in \gamma :.$

$[*4{\cdot}4] \qquad \equiv :. x \in \alpha : x \in \beta . \vee . x \in \gamma :.$

$[*22{\cdot}34] \qquad \equiv :. x \in \alpha . x \in \beta \cup \gamma :.$

$[*22{\cdot}33] \qquad \equiv :. x \in \alpha \cap (\beta \cup \gamma) \qquad (1)$

$\vdash . (1) . *10{\cdot}11 . *20{\cdot}43 . \supset \vdash . \text{Prop}$

$*22{\cdot}69.\quad \vdash . (\alpha \cup \beta) \cap (\alpha \cup \gamma) = \alpha \cup (\beta \cap \gamma)$ [Prueba similar, por la $*4{\cdot}41$]

Las últimas proposiciones $*22{\cdot}68{\cdot}69$ son las dos formas de la ley distributiva. Nótese que una procede de la otra intercambiando los signos de adición y producto.

$*22{\cdot}7.\quad \vdash . (\alpha \cup \beta) \cup \gamma = \alpha \cup (\beta \cup \gamma) \qquad [*4{\cdot}33]$

$*22{\cdot}71.\quad \alpha \cup \beta \cup \gamma = (\alpha \cup \beta) \cup \gamma \quad \text{Df}$

$*22{\cdot}72.\quad \vdash : \alpha \subset \gamma . \beta \subset \delta . \supset . \alpha \cup \beta \subset \gamma \cup \delta \quad [*3{\cdot}48]$

$*22{\cdot}73.\quad \vdash : \alpha = \gamma . \beta = \delta . \supset . \alpha \cup \beta = \gamma \cup \delta \quad [*10{\cdot}411]$

$*22{\cdot}74.\quad \vdash : \alpha \cap \beta \subset \gamma . \alpha \cap \gamma \subset \beta . \equiv . \alpha \cap \beta = \alpha \cap \gamma$

Dem.

$\vdash . *22{\cdot}43 . *4{\cdot}73 . \supset \vdash : \alpha \cap \beta \subset \gamma . \equiv . \alpha \cap \beta \subset \alpha . \alpha \cap \beta \subset \gamma .$

$[*22{\cdot}45] \qquad \equiv . \alpha \cap \beta \subset \alpha \cap \gamma \qquad (1)$

$\vdash . (1)^{\gamma,\,\beta}_{\beta,\,\gamma} . \qquad \supset \vdash : \alpha \cap \gamma \subset \beta . \equiv . \alpha \cap \gamma \subset \alpha \cap \beta \qquad (2)$

$\vdash . (1) . (2) . *4{\cdot}38 . \supset \vdash : \alpha \cap \beta \subset \gamma . \alpha \cap \gamma \subset \beta . \equiv . \alpha \cap \beta \subset \alpha \cap \gamma . \alpha \cap \gamma \subset \alpha \cap \beta .$

$[*22{\cdot}41] \qquad \equiv . \alpha \cap \beta = \alpha \cap \gamma : \supset \vdash . \text{Prop}$

$*22{\cdot}8.\quad \vdash . -(-\alpha) = \alpha \qquad [*4{\cdot}13]$

$*22{\cdot}81.\quad \vdash : \alpha \subset \beta . \equiv . -\beta \subset -\alpha \qquad [*4{\cdot}1]$

$*22{\cdot}811.\quad \vdash : \alpha \subset -\beta . \equiv . \beta \subset -\alpha \qquad [*4{\cdot}1 . *22{\cdot}8]$

$*22{\cdot}82.\quad \vdash : \alpha \cap \beta \subset \gamma . \equiv . \alpha - \gamma \subset -\beta \qquad [*4{\cdot}14]$

$*22{\cdot}83.\quad \vdash : \alpha = \beta . \equiv . -\alpha = -\beta \qquad [*4{\cdot}11]$

$*22{\cdot}831.\quad \vdash : \alpha = -\beta . \equiv . \beta = -\alpha \qquad [*4{\cdot}12]$

$*22{\cdot}84.\quad \vdash . -(\alpha \cap \beta) = -\alpha \vee -\beta \qquad [*4{\cdot}51]$

$*22{\cdot}85.\quad \vdash . \alpha \cap \beta = -(-\alpha \vee -\beta) \qquad [*22{\cdot}84{\cdot}831]$

$*22{\cdot}86.\quad \vdash . -(-\alpha \cap -\beta) = \alpha \cup \beta \qquad [*4{\cdot}57]$

$*22{\cdot}87.\quad \vdash . -\alpha \cap -\beta = -(\alpha \cup \beta) \qquad [*22{\cdot}86{\cdot}831]$

Las $*22{\cdot}84{\cdot}85{\cdot}86{\cdot}87$ son las fórmulas de De Morgan.

$*22{\cdot}88.\quad \vdash . (x) . x \in (\alpha \cup -\alpha) \qquad [*2{\cdot}11]$

Esta es una forma de la ley del medio excluso.

$*22{\cdot}89.\quad \vdash . (x) . x \sim\in (\alpha - \alpha) \qquad [*3{\cdot}24]$

Esta es una forma de la ley de contradicción.

***22·9.** $\vdash .(\alpha \cup \beta) - \beta = \alpha - \beta$ [*5·61]

***22·91.** $\vdash .\alpha \cup \beta = \alpha \cup (\beta - \alpha)$

Dem.

$\vdash .$ *5·63 . $\supset \vdash :. x \in \alpha . \vee . x \in \beta : \equiv : x \in \alpha . \vee . x \in \beta . x \sim\in \alpha :.$

[*22·33·34·35] $\supset \vdash :. x \in \alpha \cup \beta . \equiv : x \in \alpha . \vee . x \in (\beta - \alpha) :$

[*22·34] $\equiv : x \in \alpha \cup (\beta - \alpha)$ (1)

$\vdash .(1) .$ *10·11 . *20·43 . $\supset \vdash .$ Prop

***22·92.** $\vdash : \alpha \subset \beta . \supset . \beta = \alpha \cup (\beta - \alpha)$ [*22·91·62]

***22·93.** $\vdash .\alpha - \beta = \alpha - (\alpha \cap \beta)$

Dem.

$\vdash .$ *4·73 . Transp . $\supset \vdash :. x \in \alpha . \supset : x \sim\in \beta . \equiv . \sim(x \in \alpha . x \in \beta) .$

[*22·33] $\equiv . x \sim\in (\alpha \cap \beta) :.$

[*5·32] $\supset \vdash :. x \in \alpha . x \sim\in \beta . \equiv . x \in \alpha . x \sim\in (\alpha \cap \beta) :.$

[*22·35·33] $\supset \vdash : x \in \alpha - \beta . \equiv . x \in \alpha - (\alpha \cap \beta) :$

[*10·11 . *20·43] $\supset \vdash .\alpha - \beta = \alpha - (\alpha \cap \beta) . \supset \vdash .$ Prop

***22·94.** $\vdash : (\alpha) . f\alpha . \equiv . (\alpha) . f(-\alpha)$

Dem.

$\vdash .$ *10·1 . $\supset \vdash : (\alpha) . f\alpha . \supset . f(-\alpha) :$

[*10·11·21] $\supset \vdash : (\alpha) . f\alpha . \supset . (\alpha) . f(-\alpha)$ (1)

$\vdash .$ *10·1 . $\supset \vdash : (\alpha) . f(-\alpha) . \supset . f\{-(-\alpha)\} .$

[*22·8 . *20·18] $\supset . f\alpha :$

[*10·11·21] $\supset \vdash : (\alpha) . f(-\alpha) . \supset . (\alpha) . f\alpha$ (2)

$\vdash .(1) .(2) . \supset \vdash .$ Prop

Esta proposición se usa en conexión con la inducción matemática, en la *90·102, la cual es requerida para la prueba de la *90·132, que es una de las proposiciones fundamentales en la teoría de la inducción matemática.

***22·95.** $\vdash : (\exists \alpha) . f\alpha . \equiv . (\exists \alpha) . f(-\alpha)$

Dem.

$\vdash .$ *22·94 . $\supset \vdash : (\alpha) . \sim f\alpha . \equiv . (\alpha) . \sim f(-\alpha)$ (1)

$\vdash .(1) .$ Transp . *20·6 . $\supset \vdash .$ Prop

*23. CALCULO DE RELACIONES

Sumario del *23.

Las definiciones y proposiciones de este capítulo vienen a ser las correspondientes análogas de las del Capítulo *22. Las propiedades de las relaciones que no tienen análogas en las clases no se tratarán hasta la Sección D. En este número se sustituirán las pruebas, precisamente por ser semejantes a las empleadas en las proposiciones análogas del *22. En este número, e igualmente en los siguientes, las letras latinas mayúsculas significan expresiones de la forma $\hat{x}\hat{y}\ \phi\ !\ (x, y)$, o, donde no se usen como variables aparentes, por $\hat{x}\hat{y}\ \phi\ (x, y)$. Las proposiciones principales de este número son las análogas de las del *22.

---

*23·01. $R \subset S . = : xRy . \supset_{x,y} . xSy$ Df

*23·02. $R \dot{\cap} S = \hat{x}\hat{y}\,(xRy . xSy)$ Df

*23·03. $R \cup S = \hat{x}\hat{y}\,(xRy . \vee . xSy)$ Df

*23·04. $\dot{-} R = \hat{x}\hat{y}\,\{\sim(xRy)\}$ Df

*23·05. $R \dot{-} S = R \dot{\cap} \dot{-} S$ Df

A estas definiciones son aplicables observaciones similares a las del *22.

*23·1. $\vdash :. R \subset S . \equiv : xRy . \supset_{x,y} . xSy$

*23·2. $\vdash . R \dot{\cap} S = \hat{x}\hat{y}\,(xRy . xSy)$

*23·3. $\vdash . R \cup S = \hat{x}\hat{y}\,(xRy . \vee . xSy)$

*23·31. $\vdash . \dot{-} R = \hat{x}\hat{y}\,\{\sim(xRy)\}$

*23·32. $\vdash . R \dot{-} S = \hat{x}\hat{y}\,\{xRy . \sim(xSy)\}$

*23·33. $\vdash : x(R \dot{\cap} S)y . \equiv . xRy . xSy$

*23·34. $\vdash :. x(R \cup S)y . \equiv : xRy . \vee . xSy$

*23·35. $\vdash : x \dot{-} Ry . \equiv . \sim(xRy)$

*23·351. $\vdash . \dot{-} R \neq R$

*23·36. $\vdash . R \dot{\cap} S \in \mathrm{Rel}$

*23·37. $\vdash . R \cup S \in \mathrm{Rel}$

*23·38. $\vdash . \dot{-} R \in \mathrm{Rel}$

*23·39. $\vdash . \hat{x}\hat{y}\,\phi(x, y) \dot{\cap} \hat{x}\hat{y}\,\psi(x, y) = \hat{x}\hat{y}\,\{\phi(x, y) . \psi(x, y)\}$

*23·391. $\vdash . \hat{x}\hat{y}\,\phi(x, y) \cup \hat{x}\hat{y}\,\psi(x, y) = \hat{x}\hat{y}\,\{\phi(x, y) . \vee . \psi(x, y)\}$

*23·392. $\vdash . \dot{-} \hat{x}\hat{y}\,\phi(x, y) = \hat{x}\hat{y}\,\{\sim\phi(x, y)\}$

*23·4. $\vdash :. R \subset S . S \subset R . \equiv : xRy . \equiv_{x,y} . xSy$

*23·41. $\vdash : R \subset S . S \subset R . \equiv . R = S$

*23·42. $\vdash . R \subset R$

*23·43. $\vdash . R \dot{\cap} S \subset R$

*23·44. $\vdash : R \subset S . S \subset T . \supset . R \subset T$

*23·441. $\vdash : R \subset S . xRy . \supset . xSy$

***23·45.** $\vdash : R \subseteq S . R \subseteq T . \supset . R \subseteq S \cap T$

***23·46.** $\vdash : xRy . R \subseteq S . \supset . xSy$

***23·47.** $\vdash : R \subseteq T . \supset . R \cap S \subseteq T$

***23·48.** $\vdash : R \subseteq S . \supset . R \cap T \subseteq S \cap T$

***23·481.** $\vdash : R = S . \supset . R \cap T = S \cap T$

***23·49.** $\vdash : P \subseteq Q . R \subseteq S . \supset . P \cap R \subseteq Q \cap S$

***23·5.** $\vdash . R \cap R = R$

***23·51.** $\vdash . R \cap S = S \cap R$

***23·52.** $\vdash . (R \cap S) \cap T = R \cap (S \cap T)$

***23·53.** $R \cap S \cap T = (R \cap S) \cap T \quad \text{Df}$

***23·54.** $\vdash :. R = S . \supset : R \subseteq T . \equiv . S \subseteq T$

***23·55.** $\vdash :. R = S . \supset : T \subseteq R . \equiv . T \subseteq S$

***23·551.** $\vdash : R = S . \supset . R \cup T = S \cup T$

***23·56.** $\vdash . R \cup R = R$

***23·57.** $\vdash . R \cup S = S \cup R$

***23·58.** $\vdash . R \subseteq R \cup S . S \subseteq R \cup S$

***23·59.** $\vdash : R \subseteq T . S \subseteq T . \equiv . R \cup S \subseteq T$

***23·6.** $\vdash :. x (R \cup S) y . \equiv : R \subseteq T . S \subseteq T . \supset_T . xTy$

***23·61.** $\vdash : R \subseteq S . \supset . R \subseteq S \cup T$

***23·62.** $\vdash : R \subseteq S . \equiv . R \cup S = S$

***23·621.** $\vdash : R \subseteq S . \equiv . R \cap S = R$

***23·63.** $\vdash . R \cup (R \cap S) = R$

***23·631.** $\vdash . R \cap (R \cup S) = R$

***23·632.** $\vdash : R = S . \supset . R = R \cap S$

***23·633.** $\vdash : R \subseteq S . \supset . R \cup T = (R \cap S) \cup T$

***23·64.** $\vdash :. R \subseteq T . \vee . S \subseteq T : \supset . R \cap S \subseteq T$

***23·65.** $\vdash :. R \subseteq S . \vee . R \subseteq T : \supset . R \subseteq S \cup T$

***23·66.** $\vdash : R \subseteq S . \supset . R \cup T \subseteq S \cup T$

***23·68.** $\vdash . (R \cap S) \cup (R \cap T) = R \cap (S \cup T)$

***23·69.** $\vdash . (R \cup S) \cap (R \cup T) = R \cup (S \cap T)$

***23·7.** $\vdash . (R \cup S) \cup T = R \cup (S \cup T)$

***23·71.** $R \cup S \cup T = (R \cup S) \cup T \quad \text{Df}$

***23·72.** $\vdash : P \subseteq R . Q \subseteq S . \supset . P \cup Q \subseteq R \cup S$

***23·73.** $\vdash : P = R . Q = S . \supset . P \cup Q = R \cup S$

***23·74.** $\vdash : P \cap Q \subseteq R . P \cap R \subseteq Q . \equiv . P \cap Q = P \cap R$

***23·8.** $\vdash . \dot{-} (\dot{-} R) = R$

***23·81.** $\vdash : R \subseteq S . \equiv . \dot{-} S \subseteq \dot{-} R$

***23·811.** $\vdash : R \subseteq \dot{-} S . \equiv . S \subseteq \dot{-} R$

***23·82.** $\vdash : R \cap S \subseteq T . \equiv . R \dot{-} T \subseteq \dot{-} S$

***23·83.** $\vdash : R = S . \equiv . \dot{-} R = \dot{-} S$

***23·831.** $\vdash : R = \dot{-} S . \equiv . S = \dot{-} R$

***23·84.** $\vdash . \dot{-} (R \cap S) = \dot{-} R \cup \dot{-} S$

***23·85.** $\vdash . R \dot{\cap} S = \dot{-}(\dot{-} R \cup \dot{-} S)$

***23·86.** $\vdash . \dot{-}(\dot{-} R \dot{\cap} \dot{-} S) = R \cup S$

***23·87.** $\vdash . \dot{-} R \dot{\cap} \dot{-} S = \dot{-}(R \cup S)$

***23·88.** $\vdash . (x, y) . x (R \cup \dot{-} R) y$

***23·89.** $\vdash . (x, y) . \sim \{x (R \dot{-} R) y\}$

***23·9.** $\vdash . (R \cup S) \dot{-} S = R \dot{-} S$

***23·91.** $\vdash . R \cup S = R \cup (S \dot{-} R)$

***23·92.** $\vdash : R \subset S . \supset . S = R \cup (S \dot{-} R)$

***23·93.** $\vdash . R \dot{-} S = R \dot{-} (R \dot{\cap} S)$

***23·94.** $\vdash : (R) . fR . \equiv . (R) . f(\dot{-} R)$

***23·95.** $\vdash : (\exists R) . fR . \equiv . (\exists R) . f(\dot{-} R)$

*24. LA CLASE UNIVERSAL, LA CLASE NULA, Y LA EXISTENCIA DE CLASES

Sumario del *24.

La clase universal, representada por V, es la clase de todos los objetos del tipo que, en un contexto dado, se representan por letras latinas minúsculas, es decir, del tipo más bajo considerado. Así, pues, V, al igual que "Cls", es ambiguo por lo que respecta al tipo. Su definición es la siguiente:

***24·01.** $V = \hat{x}(x = x)$ Df

Cualquier otra propiedad poseída por todo haría lo mismo que "$x = x$"; pero ésta es la única propiedad que hemos estudiado hasta ahora.

La clase nula, representada por Λ, es la clase que no tiene miembros. Igual que V, es ambigua en cuanto al tipo. Empleamos el mismo símbolo, Λ, para clases nulas de varios tipos; pero estas clases nulas son diferentes. El tipo de Λ se determina por aquellos términos x respecto de los que "$x \in \Lambda$" es falso: cualquiera que sea x, "$x \in \Lambda$" no representará una proposición *verdadera*; pero, salvo que x sea del tipo apropiado, "$x \in \Lambda$" será un sinsentido, no falso. De este modo, Λ es del tipo inmediato superior que el de un miembro x respecto del cual "$x \in \Lambda$" es significante y falso. La definición de Λ es

***24·02.** $\Lambda = -V$ Df

Cuando una clase α no es nula, de forma que tiene uno o más miembros, se dice que *existe*. (Este sentido de la "existencia" no debe confundirse con el definido en *14·02). Escribimos "$\exists\,!\,\alpha$" para "α existe". La definición es

***24·03.** $\exists\,!\,\alpha . = . (\exists x) . x \in \alpha$ Df

En este número, trataremos primero de las propiedades de Λ y de V y, después, de su existencia. Comparando el álgebra de la lógica simbólica con el álgebra ordinaria, Λ toma el lugar del 0, mientras que V combina las propiedades del 1 y del ∞.

Entre las más importantes propiedades de Λ y de V que se prueban en este número están las siguientes:

***24·1.** $\vdash . \Lambda \neq V$

Es decir "nada no es todo". Esto es útil cuando se nos da la existencia de por lo menos dos clases. Si los filósofos monistas se mantuvieran firmes al sostener que sólo existe un individual, debería haber sólo dos clases, la Λ y la V, siendo V (en este caso) la clase cuyo único miembro es el individual en cuestión. Nuestras proposiciones primitivas no exigen la existencia de más de un individual.

***24·102·103** muestran que cualquier función que siempre es verdadera determina

la clase universal, y que cualquier función que siempre es falsa determina la clase nula.

*24·21·22 ofrecen las formas de las leyes de la contradicción y del medio excluso, a saber, "nada es a la vez α y no-α" ($\alpha \cap -\alpha = \Lambda$) y "cada cosa es α o no-α" ($\alpha \cup -\alpha = V$).

*24·23·24·26·27 proporcionan las propiedades de Λ y de V con respecto a la suma y al producto, a saber: la multiplicación por V y la suma de Λ no producen cambio en una clase (*24·26·24); la suma de V da V, y la multiplicación por Λ da Λ (*24·27·23). Se observará que las propiedades de Λ y de V resultan una de otra intercambiando la suma por el producto.

*24·3. $\vdash : \alpha \subset \beta . \equiv . \alpha - \beta = \Lambda$

Esto es, "α está contenida en β" es equivalente a "α pero no β, nada es".

*24·311. $\vdash : \alpha \subset -\beta . \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda$

Esto es, "ningún α es un β" es equivalente a "nada es a la vez α y β".

*24·411. $\vdash : \beta \subset \alpha . \supset . \alpha = \beta \cup (\alpha - \beta)$

*24·43. $\vdash : \alpha - \beta \subset \gamma . \equiv . \alpha \subset \beta \cup \gamma$

Como regla, las proposiciones que se relacionan con la V se usan mucho menos que las proposiciones correlativas respecto de la Λ.

Las propiedades de la existencia de las clases se derivan de las referidas a la Λ debido al hecho de que $\exists ! \alpha$ es el contradictorio de $\alpha = \Lambda$, como se prueba en *24·54. Así, en virtud de la *24·3, tenemos,

*24·55. $\vdash : \sim(\alpha \subset \beta) . \equiv . \exists ! \alpha - \beta$

Esto es, "no todas las α's son β's" es equivalente a "existen α's que no son β's". Esta es la proposición familiar de la lógica formal que dice que la contradictoria de la universal afirmativa es la particular negativa.

Tenemos

*24·56. $\vdash :. \exists ! (\alpha \cup \beta) . \equiv : \exists ! \alpha . v . \exists ! \beta$

*24·561. $\vdash : \exists ! (\alpha \cap \beta) . \supset . \exists ! \alpha . \exists ! \beta$

Esto es, si existe una suma, entonces existe uno de los sumandos, y viceversa; y si existe un producto, ambos factores existen (pero no viceversa).

Las pruebas de las proposiciones en este número no ofrecen dificultad.

---

*24·01. $V = \hat{x}(x = x)$ Df

*24·02. $\Lambda = -V$ Df

*24·03. $\exists ! \alpha . = . (\exists x) . x \in \alpha$ Df

*24·1. $\vdash . \Lambda \neq V$ [*22·351 . (*24·02)]

*24·101. $\vdash . V = -\Lambda$ [*22·831 . (*24·02)]

***24·102.** $\vdash : (x) . \phi x . \equiv . \hat{z}(\phi z) = V$

Dem.

$\vdash . *13·15 . *5·501 . \supset \vdash :. \phi x . \equiv : \phi x . \equiv . x = x :.$
[*10·11·271] $\supset \vdash :. (x) . \phi x . \equiv : (x) : \phi x . \equiv . x = x :$
[*20·15] $\equiv : \hat{z}(\phi z) = \hat{z}(x = x) :$
[(*24·01)] $\equiv : \hat{z}(\phi z) = V :. \supset \vdash .$ Prop

Así, pues, cualquier función que es siempre verdadera determina la clase universal, y viceversa.

***24·103.** $\vdash : (x) . \sim \phi x . \equiv . \hat{z}(\phi z) = \Lambda$

Dem.

$\vdash . *24·102 . \supset \vdash :. (x) . \sim \phi x . \equiv : \hat{z}(\sim \phi z) = V :$
[*22·392] $\equiv : - \hat{z}(\phi z) = V :$
[*22·831] $\equiv : \hat{z}(\phi z) = - V :$
[(*24·02)] $\equiv : \hat{z}(\phi z) = \Lambda :. \supset \vdash .$ Prop

***24·104.** $\vdash . (x) . x \in V$

Dem.

$\vdash . *20·3 . \supset \vdash : x \in V . \equiv . x = x$ (1)
$\vdash . (1) . *13·15 . *10·11·271 . \supset \vdash .$ Prop

***24·105.** $\vdash . (x) . x \sim \in \Lambda$

Dem.

$\vdash . *22·35 . \supset \vdash : x \in \Lambda . \equiv . x \sim \in V :$
[*4·12] $\supset \vdash : x \sim \in \Lambda . \equiv . x \in V$ (1)
$\vdash . (1) . *10·11·271 . *24·104 . \supset \vdash .$ Prop

***24·11.** $\vdash . (\alpha) . \alpha \subset V$

Dem.

$\vdash . *24·104 . *10·1 . \supset \vdash . x \in V .$
[Simp] $\supset \vdash : x \in \alpha . \supset . x \in V :$
[*10·11.*22·1] $\supset \vdash : \alpha \subset V :$
[*10·11] $\supset \vdash : (\alpha) . \alpha \subset V : \supset \vdash .$ Prop

***24·12.** $\vdash . (\alpha) . \Lambda \subset \alpha$

Dem.

$\vdash . *24·105 . *10·1 . \supset \vdash . x \sim \in \Lambda .$
[*2·21] $\supset \vdash : x \in \Lambda . \supset . x \in \alpha$ (1)
$\vdash . (1) . *10·11 . *22·1 . \supset \vdash .$ Prop

***24·13.** $\vdash : \alpha = \Lambda . \equiv . \alpha \subset \Lambda$

Dem.

$\vdash . *24·12 . *4·73 . \supset \vdash : \alpha \subset \Lambda . \equiv . \alpha \subset \Lambda . \Lambda \subset \alpha .$
[*22·41] $\equiv . \alpha = \Lambda : \supset \vdash .$ Prop

***24·14.** $\vdash : (x) . x \in \alpha . \equiv . \alpha = V$

Dem.

$\vdash . *24·102 . \supset \vdash : (x) . x \in \alpha . \equiv . \hat{x}(x \in \alpha) = V .$
[*20·32] $\equiv . \alpha = V : \supset \vdash .$ Prop

***24·141.** $\vdash : V \subset \alpha . \equiv . V = \alpha$

Dem.

$$\vdash .*24{\cdot}11 .*4{\cdot}73 . \supset \vdash : \mathrm{V} \subset \alpha . \equiv . \alpha \subset \mathrm{V} . \mathrm{V} \subset \alpha .$$
$$[*22{\cdot}41] \qquad \equiv . \alpha = \mathrm{V} : \supset \vdash . \mathrm{Prop}$$

***24·15.** $\vdash : (x) . x \sim \epsilon \alpha . \equiv . \alpha = \Lambda$

Dem.

$$\vdash .*24{\cdot}103 . \supset \vdash : (x) . x \sim \epsilon \alpha . \equiv . \hat{x}(x \epsilon \alpha) = \Lambda .$$
$$[*20{\cdot}32] \qquad \equiv . \alpha = \Lambda : \supset \vdash . \mathrm{Prop}$$

***24·17.** $\vdash : \alpha = \mathrm{V} . \equiv . -\alpha = \Lambda$ $[*22{\cdot}83 . (*24{\cdot}02)]$

***24·21.** $\vdash . \alpha \cap -\alpha = \Lambda$ $[*24{\cdot}103 . *22{\cdot}89]$

***24·22.** $\vdash . \alpha \cup -\alpha = \mathrm{V}$ $[*22{\cdot}88 . *24{\cdot}102]$

***24·23.** $\vdash . \alpha \cap \Lambda = \Lambda$ $[*24{\cdot}12 . *22{\cdot}621]$

***24·24.** $\vdash . \alpha \cup \Lambda = \alpha$ $[*24{\cdot}12 . *22{\cdot}62]$

Las dos últimas proposiciones (*24·23·24) manifiestan la analogía algebráica entre la Λ y el cero.

***24·26.** $\vdash . \alpha \cap \mathrm{V} = \alpha$ $[*22{\cdot}621 . *24{\cdot}11]$

Esta manifiesta la analogía entre la V y el 1.

***24·27.** $\vdash . \alpha \cup \mathrm{V} = \mathrm{V}$ $[*22{\cdot}62 . *24{\cdot}11]$

Esta presenta la analogía entre la V y el ∞.

***24·3.** $\vdash : \alpha \subset \beta . \equiv . \alpha - \beta = \Lambda$

Dem.

$$\vdash .*4{\cdot}53{\cdot}6 . \supset$$
$$\vdash :. x \epsilon \alpha . \supset . x \epsilon \beta : \equiv : \sim(x \epsilon \alpha . x \sim \epsilon \beta) :$$
$$[*22{\cdot}35] \qquad \equiv : \sim(x \epsilon \alpha . x \epsilon - \beta) :$$
$$[*22{\cdot}33] \qquad \equiv : \sim(x \epsilon \alpha - \beta) \qquad (1)$$
$$\vdash . (1) .*10{\cdot}11{\cdot}271 . \supset$$
$$\vdash : \alpha \subset \beta . \equiv . (x) . \sim(x \epsilon \alpha - \beta) .$$
$$[*24{\cdot}15] \quad \equiv . \alpha - \beta = \Lambda : \supset \vdash . \mathrm{Prop}$$

Esta proposición se emplea muy frecuentemente.

***24·31.** $\vdash : \alpha \subset \beta . \equiv . -\alpha \cup \beta = \mathrm{V}$

Dem.

$$\vdash .*4{\cdot}6 . \qquad \supset \vdash :. x \epsilon \alpha . \supset . x \epsilon \beta : \equiv : x \sim \epsilon \alpha . \vee . x \epsilon \beta :.$$
$$[*10{\cdot}11{\cdot}271] \supset \vdash :. \alpha \subset \beta . \equiv : (x) : x \sim \epsilon \alpha . \vee . x \epsilon \beta :$$
$$[*22{\cdot}35] \qquad \equiv : (x) : x \epsilon - \alpha . \vee . x \epsilon \beta :$$
$$[*22{\cdot}34] \qquad \equiv : (x) . x \epsilon (-\alpha \cup \beta) :$$
$$[*24{\cdot}14] \qquad \equiv : -\alpha \cup \beta = \mathrm{V} :. \supset \vdash . \mathrm{Prop}$$

Esta proposición es la correlativa de la *24·3; pero, contrariamente a aquélla, no se usará en lo sucesivo. Cada proposición referida a la Λ tiene una correlativa referida a la V, pero raramente ofreceremos estas correlaciones, puesto que apenas se precisan para las pruebas que vienen a continuación.

***24·311.** $\vdash : \alpha \subset -\beta . \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda$

Dem.

$\vdash . *22·35 . \supset \vdash :. x \in \alpha . \supset . x \in -\beta : \equiv : x \in \alpha . \supset . x \sim\in \beta :$
$[*4·51·62] \equiv : \sim(x \in \alpha . x \in \beta) :$
$[*22·33] \equiv : \sim(x \in \alpha \cap \beta)$ (1)
$\vdash . (1) . *10·11·271 . \supset \vdash : \alpha \subset -\beta . \equiv . (x) . x \sim\in \alpha \cap \beta .$
$[*24·15] \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda : \supset \vdash . \text{Prop}$

***24·312.** $\vdash : -\alpha \subset \beta . \equiv . \alpha \cup \beta = V$

Dem.

$\vdash . *22·35 . \supset \vdash :. -\alpha \subset \beta . \equiv : x \sim\in \alpha . \supset_x . x \in \beta :$
$[*4·64] \equiv : (x) : x \in \alpha . \vee . x \in \beta :$
$[*22·34] \equiv : (x) . x \in \alpha \cup \beta :$
$[*24·14] \equiv : \alpha \cup \beta = V :. \supset \vdash . \text{Prop}$

***24·313.** $\vdash : \alpha \cap \beta = \Lambda . \equiv . \alpha = \alpha - \beta$ $[*24·311 . *22·621]$

***24·32.** $\vdash :. \alpha \cup \beta = \Lambda . \equiv . \alpha = \Lambda . \beta = \Lambda$

Dem.

$\vdash . *24·13 . \supset \vdash :. \alpha \cup \beta = \Lambda . \equiv : \alpha \cup \beta \subset \Lambda :$
$[*22·59] \equiv : \alpha \subset \Lambda . \beta \subset \Lambda :$
$[*24·13] \equiv : \alpha = \Lambda . \beta = \Lambda :. \supset \vdash . \text{Prop}$

***24·33.** $\vdash : \alpha = V . \supset . \alpha \cup \beta = V$

Dem.

$\vdash . *22·551 . \supset \vdash : \text{Hp} . \supset . \alpha \cup \beta = V \cup \beta$
$[*24·27 . *22·57] = V : \supset \vdash . \text{Prop}$

***24·34.** $\vdash : \alpha = \Lambda . \supset . \alpha \cap \beta = \Lambda$ $[*22·481 . *24·23]$

***24·35.** $\vdash : \alpha = V . \supset . \alpha \cap \beta = \beta$ $[*22·481 . *24·26]$

***24·36.** $\vdash : \alpha = \Lambda . \supset . \alpha \cup \beta = \beta$ $[*22·551 . *24·24]$

***24·37.** $\vdash :. \alpha \cap \beta = \Lambda . \equiv : x \in \alpha . y \in \beta . \supset_{x,y} . x \neq y$

Dem.

$\vdash . *24·15 . \supset \vdash :. \alpha \cap \beta = \Lambda . \equiv : (x) . x \sim\in (\alpha \cap \beta) :$
$[*22·33] \equiv : (x) . \sim(x \in \alpha . x \in \beta) :$
$[*13·191] \equiv : (x, y) : x = y . \supset . \sim(x \in \alpha . y \in \beta) :$
$[\text{Transp}] \equiv : (x, y) : x \in \alpha . y \in \beta . \supset . x \neq y :. \supset \vdash . \text{Prop}$

***24·38.** $\vdash :. \alpha \cap \beta = \Lambda . \supset : \alpha \neq \beta . \vee . \alpha = \Lambda . \beta = \Lambda$

Dem.

$\vdash . *22·481 . \supset \vdash : \alpha \cap \beta = \Lambda . \alpha = \beta . \supset . \alpha \cap \alpha = \Lambda .$
$[*22·5] \supset . \alpha = \Lambda .$
$[*20·23] \supset . \alpha = \Lambda . \beta = \Lambda$ (1)
$\vdash . (1) . \text{Exp} . \supset \vdash :. \alpha \cap \beta = \Lambda . \supset : \alpha = \beta . \supset . \alpha = \Lambda . \beta = \Lambda :$
$[*4·6] \supset : \alpha \neq \beta . \vee . \alpha = \Lambda . \beta = \Lambda :. \supset \vdash . \text{Prop}$

***24·39.** $\vdash :. \alpha \cap \beta = \Lambda . \equiv : x \in \alpha . \supset_x . x \sim\in \beta$ $[*24·311 . *22·35]$

***24·4.** $\vdash : \alpha \cap \beta = \Lambda . \equiv . (\alpha \cup \beta) - \alpha = \beta . \equiv . (\alpha \cup \beta) - \beta = \alpha$

Dem.

$\vdash . *24{\cdot}311 . \supset \vdash : \alpha \cap \beta = \Lambda . \equiv . \beta \subset -\alpha .$

[*22·621] $\equiv . \beta - \alpha = \beta .$

[*22·9] $\equiv . (\alpha \cup \beta) - \alpha = \beta$ (1)

$\vdash . (1)^{\frac{\beta, \alpha}{\alpha, \beta}} . \supset \vdash : \beta \cap \alpha = \Lambda . \equiv . (\beta \cup \alpha) - \beta = \alpha :$

[*22·51·57] $\supset \vdash : \alpha \cap \beta = \Lambda . \equiv . (\alpha \cup \beta) - \beta = \alpha$ (2)

$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash .$ Prop

***24·401.** $\vdash : \beta \subset \alpha . \supset . (\beta \cup \gamma) - \alpha = \gamma - \alpha$

Dem.

$\vdash . *22{\cdot}68 . \supset \vdash . (\beta \cup \gamma) - \alpha = (\beta - \alpha) \cup (\gamma - \alpha)$ (1)

$\vdash . *24{\cdot}3 . \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \supset . \beta - \alpha = \Lambda$ (2)

$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \supset . (\beta \cup \gamma) - \alpha = \Lambda \cup (\gamma - \alpha)$

[*24·24] $= \gamma - \alpha : \supset \vdash .$ Prop

***24·402.** $\vdash : \alpha \cap \beta = \Lambda . \xi \subset \alpha . \eta \subset \beta . \supset . \xi \cap \eta = \Lambda$

Dem.

$\vdash . *22{\cdot}49 . \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \supset . \xi \cap \eta \subset \alpha \cap \beta .$

[*22·55] $\supset . \xi \cap \eta \subset \Lambda .$

[*24·13] $\supset . \xi \cap \eta = \Lambda : \supset \vdash .$ Prop

***24·41.** $\vdash . \alpha = (\alpha \cap \beta) \cup (\alpha - \beta)$

Dem.

$\vdash . *22{\cdot}68 . \supset \vdash . (\alpha \cap \beta) \cup (\alpha - \beta) = \alpha \cap (\beta \cup -\beta)$

[*24·22] $= \alpha \cap V$

[*24·26] $= \alpha . \supset \vdash .$ Prop

***24·411.** $\vdash : \beta \subset \alpha . \supset . \alpha = \beta \cup (\alpha - \beta)$

Dem.

$\vdash . *22{\cdot}633^{\frac{\beta, \alpha, \alpha - \beta}{\alpha, \beta, \gamma}} . \supset \vdash : \beta \subset \alpha . \supset . \beta \cup (\alpha - \beta) = (\alpha \cap \beta) \cup (\alpha - \beta)$

[*24·41] $= \alpha : \supset \vdash .$ Prop

***24·412.** $\vdash : \beta \subset \alpha . \gamma \subset \beta . \supset . (\alpha - \beta) \cup (\beta - \gamma) = \alpha - \gamma$

Dem.

$\vdash . *24{\cdot}41 . \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \supset . (\alpha - \beta) \cup (\beta - \gamma) = (\alpha - \beta \cap \gamma) \cup (\alpha - \beta - \gamma) \cup (\beta - \gamma)$

[*24·3·23] $= (\alpha - \beta - \gamma) \cup (\beta - \gamma)$

[*22·68] $= \{(\alpha - \beta) \cup \beta\} - \gamma$

[*24·411] $= \alpha - \gamma : \supset \vdash .$ Prop

Esta proposición se usa en *234·181, en la teoría de las funciones continuas.

***24·42.** $\vdash : \alpha \cap \beta \subset \gamma . \alpha - \beta \subset \gamma . \equiv . \alpha \subset \gamma$

Dem.

$\vdash . *22{\cdot}59 . \supset \vdash : \alpha \cap \beta \subset \gamma . \alpha - \beta \subset \gamma . \equiv . (\alpha \cap \beta) \cup (\alpha - \beta) \subset \gamma .$

[*24·41] $\equiv . \alpha \subset \gamma : \supset \vdash .$ Prop

***24·43.** $\vdash : \alpha - \beta \subset \gamma . \equiv . \alpha \subset \beta \cup \gamma$

Dem.

$\vdash .*5{\cdot}6 . \quad \supset \vdash :: x \in \alpha . x \sim \in \beta . \supset . x \in \gamma : \equiv :. x \in \alpha . \supset : x \in \beta . \vee . x \in \gamma :.$
$[*22{\cdot}35{\cdot}33] \supset \vdash :: x \in \alpha - \beta . \supset . x \in \gamma : \equiv :. x \in \alpha . \supset : x \in \beta . \vee . x \in \gamma :.$
$[*22{\cdot}34] \qquad \equiv :. x \in \alpha . \supset . x \in (\beta \cup \gamma) \qquad (1)$
$\vdash .(1) .*10{\cdot}11{\cdot}271 . \supset \vdash .$ Prop

***24·431.** $\vdash .(\alpha \cup \gamma) \cap (\beta \cup -\gamma) = (\alpha \cap \beta) \cup (\alpha - \gamma) \cup (\beta \cap \gamma)$

Esta proposición y la siguiente son lemas para la *24·44.

Dem.

$\vdash .*22{\cdot}68 . \supset \vdash .(\alpha \cup \gamma) \cap (\beta \cup -\gamma) = \{(\alpha \cup \gamma) \cap \beta\} \cup \{(\alpha \cup \gamma) \cap -\gamma\}$
$[*22{\cdot}68] \qquad = (\alpha \cap \beta) \cup (\gamma \cap \beta) \cup (\alpha - \gamma) \cup (\gamma - \gamma)$
$[*24{\cdot}21] \qquad = (\alpha \cap \beta) \cup (\gamma \cap \beta) \cup (\alpha - \gamma) \cup \Lambda$
$[*24{\cdot}24] \qquad = (\alpha \cap \beta) \cup (\gamma \cap \beta) \cup (\alpha - \gamma)$
$[*22{\cdot}51{\cdot}57] \qquad = (\alpha \cap \beta) \cup (\alpha - \gamma) \cup (\beta \cap \gamma) . \supset \vdash .$ Prop

***24·432.** $\vdash .(\alpha - \gamma) \cup (\beta \cap \gamma) = (\alpha \cap \beta) \cup (\alpha - \gamma) \cup (\beta \cap \gamma)$

Dem.

$\vdash .*24{\cdot}22{\cdot}35 . \supset \vdash . \alpha \cap \beta = (\alpha \cap \beta) \cap (\gamma \cup -\gamma)$
$[*22{\cdot}68] \qquad = (\alpha \cap \beta \cap \gamma) \cup (\alpha \cap \beta - \gamma)$
$[*22{\cdot}51] \qquad = (\alpha \cap \beta \cap \gamma) \cup (\alpha \cap -\gamma \cap \beta) .$
$[*22{\cdot}551] \qquad \supset \vdash .(\alpha \cap \beta) \cup (\alpha - \gamma) = (\alpha \cap \beta \cap \gamma) \cup (\alpha \cap -\gamma \cap \beta) \cup (\alpha - \gamma)$
$[*22{\cdot}63] \qquad = (\alpha \cap \beta \cap \gamma) \cup (\alpha - \gamma)$
$[*22{\cdot}57] \qquad = (\alpha - \gamma) \cup (\alpha \cap \beta \cap \gamma) .$
$[*22{\cdot}551] \qquad \supset \vdash .(\alpha \cap \beta) \cup (\alpha - \gamma) \cup (\beta \cap \gamma) = (\alpha - \gamma) \cup (\alpha \cap \beta \cap \gamma) \cup (\beta \cap \gamma)$
$[*22{\cdot}63] \qquad = (\alpha - \gamma) \cup (\beta \cap \gamma) . \supset \vdash .$ Prop

***24·44.** $\vdash .(\alpha \cup \gamma) \cap (\beta \cup -\gamma) = (\alpha \cap -\gamma) \cup (\beta \cap \gamma) \quad [*24{\cdot}431{\cdot}432]$

***24·45.** $\vdash : (\alpha \cap \gamma) \cup (\beta - \gamma) = \Lambda . \equiv . \beta \subset \gamma . \gamma \subset -\alpha$

Dem.

$\vdash .*24{\cdot}32 . \supset \vdash : (\alpha \cap \gamma) \cup (\beta - \gamma) = \Lambda . \equiv . \alpha \cap \gamma = \Lambda . \beta - \gamma = \Lambda .$
$[*24{\cdot}3{\cdot}311] \qquad \equiv . \gamma \subset -\alpha . \beta \subset \gamma : \supset \vdash .$ Prop

***24·46.** $\vdash : (\alpha \cap \gamma) \cup (\beta - \gamma) = \Lambda . \supset . \alpha \cap \beta = \Lambda$

Dem.

$\vdash .*24{\cdot}45 .*22{\cdot}44 . \supset \vdash :$ Hp $. \supset . \beta \subset -\alpha .$
$[*22{\cdot}811] \qquad \supset . \alpha \subset -\beta .$
$[*24{\cdot}311] \qquad \supset . \alpha \cap \beta = \Lambda : \supset \vdash .$ Prop

Las siguientes proposiciones, hasta la *2·495 inclusive, son lemas que se incluyen para emplearlas en muchas proposiciones posteriores, la mayoría de las cuales sólo se usan muy pocas veces.

***24·47.** $\vdash : \alpha \cap \beta = \Lambda . \alpha \cup \beta = \gamma . \equiv . \alpha \subset \gamma . \beta = \gamma - \alpha$

Dem.

$\vdash .*24{\cdot}311 . \supset \vdash : \alpha \cap \beta = \Lambda . \equiv . \beta \subset -\alpha \qquad (1)$

$\vdash .*22{\cdot}41 . \supset \vdash : \alpha \cup \beta = \gamma . \equiv . \alpha \cup \beta \subset \gamma . \gamma \subset \alpha \cup \beta .$

[*22·59.*24·43] $\equiv . \alpha \subset \gamma . \beta \subset \gamma . \gamma - \alpha \subset \beta$ (2)

$\vdash .(1).(2). \supset \vdash : \alpha \cap \beta = \Lambda . \alpha \cup \beta = \gamma . \equiv . \beta \subset -\alpha . \alpha \subset \gamma . \beta \subset \gamma . \gamma - \alpha \subset \beta .$

[*4·3] $\equiv . \alpha \subset \gamma . \beta \subset \gamma . \beta \subset -\alpha . \gamma - \alpha \subset \beta .$

[*22·45] $\equiv . \alpha \subset \gamma . \beta \subset \gamma - \alpha . \gamma - \alpha \subset \beta .$

[*22·41] $\equiv . \alpha \subset \gamma . \beta = \gamma - \alpha : \supset \vdash .$ Prop

***24·48.** $\vdash :. \xi \subset \alpha . \xi' \subset \alpha . \eta \subset \beta . \eta' \subset \beta . \alpha \cap \beta = \Lambda . \supset :$

$\xi \cup \eta = \xi' \cup \eta' . \equiv . \xi = \xi' . \eta = \eta'$

Dem.

$\vdash .*22{\cdot}73 . \quad \supset \vdash : \xi = \xi' . \eta = \eta' . \supset . \xi \cup \eta = \xi' \cup \eta'$ (1)

$\vdash .*22{\cdot}481 . \quad \supset \vdash :. \xi \cup \eta = \xi' \cup \eta' . \supset : (\xi \cup \eta) \cap \alpha = (\xi' \cup \eta') \cap \alpha :$

[*22·68] $\supset : (\xi \cap \alpha) \cup (\eta \cap \alpha) = (\xi' \cap \alpha) \cup (\eta' \cap \alpha)$ (2)

$\vdash .*22{\cdot}621 . \quad \supset \vdash : \xi \subset \alpha . \supset . \xi \cap \alpha = \xi : \xi' \subset \alpha . \supset . \xi' \cap \alpha = \xi' :$

[*3·47] $\supset \vdash : \xi \subset \alpha . \xi' \subset \alpha . \supset . \xi \cap \alpha = \xi . \xi' \cap \alpha = \xi'$ (3)

$\vdash .*22{\cdot}48 . \quad \supset \vdash : \eta \subset \beta . \supset . \eta \cap \alpha \subset \alpha \cap \beta :$

[*22·55] $\supset \vdash : \eta \subset \beta . \alpha \cap \beta = \Lambda . \supset . \eta \cap \alpha \subset \Lambda .$

[*24·13] $\supset . \eta \cap \alpha = \Lambda$ (4)

Similarmente $\vdash : \eta' \subset \beta . \alpha \cap \beta = \Lambda . \supset . \eta' \cap \alpha = \Lambda$ (5)

$\vdash .(3).(4). \quad \supset \vdash :. \text{Hp} . \supset : (\xi \cap \alpha) \cup (\eta \cap \alpha) = \xi \cup \Lambda$

[*24·24] $= \xi$ (6)

$\vdash .(3).(5). \quad \supset \vdash :. \text{Hp} . \supset : (\xi' \cap \alpha) \cup (\eta' \cap \alpha) = \xi' \cup \Lambda$

[*24·24] $= \xi'$ (7)

$\vdash .(2).(6).(7). \supset \vdash :. \text{Hp} . \supset : \xi \cup \eta = \xi' \cup \eta' . \supset . \xi = \xi'$ (8)

Similarmente $\vdash :. \text{Hp} . \supset : \xi \cup \eta = \xi' \cup \eta' . \supset . \eta = \eta'$ (9)

$\vdash .(1).(8).(9). \supset \vdash .$ Prop

La última proposición, además de usarse en las dos siguientes, se emplea, en la teoría de pares (*54·6), en la teoría del mayor y menor (*117·632), y en el capítulo dedicado a la ordenación de las clases por el principio de las primeras diferencias (*170·68).

***24·481.** $\vdash :. \alpha \cap \beta = \Lambda . \alpha \cap \gamma = \Lambda . \supset : \alpha \cup \beta = \alpha \cup \gamma . \equiv . \beta = \gamma$

Dem.

$\vdash .*24{\cdot}48 \frac{\alpha, -\alpha, \alpha, \alpha, \beta, \gamma}{\alpha, \beta, \xi, \xi', \eta, \eta'} . \supset$

$\vdash :. \alpha \subset \alpha . \alpha \subset \alpha . \beta \subset -\alpha . \gamma \subset -\alpha . \alpha - \alpha = \Lambda . \supset :$

$\alpha \cup \beta = \alpha \cup \gamma . \equiv . \alpha = \alpha . \beta = \gamma$ (1)

$\vdash .*22{\cdot}42 .*24{\cdot}21 . \supset$

$\vdash :. \alpha \subset \alpha . \alpha \subset \alpha . \beta \subset -\alpha . \gamma \subset -\alpha . \alpha - \alpha = \Lambda . \equiv . \beta \subset -\alpha . \gamma \subset -\alpha .$

[*24·311] $\equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda . \alpha \cap \gamma = \Lambda$ (2)

$\vdash .*20{\cdot}2 .*4{\cdot}73 . \supset \vdash : \alpha = \alpha . \beta = \gamma . \equiv . \beta = \gamma$ (3)

$\vdash .(1).(2).(3). \supset \vdash .$ Prop

Esta proposición se usa en la teoría de las selecciones (*83·74) dentro de la

teoría del mayor y menor (*117·582), y en la teoría de la inducción transfinita (*257).

***24·482.** $\vdash :. \xi \subset \alpha . \eta \subset \beta . \alpha \cap \beta = \Lambda . \supset : \xi \cup \eta = \alpha \cup \beta . \equiv . \xi = \alpha . \eta = \beta$

$$\left[*24{\cdot}48 \frac{\alpha, \beta}{\xi', \eta'} . *22{\cdot}42 \right]$$

Esta proposición se usa en la teoría de la convergencia (*232·34).

***24·49.** $\vdash :. \alpha \cap \beta = \Lambda . \supset : \alpha \subset \beta \cup \gamma . \equiv . \alpha \subset \gamma$

Dem.

$\vdash . *22{\cdot}621 . \supset \vdash : \alpha \subset \beta \cup \gamma . \equiv . \alpha = \alpha \cap (\beta \cup \gamma)$

[*22·68] $= (\alpha \cap \beta) \cup (\alpha \cap \gamma)$ (1)

$\vdash . *24{\cdot}24 . \supset \vdash : \alpha \cap \beta = \Lambda . \supset . (\alpha \cap \beta) \cup (\alpha \cap \gamma) = \alpha \cap \gamma$ (2)

$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash :. \mathrm{Hp} . \supset : \alpha \subset \beta \cup \gamma . \equiv . \alpha = \alpha \cap \gamma .$

[*22·621] $\equiv . \alpha \subset \gamma : \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***24·491.** $\vdash : \beta \cap \gamma = \Lambda . \alpha \subset \beta \cup \gamma .$

$\supset . \alpha - \beta = \alpha \cap \gamma . \alpha - \gamma = \alpha \cap \beta . \alpha = (\alpha - \beta) \cup (\alpha - \gamma)$

Dem.

$\vdash . *22{\cdot}621 . \quad \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \supset . \alpha = \alpha \cap (\beta \cup \gamma) .$

[*22·481] $\supset . \alpha - \gamma = \alpha \cap (\beta \cup \gamma) - \gamma$

[*24·4] $= \alpha \cap \beta$ (1)

Similarmente $\vdash : \mathrm{Hp} . \supset . \alpha - \beta = \alpha \cap \gamma$ (2)

$\vdash . (1) . (2) . \quad \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \supset . (\alpha - \beta) \cup (\alpha - \gamma) = (\alpha \cap \gamma) \cup (\alpha \cap \beta)$

[*22·68] $= \alpha \cap (\gamma \cup \beta)$

[*22·621] $= \alpha$ (3)

$\vdash . (1) . (2) . (3) . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

Esta proposición se usa en la teoría de selecciones (*83·63·65) y en la teoría de los segmentos de una serie (*211·84).

***24·492.** $\vdash : \beta \subset \alpha . \alpha - \beta = \gamma . \supset . \alpha - \gamma = \beta$

Dem.

$\vdash . *22{\cdot}481 . \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \supset . \alpha - \gamma = \alpha - (\alpha - \beta)$

[*22·8·86] $= \alpha \cap (-\alpha \cup \beta)$

[*22·8·9] $= \alpha \cap \beta$

[*22·621] $= \beta : \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

Esta proposición se usa con cierta frecuencia, especialmente en la teoría de las series. Primero se usa en la *93·273, en la teoría de las "generaciones".

***24·493.** $\vdash : \beta \cap \gamma = \Lambda . \supset . \alpha = (\alpha - \beta) \cup (\alpha - \gamma)$

Dem.

$\vdash . *22{\cdot}84 . *24{\cdot}17 . \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \supset . - \beta \cup - \gamma = \mathrm{V} .$

[*24·26] $\supset . \alpha = \alpha \cap (- \beta \cup - \gamma)$

[*22·68] $= (\alpha - \beta) \cup (\alpha - \gamma) : \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***24·494.** $\vdash : \xi \subset \alpha . \eta \subset \beta . \alpha \cap \beta = \Lambda . \supset . (\xi \cup \eta) - \alpha = \eta . (\xi \cup \eta) - \beta = \xi$

Dem.

$\vdash .*24{\cdot}3 . \quad \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \supset . \xi - \alpha = \Lambda$ (1)

$\vdash .*24{\cdot}311 . \quad \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \supset . \beta \subset - \alpha .$

$[*22{\cdot}44] \quad \supset . \eta \subset - \alpha .$

$[*22{\cdot}621] \quad \supset . \eta - \alpha = \eta$ (2)

$\vdash .*22{\cdot}68 . \quad \supset \vdash . (\xi \cup \eta) - \alpha = (\xi - \alpha) \cup (\eta - \alpha)$ (3)

$\vdash .(1) .(2) .(3) .*24{\cdot}24 . \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \supset . (\xi \cup \eta) - \alpha = \eta$ (4)

Similarmente $\vdash : \mathrm{Hp} . \supset . (\xi \cup \eta) - \beta = \xi$ (5)

$\vdash .(4) .(5) . \quad \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

Esta proposición se usa en la teoría de las selecciones (*83·63 y *88·45).

***24·495.** $\vdash : \alpha \cap \gamma = \Lambda . \supset . (\alpha \cup \gamma) - (\beta \cup \gamma) = \alpha - \beta$

Dem.

$\vdash .*22{\cdot}87{\cdot}68 \, \supset$

$\vdash . (\alpha \cup \gamma) - (\beta \cup \gamma) = (\alpha - \beta - \gamma) \cup (\gamma - \beta - \gamma)$

$[*24{\cdot}21] \quad = \alpha - \beta - \gamma$ (1)

$\vdash .*24{\cdot}311 .*22{\cdot}621 . \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \supset . \alpha - \gamma = \alpha$ (2)

$\vdash .(1) .(2) . \quad \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

Esta proposición se usa en la teoría de los puntos mínimos (*205·83·832·84).

En lo que resta de este número entraremos en la cuestión de la existencia de las clases. Muchas de las propiedades de la existencia de las clases se derivan del hecho de decir que una clase existe es equivalente a decir que una clase no es igual a la clase nula. Esto se prueba en la *24·54.

***24·5.** $\vdash : \exists ! \alpha . \equiv . (\exists x) . x \in \alpha \quad [*4{\cdot}2 . (*24{\cdot}03)]$

***24·51.** $\vdash : \sim \exists ! \alpha . \equiv . \alpha = \Lambda$

Dem.

$\vdash .*24{\cdot}5 . \supset \vdash : \sim \exists ! \alpha . \equiv . \sim \{(\exists x) . x \in \alpha\} .$

$[*10{\cdot}252] \quad \equiv . (x) . x \sim \in \alpha .$

$[*24{\cdot}15] \quad \equiv . \alpha = \Lambda : \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***24·52.** $\vdash . \exists ! V \quad [*24{\cdot}51{\cdot}1 . \mathrm{Transp}]$

Esta proposición establece que la clase de todos los objetos del tipo en cuestión no es nula, sino que tiene, al menos, un miembro. La suposición de que hay algo, lo cual es equivalente a esta proposición, está implícita en la proposición *10·1, que dice que lo que es siempre verdadero es verdadero en cualquier caso. Esto no tendría validez si no hubiesen casos del todo; por lo tanto, implica la existencia de algo. Se observará que la última proposición (*24·52) depende de la *24·1, la cual a su vez depende de la *22·351, y ésta de la *10·251, que depende de la *10·24, la cual depende de la *10·1 o de la *9·1. El supuesto de que hay algo está implícito en el uso de la variable real, la cual de otro modo, no tendría sentido. Esto se explícita en la *9·1 y en la prueba de la *9·2, que es la misma proposición que la *10·1.

***24·53.** $\vdash . \sim \exists ! \Lambda \quad [*24{\cdot}51 . *20{\cdot}2]$

***24·54.** $\vdash :\exists ! \alpha . \equiv . \alpha \neq \Lambda$ [*24·51 . Transp]

***24·55.** $\vdash :\sim(\alpha \subset \beta) . \equiv . \exists ! \alpha - \beta$ [*24·3 . Transp . *24·54]

***24·56.** $\vdash :. \exists ! (\alpha \cup \beta) . \equiv : \exists ! \alpha . \vee . \exists ! \beta$ [*10·42 . *22·34]

***24·561.** $\vdash :\exists ! (\alpha \cap \beta) . \supset . \exists ! \alpha . \exists ! \beta$ [*10·5 . *22·33]

***24·57.** $\vdash :. \alpha \cap \beta = \Lambda . \supset : \exists ! \alpha . \supset . \alpha \neq \beta$

Dem.

$\vdash . *22·481 . \supset \vdash : \alpha \cap \beta = \Lambda . \alpha = \beta . \supset . \alpha \cap \alpha = \Lambda .$
[*22·5] $\supset . \alpha = \Lambda .$
[*24·51] $\supset . \sim \exists ! \alpha$ (1)
$\vdash . (1) . \text{Exp} . \text{Transp} . \supset \vdash . \text{Prop}$

***24·571.** $\vdash :\exists ! \alpha . \alpha = \beta . \supset . \exists ! (\alpha \cap \beta)$

Dem.

$\vdash . *24·57 . \text{Comm} . \supset \vdash :. \exists ! \alpha . \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda . \supset . \alpha \neq \beta :$
[Transp] $\supset : \alpha = \beta . \supset . \alpha \cap \beta \neq \Lambda .$
[*24·54] $\supset . \exists ! (\alpha \cap \beta)$ (1)
$\vdash . (1) . \text{Imp} . \supset \vdash . \text{Prop}$

***24·58.** $\vdash :. \alpha \subset \beta . \supset : \exists ! \alpha . \supset . \exists ! \beta$ [*10·28]

***24·6.** $\vdash :. \alpha \subset \beta \supset : \alpha \neq \beta . \equiv . \exists ! \beta - \alpha$

Dem.

$\vdash . *22·41 . \text{Transp} .$ $\supset \vdash :. \text{Hp} . \supset : \alpha \neq \beta . \supset . \sim(\beta \subset \alpha) .$
[*24·55] $\supset . \exists ! \beta - \alpha$ (1)
$\vdash . *24·21 .$ $\supset \vdash : \alpha = \beta . \supset . \beta - \alpha = \Lambda$ (2)
$\vdash . (2) . \text{Transp} . *24·54 . \supset \vdash : \exists ! \beta - \alpha . \supset . \alpha \neq \beta$ (3)
$\vdash . (1) . (3) .$ $\supset \vdash . \text{Prop}$

***24·61.** $\vdash :\sim \exists ! \beta . \supset . \alpha \cup \beta = \alpha$ [*24·51·24]

***24·62.** $\vdash :\sim \exists ! \beta . \supset . \alpha \cap \beta = \Lambda$ [*24·51·23]

***24·63.** $\vdash :. \Lambda \sim \epsilon \kappa . \equiv : \alpha \epsilon \kappa . \supset_\alpha . \exists ! \alpha$

En esta proposición, las condiciones de significación exigen que κ sea una clase de clases. La condición "$\alpha \epsilon \kappa . \supset_\alpha . \exists ! \alpha$" se necesita como hipótesis en muchas proposiciones. En virtud de la última proposición esta hipótesis puede sustituirse por "$\Lambda \sim \epsilon \kappa$".

Dem.

$\vdash . *13·191 . \supset \vdash :. \Lambda \sim \epsilon \kappa . \equiv : \alpha = \Lambda . \supset_\alpha . \alpha \sim \epsilon \kappa :$
[Transp] $\equiv : \alpha \epsilon \kappa . \supset_\alpha . \alpha \neq \Lambda :$
[*24·54] $\equiv : \alpha \epsilon \kappa . \supset_\alpha . \exists ! \alpha :. \supset \vdash . \text{Prop}$

Esta proposición se usa con frecuencia en las últimas partes de este libro. A menudo tenemos que tratar sobre clases de clases existentes, y la forma más conveniente de expresar que todos los miembros de una clase de clases existen es "$\Lambda \sim \epsilon \kappa$".

*25. LA RELACION UNIVERSAL, LA RELACION NULA, Y LA EXISTENCIA DE RELACIONES

Sumario del *25.

Este número contiene las análogas, en cuanto a las relaciones, de las definiciones y proposiciones del *24. No se darán las pruebas, ya que se realizarían exactamente igual que en el *24.

La relación universal, simbolizada por V, es la relación que tiene lugar entre dos términos cualesquiera de tipos apropiados, cualquiera que sean en el contexto dado. La relación nula, $\dot{\Lambda}$, es la relación que no se presenta entre cualquier par de términos, cuyos tipos vienen fijados por los tipos de los términos respecto de los cuales tiene significado negar que tengan validez. Una relación R se dice que *existe* cuando hay, por lo menos, un par de términos entre los que tiene validez; "R existe" se escribe "$\dot{\exists}\,!\,R$".

A las proposiciones de este número se hacen mucho menos referencia que a las del *24; pero, a fin de mantener la uniformidad, hemos dado a las análogas de todas las proposiciones del *24 la misma numeración (excepto la parte entera).

Todas las observaciones hechas en el *24 tienen aplicación, *mutatis mutandis*, en este número.

---

*25·01. $\dot{V} = \hat{x}\hat{y}\,(x = x \,.\, y = y)$ Df

*25·02. $\dot{\Lambda} = \dot{-}\dot{V}$ Df

*25·03. $\dot{\exists}\,!\,R \,.=.\, (\dot{\exists}x, y) \,.\, xRy$ Df

*25·1. $\vdash . \dot{\Lambda} \neq \dot{V}$

*25·101. $\vdash . \dot{V} = \dot{-}\dot{\Lambda}$

*25·102. $\vdash : (x, y) \,.\, \phi\,(x, y) \,.\, \equiv . \hat{x}\hat{y}\,\phi\,(x, y) = \dot{V}$

*25·103. $\vdash : (x, y) \,.\, \sim\phi\,(x, y) \,.\, \equiv . \hat{x}\hat{y}\,\phi\,(x, y) = \dot{\Lambda}$

*25·104. $\vdash . (x, y) \,.\, x\dot{V}y$

*25·105. $\vdash . (x, y) \,.\, \sim(x\dot{\Lambda}y)$

*25·11. $\vdash . (R) \,.\, R \subseteq \dot{V}$

*25·12. $\vdash . (R) \,.\, \dot{\Lambda} \subseteq R$

*25·13. $\vdash : R = \dot{\Lambda} \,.\, \equiv . R \subseteq \dot{\Lambda}$

*25·14. $\vdash : (x, y) \,.\, xRy \,.\, \equiv . R = V$

*25·141. $\vdash : \dot{V} \subseteq R \,.\, \equiv . V = R$

*25·15. $\vdash : (x, y) \,.\, \sim(xRy) \,.\, \equiv . R = \dot{\Lambda}$

*25·17. $\vdash : R = \dot{V} \,.\, \equiv . \dot{-}R = \dot{\Lambda}$

*25·21. $\vdash . R \mathbin{\dot{\cap}} \dot{-}R = \dot{\Lambda}$

$*25{\cdot}22.\ \vdash . R \cup \dot{-} R = \dot{V}$

$*25{\cdot}23.\ \vdash . R \cap \dot{\Lambda} = \dot{\Lambda}$

$*25{\cdot}24.\ \vdash . R \cup \dot{\Lambda} = R$

$*25{\cdot}26.\ \vdash . R \cap \dot{V} = R$

$*25{\cdot}27.\ \vdash . R \cup \dot{V} = \dot{V}$

$*25{\cdot}3.\ \vdash : R \subseteq S . \equiv . R \dot{-} S = \dot{\Lambda}$

$*25{\cdot}31.\ \vdash : R \subseteq S . \equiv . \dot{-} R \cup S = V$

$*25{\cdot}311.\ \vdash : R \subseteq \dot{-} S . \equiv . R \cap S = \dot{\Lambda}$

$*25{\cdot}312.\ \vdash : \dot{-} R \subseteq S . \equiv . R \cup S = \dot{V}$

$*25{\cdot}313.\ \vdash : R \cap S = \dot{\Lambda} . \equiv . R \dot{-} S = R$

$*25{\cdot}32.\ \vdash : R \cup S = \dot{\Lambda} . \equiv . R = \dot{\Lambda} . S = \dot{\Lambda}$

$*25{\cdot}33.\ \vdash : R = \dot{V} . \supset . R \cup S = \dot{V}$

$*25{\cdot}34.\ \vdash : R = \dot{\Lambda} . \supset . R \cap S = \dot{\Lambda}$

$*25{\cdot}35.\ \vdash : R = \dot{V} . \supset . R \cap S = S$

$*25{\cdot}36.\ \vdash : R = \dot{\Lambda} . \supset . R \cup S = S$

$*25{\cdot}37.\ \vdash :: R \cap S = \dot{\Lambda} . \equiv :. xRy . zSw . \supset_{x,y,z,w} : x \neq z . \vee . y \neq w$

$*25{\cdot}38.\ \vdash :. R \cap S = \dot{\Lambda} . \supset : R \neq S . \vee . R = \dot{\Lambda} . S = \dot{\Lambda}$

$*25{\cdot}39.\ \vdash :. R \cap S = \dot{\Lambda} . \equiv : xRy . \supset_{x,y} . \sim (xSy)$

$*25{\cdot}4.\ \vdash : P \cap Q = \dot{\Lambda} . \equiv . (P \cup Q) \dot{-} P = Q . \equiv . (P \cup Q) \dot{-} Q = P$

$*25{\cdot}401.\ \vdash : Q \subseteq P . \supset . (Q \cup R) \dot{-} P = R \dot{-} P$

$*25{\cdot}402.\ \vdash : P \cap Q = \dot{\Lambda} . R \subseteq P . S \subseteq Q . \supset . R \cap S = \dot{\Lambda}$

$*25{\cdot}41.\ \vdash . R = (R \cap S) \cup (R \dot{-} S)$

$*25{\cdot}411.\ \vdash : S \subseteq R . \supset . R = S \cup (R \dot{-} S)$

$*25{\cdot}412.\ \vdash : Q \subseteq P . S \subseteq Q . \supset . (P \dot{-} Q) \cup (Q \dot{-} S) = P \dot{-} S$

$*25{\cdot}42.\ \vdash : P \cap Q \subseteq R . P \dot{-} Q \subseteq R . \equiv . P \subseteq R$

$*25{\cdot}43.\ \vdash : P \dot{-} Q \subseteq R . \equiv . P \subseteq Q \cup R$

$*25{\cdot}431.\ \vdash . (P \cup R) \cap (Q \cup \dot{-} R) = (P \cap Q) \cup (P \dot{-} R) \cup (Q \cap R)$

$*25{\cdot}432.\ \vdash . (P \dot{-} R) \cup (Q \cap R) = (P \cap Q) \cup (P \dot{-} R) \cup (Q \cap R)$

$*25{\cdot}44.\ \vdash . (P \cup R) \cap (Q \cup \dot{-} R) = (P \cap \dot{-} R) \cup (Q \cap R)$

$*25{\cdot}45.\ \vdash : (P \cap R) \cup (Q \dot{-} R) = \dot{\Lambda} . \equiv . Q \subseteq R . R \subseteq \dot{-} P$

$*25{\cdot}46.\ \vdash : (P \cap R) \cup (Q \dot{-} R) = \dot{\Lambda} . \supset . P \cap Q = \dot{\Lambda}$

$*25{\cdot}47.\ \vdash : P \cap Q = \dot{\Lambda} . P \cup Q = R . \equiv . P \subseteq R . Q = R \dot{-} P$

$*25{\cdot}48.\ \vdash :. R \subseteq P . R' \subseteq P . S \subseteq Q . S' \subseteq Q . P \cap Q = \dot{\Lambda} . \supset :$
$R \cup S = R' \cup S' . \equiv . R = R' . S = S'$

$*25{\cdot}481.\ \vdash :. P \cap Q = \dot{\Lambda} . P \cap R = \dot{\Lambda} . \supset : P \cup Q = P \cup R . \equiv . Q = R$

$*25{\cdot}482.\ \vdash :. R \subseteq P . S \subseteq Q . P \cap Q = \dot{\Lambda} . \supset : R \cup S = P \cup Q . \equiv . R = P . S = Q$

$*25{\cdot}49.\ \vdash :. P \cap Q = \dot{\Lambda} . \supset : P \subseteq Q \cup R . \equiv . P \subseteq R$

$*25{\cdot}491.\ \vdash : Q \cap R = \dot{\Lambda} . P \subseteq Q \cup R . \supset .$
$P \dot{-} Q = P \cap R . P \dot{-} R = P \cap Q . P = (P \dot{-} Q) \cup (P \dot{-} R)$

***25·492.** $\vdash : Q \subseteq P . P \dot{-} Q = R . \supset . P \dot{-} R = Q$

***25·493.** $\vdash : Q \dot{\cap} R = \dot{\Lambda} . \supset . P = (P \dot{-} Q) \dot{\cup} (P \dot{-} R)$

***25·494.** $\vdash : R \subseteq P . S \subseteq Q . P \dot{\cap} Q = \dot{\Lambda} . \supset . (R \dot{\cup} S) \dot{-} P = S . (R \dot{\cup} S) \dot{-} Q = R$

***25·495.** $\vdash : P \dot{\cap} R = \dot{\Lambda} . \supset . (P \dot{\cup} R) \dot{-} (Q \dot{\cup} R) = P \dot{-} Q$

***25·5.** $\vdash : \dot{\exists} ! R . \equiv . (\exists x, y) . xRy$

***25·51.** $\vdash : \sim \dot{\exists} ! R . \equiv . R = \dot{\Lambda}$

***25·52.** $\vdash . \dot{\exists} ! \dot{V}$

***25·53.** $\vdash . \sim \dot{\exists} ! \dot{\Lambda}$

***25·54.** $\vdash : \dot{\exists} ! R . \equiv . R \neq \dot{\Lambda}$

***25·55.** $\vdash : \sim (R \subseteq S) . \equiv . \dot{\exists} ! R \dot{-} S$

***25·56.** $\vdash :. \dot{\exists} ! (R \dot{\cup} S) . \equiv : \dot{\exists} ! R . \vee . \dot{\exists} ! S$

***25·561.** $\vdash : \dot{\exists} ! (R \dot{\cap} S) . \supset . \dot{\exists} ! R . \dot{\exists} ! S$

***25·57.** $\vdash :. R \dot{\cap} S = \dot{\Lambda} . \supset : \dot{\exists} ! R . \supset . R \neq S$

***25·571.** $\vdash : \dot{\exists} ! R . R = S . \supset . \dot{\exists} ! (R \dot{\cap} S)$

***25·58.** $\vdash :. R \subseteq S . \supset : \dot{\exists} ! R . \supset . \dot{\exists} ! S$

***25·6.** $\vdash :. R \subseteq S . \supset : R \neq S . \equiv . \dot{\exists} ! S \dot{-} R$

***25·61.** $\vdash : \sim \dot{\exists} ! S . \supset . R \dot{\cup} S = R$

***25·62.** $\vdash : \sim \dot{\exists} ! S . \supset . R \dot{\cap} S = \dot{\Lambda}$

***25·63.** $\vdash :. \dot{\Lambda} \sim \epsilon \kappa . \equiv : R \epsilon \kappa . \supset_R . \dot{\exists} ! R$

SECCION D

LOGICA DE RELACIONES

En esta sección trataremos de aquellas propiedades generales de las relaciones que no tengan análogas en la teoría de clases. Las notaciones que se introducen en esta sección se emplearán constantemente a lo largo del resto del libro, y las ideas vertidas en las definiciones se verá que son de importancia fundamental.

*30. FUNCIONES DESCRIPTIVAS

Sumario del *30.

Las funciones consideradas hasta ahora, con la excepción de unas pocas funciones particulares tal como $a \cap b$, han sido proposicionales; es decir, que por valores suyos han tenido proposiciones. Pero las funciones ordinarias de las matemáticas, tales como x^2, sen x, log x, no son proposicionales. Las funciones de esta clase siempre significan "el término que tiene tal y cual relación con x". Por esta razón podemos denominarlas funciones *descriptivas,* puesto que *describen* un cierto término por medio de su relación con su argumento. De este modo "sen $\pi/2$" describe al número 1; no obstante, las proposiciones en la que aparezca sen $\pi/2$ no son las mismas que las que tendríamos si sustituyéramos sen $\pi/2$ por 1. Esto se aprecia, por ejemplo, en la proposición "sen $\pi/2 = 1$", que lleva en sí una información valiosa, mientras que, por el contrario, "$1 = 1$" es algo trivial. Las funciones descriptivas, como las descripciones en general, no tiene significado por sí mismas, sino en cuanto constitutivas de las proposiciones (66).

La defínción general de una función descriptiva es:

*30·01. $R`y = (\imath x)(xRy)$ Df

Esto es, "$R`y$" significa "el término $x$ que tiene la relación $R$ con $y$". Si hubiese varios términos, o ninguno, que tuviesen la relación $R$ con $y$, todas las proposiciones acerca de $R`y$, es decir, todas las proposiciones de la forma "$\phi\,(R`y)$", serían falsas. El apóstrofe que hay en "$R`y$" puede leerse "de". Así, si R es la relación de padre a hijo, "$R`y$" significa "el padre de $y$". Si $R$ es la relación de hijo a padre, "$R`y$" significa "el hijo de y"; en este caso, todas las proposiciones de la forma "$\phi\,(R`y)$" serán falsas salvo que y tengan un solo hijo y no más.

Todas las funciones que se presentan en las matemáticas ordinarias son ejemplos de la definición de arriba; todas se obtienen, de la manera dicha, de alguna relación. Así, en nuestra notación, "$R`y$" ocupa el lugar de lo que comúnmente sería "$fy$", reservándose esta última notación para las funciones *proposicionales.* Debemos escribir "sen`$x$" en vez de "sen x" usando "sen" para expresar la relación de x a y cuando $x = \text{sen}\, y$.

Una definición tal como $R`y = (\imath x)(xRy)$, en donde el significado dado al término definido es una descripción, debe entenderse que significa que el término definido (en este caso $R`y$) y la descripción asignada a su significado (en este caso $(\imath x)(xRy)$) son intercambiables en uso: la definición es, en cierto sentido, más puramente simbólica que otras definiciones, ya que la descripción asignada como el

(66) Cf. *14, más arriba.

significado no tiene significado en sí mismo salvo en uso. Quizás fuese más formalmente correcto escribir

$$f(R`y) . = . f\{(\imath x)(xRy)\} \quad \text{Df.}$$

Sin embargo, todavía esta definición no está completa del todo, porque omite la mención a los *alcances* de las dos descripciones, $R`y$ y $(\imath x)(xRy)$. Así, pues, la forma completa sería

$$[R`y] . f(R`y) . = . [(\imath x)(xRy)] . f\{(\imath x)(xRy)\} \quad \text{Df.}$$

Pero no es preciso adoptar esta forma de definición, dado que se entiende que la definición *30·01 significa que puede escribirse "$R`y$" en lugar de "$(\imath x)(xRy)$ *dondequiera* que sea; esto es, tanto en las indicaciones del alcance como en cualquier otro sitio. El *uso* de la definición se realiza siempre de acuerdo con la proposición:

$$\vdash : [R`y] . f(R`y) . \equiv . [(\imath x)(xRy)] . f(\imath x)(xRy),$$

que es la *30·1, que aparecerá más abajo.

Debe observarse que la *30·01 no necesariamente implica

$$R`y = (\imath x)(xRy).$$

Pues esto, en virtud de la definición, es equivalente a

$$(\imath x)(xRy) = (\imath x)(xRy),$$

lo cual, por la *14·28, sólo tiene validez cuando E ! $(\imath x)(xRy)$, esto es, cuando hay un término, y no más, que tiene la relación R con y.

Todos los convenios en cuanto al alcance, explicados en el *14 pueden trasferirse a $R`x$; es decir que, en ausencia de una indicación contraria, el alcance de $R`x$ debe ser la proposición más pequeña, encerrada por puntos o paréntesis en la que aparezca la $R`x$ en cuestión.

Proponemos

***30·02.** $R`S`y = R`(S`y)$ Df

Esta definición sirve únicamente para evitar los paréntesis. Debe interpretarse según este significado:

$$[R`S`y] . f(R`S`y) . = . [R`(S`y)] . f\{R`(S`y)\} \quad \text{Df.}$$

En el futuro, frecuentemente definiremos una nueva expresión de forma que tenga una frase descriptiva como significado; en tal caso, la definición ha de interpretarse siempre como se ha indicado. Es decir, que cualquier proposición en la que interviene una nueva expresión debe ser la proposición que se obtenga al sustituir la vieja expresión por una nueva, dondequiera que ocurra la última.

En la última expresión, $R`(S`y)$ debe interpretarse considerando primeramente a $S`y$ como si no fuese un símbolo descriptivo, y aplicando las *30·01 y *14·01 ó la *14·02 a $R`(S`y)$, y a continuación aplicando las *30·01 y *14·01 ó la *14·02 a $S`y$.

La mayor parte de las proposiciones de este número son consecuencias inmediatas de las proposiciones correspondientes del *14. Así, las *14·31—·34 y la *14·113, conducen inmediatamente a las *30·12—·16, lo cual muestra que, o siempre o cuando $R`y$ exista, el "alcance" de $R`y$ o de $R`y$ y $S`y$ no introducen diferencia alguna a los valores de verdad de las proposiciones de las que nos hemos ocupado. Tenemos

***30·18.** $\vdash :. \mathrm{E}!\, R`y : (z) . \phi z : \supset . \phi (R`y)$

de manera que lo que es válido para todos es válido para $R`y$, con tal que $R`y$ exista. Esto resulta inmediatamente de la *14·28 y muestra que, siempre que $R`y$ exista, el hecho de que "$R`y$" sea un símbolo incompleto no impide su sustitución como un valor de z, siempre que tengamos $(z) . \phi z$, o una aserción de la función proposicional ϕz.

Una de las proposiciones más usadas de este número es:

***30·3.** $\vdash :. x = R`y . \equiv : zRy . \equiv_z . z = x$

que resulta inmediatamente de la *14·202. La siguiente proposición análoga se deriva de la anterior por medio de la *14·122:

***30·31.** $\vdash :. x = R`y . \equiv : xRy : zRy . \supset_z . z = x$

Esto es, "$x = R`y$" abarca, además de "xRy", la expresión de que cualquier cosa que tenga la relación R con y es idéntica a x.

Una proposición de referencia constante es:

***30·37.** $\vdash : \mathrm{E}!\, R`y . y = z . \supset . R`y = R`z$

En hipótesis, $\mathrm{E}!\, R`y$ podría sustituirse por $\mathrm{E}!\, R`z$, pero uno u otro de ellos es esencial. Pues, por la *14·21, "$R`y = R`z$" implica $\mathrm{E}!\, R`y$ y $\mathrm{E}!\, R`z$ (éstas son equivalentes cuando $y = z$) y, por lo tanto, no puede ser verdadera cuando $R`y$ y $R`z$ no existan.

El uso de la *30·37 tiene lugar principalmente en los casos en donde la y o la z, o ambas, se sustituyen por funciones descriptivas. Supongamos, por ejemplo, que z se sustituye por $S`w$. En virtud de la *30·18, podemos sustituir $S`w$ en lugar de z, si $S`w$ existe. Por la *14·21, ambos miembros de la implicación en la *30·37 resultarán falsos si $S`w$ no existiese y, por lo tanto, la implicación aún se mantendrá. Por consiguiente, tanto si $S`w$ existe como si no, podemos sustituirla en lugar de z y obtener

$$\vdash : \mathrm{E}!\, R`y . y = S`w . \supset . R`y = R`S`w.$$

De cualquier forma, si sustituimos y por $T`v$, obtenemos

$$\vdash : \mathrm{E}!\, R`T`v . T`v = S`w . \supset . R`T`v = R`S`w.$$

Una proposición muy importante es

***30·4.** $\vdash :. \mathrm{E}!\, R`y . \supset : a = R`y . \equiv . aRy$

Esta proposición declara que, siempre que $R`y$ exista, decir que a es *el* término

que guarda la relación R respecto a y es equivalente a decir que a tiene la relación R con y. Así, por ejemplo, "a es el ocupante de la casa y" es equivalente a "a ocupa la casa y", "a es el escritor de Waverley" es equivalente a "a escribió Waverley", "a es el padre de y" es equivalente a "a engendró a y". Sin embargo, no podemos argumentar a partir de "John Smith habita en Londres" que "John Smith es *el* habitante de Londres".

Introduciremos en ésta y en las siguientes secciones muchas relaciones constantes para las que $\mathrm{E}!\,R`y$ es siempre verdadera. Cuando $R$ es tal que $\mathrm{E}!\,R`y$ es siempre verdadera tenemos, en virtud de la *30·4,

$$a = R`y \,.\equiv.\, aRy$$

para todo posible valor de y. La proposición siguiente es útil en los casos donde tanto R como S son tales que $R`y$ y $S`y$ existen siempre:

***30·41.** $\vdash :. (y) \,.\, R`y = S`y \,.\equiv: (y) \,.\, \mathrm{E}!\,R`y : R = S$

Así, si sabemos que $R`y$ y $S`y$ son siempre idénticas, no sólo sabemos que R y S son idénticas, sino también que $R`y$ (y por lo tanto $S`y$) existen siempre.

***30·01.** $R`y = (\imath x)\,(xRy)$ Df

***30·02.** $R`S`y = R`(S`y)$ Df

Al interpretar $R`(S`y)$, $S`y$ debe considerarse como un símbolo ordinario hasta que $R`(S`y)$ haya sido eliminada por las *30·01 y *14·01 o por la *14·02, y entonces las definiciones anteriores son aplicables a $S`y$.

***30·1.** $\vdash : [R`y] \,.\, f(R`y) \,.\equiv.\, [(\imath x)\,(xRy)] \,.\, f(\imath x)\,(xRy)$ [*4·2 . (*30·01)]

***30·11.** $\vdash :. [R`y] \,.\, f(R`y) \,.\equiv: (\exists b) : xRy \,.\equiv_x .\, x = b : fb$ [*30·1 . *14·1]

Las siguientes proposiciones son aplicaciones inmediatas de las *14·31 ss., realizadas de acuerdo con la *30·1.

***30·12.** $\vdash :: \mathrm{E}!\,R`y \,.\supset :. [R`y] \,.\, p \vee \chi(R`y) \,.\equiv: p \,.\vee.\, [R`y] \,.\, \chi(R`y)$ [*14·31]

***30·13.** $\vdash :: \mathrm{E}!\,R`y \,.\supset :. [R`y] \,.\sim\chi(R`y) \,.\equiv.\sim\{[R`y] \,.\, \chi(R`y)\}$ [*14·32]

***30·14.** $\vdash :: \mathrm{E}!\,R`y \,.\supset :. [R`y] \,.\, p \supset \chi(R`y) \,.\equiv: p \,.\supset.\, [R`y] \,.\, \chi(R`y)$ [*14·33]

***30·141.** $\vdash :: \mathrm{E}!\,R`y \,.\supset :. [R`y] \,.\, \chi(R`y) \supset p \,.\equiv: [R`y] \,.\, \chi(R`y) \,.\supset.\, p$ [*14·331]

***30·142.** $\vdash :: \mathrm{E}!\,R`y \,.\supset :. [R`y] \,.\, p \equiv \chi(R`y) \,.\equiv: p \,.\equiv.\, [R`y] \,.\, \chi(R`y)$ [*14·332]

***30·15.** $\vdash :. p : [R`y] \,.\, \chi(R`y) :\equiv: [R`y] \,.\, p \,.\, \chi(R`y)$ [*14·34]

Las dos proposiciones que vienen a continuación son consecuencias inmediatas de las *14·113·112.

***30·16.** $\vdash : [R`y] \,.\, f(R`y, S`z) \,.\equiv.\, [S`z] \,.\, f(R`y, S`z)$ [*14·113]

$*30{\cdot}17.\ \vdash :. [R`y] . f(R`y, S`z) . \equiv :$
$(\exists b, c) : xRy . \equiv_x . x = b : xSz . \equiv_x . x = c : f(b, c)$ [$*14{\cdot}112$]

$*30{\cdot}18.\ \vdash :. \mathrm{E}\,!\, R`y : (z) . \phi z : \supset . \phi(R`y)$ [$*14{\cdot}18$]

$*30{\cdot}19.\ \vdash :. R`y = b . \supset : \psi(R`y) . \equiv . \psi b$ [$*14{\cdot}15$]

$*30{\cdot}2.\ \vdash :. \mathrm{E}\,!\, R`y . \equiv : (\exists b) : xRy . \equiv_x . x = b$ [$*4{\cdot}2 . *14{\cdot}11 . (*30{\cdot}01)$]

En la prueba de la $*30{\cdot}2$ hacemos uso de la definición $*30{\cdot}01$ y no de la $*30{\cdot}1$, porque $\mathrm{E}\,!\,(\imath x)(\phi x)$ no es de la forma $f(\imath x)(\phi x)$. Esto aparece si intentamos aplicar la definición $*14{\cdot}01$ a $\mathrm{E}\,!\,(\imath x)(\phi x)$, lo cual lleva a una expresión que contiene el constituyente sin sentido $\mathrm{E}\,!\, b$. Pero, por la definición $*30{\cdot}01$, cada vez que aparezca tipográficamente el símbolo "$R`y$" significa lo que resulta cuando este símbolo se sustituye por "$(\imath x)(xRy)$"; por tanto, "$\mathrm{E}\,!\, R`y$" significa "$\mathrm{E}\,!\,(\imath x)(xRy)$".

$*30{\cdot}21.\ \vdash :: \mathrm{E}\,!\, R`y . \equiv :. (\exists x) . xRy : xRy . zRy . \supset_{x,z} . x = z$
[$*14{\cdot}203 . (*30{\cdot}01)$]

$*30{\cdot}22.\ \vdash : \mathrm{E}\,!\, R`y . \equiv . R`y = (\imath x)(xRy)$ [$*14{\cdot}28 . (*30{\cdot}01)$]

Obsérvese que no tenemos necesariamente

$$R`y = (\imath x)(xRy),$$

lo cual es sólo verdad cuando $\mathrm{E}\,!\, R`y$.

$*30{\cdot}3.\ \vdash :. x = R`y . \equiv : zRy . \equiv_z . z = x$ [$*14{\cdot}202$]

$*30{\cdot}31.\ \vdash :. x = R`y . \equiv : xRy : zRy . \supset_z . z = x$ [$*14{\cdot}122 . *30{\cdot}3$]

$*30{\cdot}32.\ \vdash : \mathrm{E}\,!\, R`y . \equiv . (R`y)\, Ry$ [$*14{\cdot}22$]

$*30{\cdot}33.\ \vdash :: \mathrm{E}\,!\, R`y . \supset :. \psi(R`y) : \equiv : (\exists x) . xRy . \psi x : \equiv : xRy . \supset_x . \psi x$
[$*14{\cdot}26$]

$*30{\cdot}34.\ \vdash :. xRy . \equiv_x . xSy : \supset : \mathrm{E}\,!\, R`y . \equiv . \mathrm{E}\,!\, S`y$ [$*14{\cdot}271$]

$*30{\cdot}341.\ \vdash :. xRy . \equiv_x . xSy : \supset : \mathrm{E}\,!\, R`y . \equiv . R`y = S`y$

Dem.

$\vdash . *14{\cdot}21 . \quad \supset \vdash : R`y = S`y . \supset . \mathrm{E}\,!\, R`y$ (1)

$\vdash . *14{\cdot}27 . \mathrm{Comm} . \supset \vdash :. \mathrm{Hp} . \supset : \mathrm{E}\,!\, R`y . \supset . R`y = S`y$ (2)

$\vdash . (1) . (2) . \quad \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

$*30{\cdot}35.\ \vdash :. R = S . \supset : \mathrm{E}\,!\, R`y . \equiv . \mathrm{E}\,!\, S`y$ [$*30{\cdot}34 . *21{\cdot}43$]

$*30{\cdot}36.\ \vdash : \mathrm{E}\,!\, R`y . R = S . \supset . R`y = S`y$ [$*14{\cdot}27 . \mathrm{Imp} . *21{\cdot}43$]

$*30{\cdot}37.\ \vdash : \mathrm{E}\,!\, R`y . y = z . \supset . R`y = R`z$

Dem.

$\vdash . *14{\cdot}28 . \quad \supset \vdash : \mathrm{E}\,!\, R`y . \supset . R`y = R`y$ (1)

$\vdash . *13{\cdot}12 . \quad \supset \vdash :. y = z . \supset : R`y = R`y . \equiv . R`y = R`z$ (2)

$\vdash . (1) . (2) . \mathrm{Ass} . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

Esta proposición se usa muy frecuentemente.

***30·4.** $\vdash :. \mathrm{E}!\, R`y . \supset : a = R`y . \equiv . aRy$ [*14·241]

Esta es una proposición muy importante, de empleo constante.

***30·41.** $\vdash :. (y) . R`y = S`y . \equiv : (y) . \mathrm{E}!\, R`y : R = S$

Dem.

$\vdash . *14·21 . *10·11·27 . \supset \vdash : (y) . R`y = S`y . \supset . (y) . \mathrm{E}!\, R`y$ (1)

$\vdash . *14·13·142 . \quad \supset \vdash :. (y) . R`y = S`y . \supset : (x, y) : x = R`y . \equiv . x = S`y :$

[(1).*30·4] $\supset : (x, y) : xRy . \equiv . xSy :$

[*21·43] $\supset : R = S$ (2)

$\vdash . *30·36 . \quad \supset \vdash : \mathrm{E}!\, R`y . R = S . \supset . R`y = S`y :$

[*10·11·27·35] $\supset \vdash :. (y) . \mathrm{E}!\, R`y : R = S : \supset . (y) . R`y = S`y$ (3)

$\vdash . (1) . (2) . (3) . \quad \supset \vdash .$ Prop

***30·42.** $\vdash :. (y) . \mathrm{E}!\, R`y . \supset : (y) . R`y = S`y . \equiv . R = S$ [*30·41]

La hipótesis $(y) . \mathrm{E}!\, R`y$ se verifica por un número de relaciones especiales importantes, ejemplos de los cuales aparecerán en los números siguientes de esta sección.

***30·5.** $\vdash : \mathrm{E}!\, P`Q`z . \supset . \mathrm{E}!\, Q`z$

Dem.

$\vdash . *30·2 . \supset \vdash :. \mathrm{E}!\, P`Q`z . \equiv : (\exists b) : xP(Q`z) . \equiv_x . x = b :$

[*10·1] $\supset : (\exists b) : bP(Q`z) . \equiv . b = b :$

[*13·15] $\supset : (\exists b) . bP(Q`z) :$

[*14·21] $\supset : \mathrm{E}!\, Q`z :. \supset \vdash .$ Prop

***30·501.** $\vdash : \phi(P`Q`z) . \equiv . (\exists b, c) . c = Q`z . b = P`c . \phi b$

Acerca del significado de "$\phi(P`Q`z)$", véase la nota a la definición *30·02.

Dem.

$\vdash . *14·1·122 . \supset \vdash :: \phi(P`Q`z) . \equiv :. (\exists b) : bP(Q`z) : xP(Q`z) . \supset_x . x = b : \phi b :.$

[*14·205] $\equiv :. (\exists b) :. (\exists c) : c = Q`z : bPc : xPc . \supset_x . x = b : \phi b :.$

[*14·122·202] $\equiv :. (\exists b, c) . c = Q`z . b = P`c . \phi b :: \supset \vdash .$ Prop

***30·51.** $\vdash : b = P`Q`z . \equiv . (\exists c) . b = P`c . c = Q`z$ [*30·501 . *13·195]

***30·52.** $\vdash : \mathrm{E}!\, P`Q`z . \equiv . (\exists b, c) . b = P`c . c = Q`z$ [*30·51 . *14·204]

*31. CONVERSAS DE RELACIONES

Sumario del *31.

Si R es una relación, la relación que y tiene con x, cuando xRy se llama la *conversa* de R. Así, *mayor* es la conversa de *menor, antes* de *después, esposo* de *esposa.* La conversa de la identidad es la identidad, y la conversa de la diversidad es la diversidad. La conversa de R se escribe $\breve{R}$ (léase "R-conversa"). Cuando $R = \breve{R}$ se llama una relación *simétrica*; en caso contrario se llama *no-simétrica.* Cuando R es incompatible con R, $\breve{R}$ se llama *asimétrica.* Así, "primo" es simétrica (67) "hermano" es no-simétrica (porque cuando x es hermano de y, y puede ser hermano o hermana de x), y "esposo" es asimétrica.

La relación de $\breve{R}$ a R se llama "Cnv". Se mostrará que cada relación tiene una, y sólo una, conversa; por tanto, aplicando la notación del *30, esa es la Cnv'R; de este modo, $R = \text{Cnv}'R$. Tenemos, pues, dos notaciones para la conversa de R; la segunda es más conveniente para la conversa de una relación representada por una letra única.

Las proposiciones más importantes de este número son las siguientes:

***31·13.** $\vdash . \text{E} ! \text{Cnv}'P$

Esto es, cualquier relación P tiene una conversa. Por eso la relación "Cnv" verifica la hipótesis $(y) . \text{E} ! R'y$, esto es, tenemos $(P) . \text{E} ! \text{Cnv}'P$.

***31·32.** $\vdash : P = Q . \equiv . \breve{P} = \breve{Q}$

Es decir, dos relaciones son idénticas cuando, y sólo cuando, sus conversas son idénticas.

***31·33.** $\vdash . \text{Cnv}'\text{Cnv}'P = P$

Es decir, cualquier relación es la conversa de su conversa.

Muchos de los usos que se den en adelante a la noción de la conversa de una relación sólo necesitan las proposiciones que incorporan las definiciones de $\breve{P}$ y Cnv, a saber

***31·11.** $\vdash : x \breve{P} y . \equiv . yPx$

y

***31·131.** $\vdash : x (\text{Cnv}'P) y . \equiv . yPx$

---

(67) Téngase en cuenta que la palabra inglesa "cousin" (que es la que viene en el texto original) significa tanto primo como prima. La relación "primo" (en español) no es, sin embargo, simétrica. (N. del t.).

***31·01.** $\mathrm{Cnv} = \hat{Q}\hat{P}\{xQy . \equiv_{x,y} . yPx\}$ Df

***31·02.** $\breve{P} = \hat{x}\hat{y}(yPx)$ Df

***31·1.** $\vdash :. Q \,\mathrm{Cnv}\, P . \equiv : xQy . \equiv_{x,y} . yPx$ [*21·3 . (*31·01)]

***31·101.** $\vdash : Q \,\mathrm{Cnv}\, P . R \,\mathrm{Cnv}\, P . \supset . Q = R$

Dem.

$\vdash .$ *31·1 $. \supset \vdash :.$ Hp $. \supset : xQy . \equiv_{x,y} . yPx : xRy . \equiv_{x,y} . yPx :$
[*11·371] $\supset : xQy . \equiv_{x,y} . xRy :$
[*21·43] $\supset : Q = R :. \supset \vdash .$ Prop

***31·11.** $\vdash : x\breve{P}y . \equiv . yPx$ [*21·3 . (*31·02)]

***31·111.** $\vdash . \breve{P} \,\mathrm{Cnv}\, P$ [*31·1·11]

***31·12.** $\vdash . \breve{P} = \mathrm{Cnv}`P$

Dem.

$\vdash .$ *31·101 $. \supset \vdash : Q \,\mathrm{Cnv}\, P . \breve{P} \,\mathrm{Cnv}\, P . \supset . Q = \breve{P} :$
[*31·111] $\supset \vdash : Q \,\mathrm{Cnv}\, P . \supset . Q = \breve{P}$ (1)
$\vdash .$ (1) . *10·11 . *31·111 $. \supset$
$\vdash : \breve{P} \,\mathrm{Cnv}\, P : Q \,\mathrm{Cnv}\, P . \supset_Q . Q = \breve{P} :$
[*30·31] $\supset \vdash . \breve{P} = \mathrm{Cnv}`P$

***31·13.** $\vdash . \mathrm{E}!\,\mathrm{Cnv}`P$ [*14·21 . *31·12]

***31·131.** $\vdash : x(\mathrm{Cnv}`P)\,y . \equiv . yPx$ [*31·11·12 . *21·43]

***31·132.** $\vdash : Q \,\mathrm{Cnv}\, P . \equiv . Q = \mathrm{Cnv}`P . \equiv . Q = \breve{P}$ [*30·4 . *31·13·12]

***31·14.** $\vdash . \mathrm{Cnv}`(P \dot{\cap} Q) = \mathrm{Cnv}`P \dot{\cap} \mathrm{Cnv}`Q$

Dem.

$\vdash .$ *31·131 $. \supset \vdash : x\{\mathrm{Cnv}`(P \dot{\cap} Q)\}\,y . \equiv . y(P \dot{\cap} Q)\,x .$
[*21·33] $\equiv . yPx . yQx .$
[*31·131] $\equiv . x(\mathrm{Cnv}`P)\,y . x(\mathrm{Cnv}`Q)\,y .$
[*21·33] $\equiv . x\{\mathrm{Cnv}`P \dot{\cap} \mathrm{Cnv}`Q\}\,y$ (1)
$\vdash .$ (1) . *11·11 . *21·43 $. \supset \vdash .$ Prop

***31·15.** $\vdash . \mathrm{Cnv}`(P \dot{\cup} Q) = \mathrm{Cnv}`P \dot{\cup} \mathrm{Cnv}`Q$ **[Prueba similar]**

***31·16.** $\vdash . \mathrm{Cnv}`\dot{-}P = \dot{-}(\mathrm{Cnv}`P)$

Dem.

$\vdash .$ *31·131 $. \supset \vdash : x(\mathrm{Cnv}`\dot{-}P)\,y . \equiv . y \dot{-} Px .$
[*23·35] $\equiv . \sim(yPx) .$
[*31·131] $\equiv . \sim\{x(\mathrm{Cnv}`P)\,y\} .$
[*23·35] $\equiv . x\{\dot{-}(\mathrm{Cnv}`P)\}\,y$ (1)
$\vdash .$ (1) . *11·11 . *21·43 $. \supset \vdash .$ Prop

***31·17.** $\vdash :. y = \breve{P}`x . \equiv : xPz . \equiv_z . z = y$ [*30·3 . *31·11]

***31·18.** $\vdash :. \mathrm{E}\,!\,\breve{P}`x . \equiv : (\exists y) : xPz . \equiv_z . z = y$ [*30·2 . *31·11]

***31·21.** $\vdash . \mathrm{Cnv}`\dot{\Lambda} = \dot{\Lambda}$

Dem.

$$\vdash . *31{\cdot}131 . \supset \vdash : x\,(\mathrm{Cnv}`\dot{\Lambda})\,y . \equiv . y\dot{\Lambda}x :$$
$$[*25{\cdot}105] \quad \supset \vdash . \sim x\,(\mathrm{Cnv}`\dot{\Lambda})\,y \qquad (1)$$
$$\vdash . (1) . *11{\cdot}11 . *25{\cdot}15 . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$$

***31·22.** $\vdash . \mathrm{Cnv}`\dot{\mathrm{V}} = \dot{\mathrm{V}}$ [Prueba similar]

***31·23.** $\vdash : \breve{P} = \dot{\mathrm{V}} . \equiv . P = \dot{\mathrm{V}}$

Dem.

$$\vdash . *25{\cdot}14 . \supset \vdash : \breve{P} = \dot{\mathrm{V}} . \equiv . (x, y) . x\breve{P}y .$$
$$[*31{\cdot}11.*11{\cdot}33] \qquad \equiv . (x, y) . yPx .$$
$$[*11{\cdot}2] \qquad \equiv . (y, x) . yPx .$$
$$[*25{\cdot}14] \qquad \equiv . P = \dot{\mathrm{V}} : \supset \vdash . \mathrm{Prop}$$

***31·24.** $\vdash : \breve{P} = \dot{\Lambda} . \equiv . P = \dot{\Lambda}$ [Prueba similar]

***31·32.** $\vdash : P = Q . \equiv . \breve{P} = \breve{Q}$

Dem.

$$\vdash . *21{\cdot}43 . \supset \vdash :. P = Q . \equiv : xPy . \equiv_{x,y} . xQy :$$
$$[*4{\cdot}86{\cdot}21.*31{\cdot}11] \qquad \equiv : y\breve{P}x . \equiv_{x,y} . y\breve{Q}x :$$
$$[*11{\cdot}2] \qquad \equiv : y\breve{P}x . \equiv_{y,x} . y\breve{Q}x :$$
$$[*21{\cdot}43] \qquad \equiv : \breve{P} = \breve{Q} :. \supset \vdash . \mathrm{Prop}$$

***31·33.** $\vdash . \mathrm{Cnv}`\mathrm{Cnv}`P = P$

Dem.

$$\vdash . *31{\cdot}131 . \supset \vdash : x\,(\mathrm{Cnv}`\mathrm{Cnv}`P)\,y . \equiv . y\,(\mathrm{Cnv}`P)\,x .$$
$$[*31{\cdot}131] \qquad \equiv . xPy \qquad (1)$$
$$\vdash . (1) . *11{\cdot}11 . *21{\cdot}43 . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$$

***31·34.** $\vdash : P = \breve{Q} . \equiv . Q = \breve{P}$

Dem.

$$\vdash . *31{\cdot}32 . \supset \vdash : P = \breve{Q} . \equiv . \breve{P} = \mathrm{Cnv}`\breve{Q}$$
$$[*31{\cdot}12{\cdot}32] \qquad = \mathrm{Cnv}`\mathrm{Cnv}`Q$$
$$[*31{\cdot}33] \qquad = Q : \supset \vdash . \mathrm{Prop}$$

***31·4.** $\vdash : P \subseteq Q . \equiv . \breve{P} \subseteq \breve{Q}$ [*31·11 . *11·33]

***31·41.** $\vdash : P \subseteq \breve{Q} . \equiv . \breve{P} \subseteq Q$ [*31·4·33·12]

***31·5.** $\vdash : \dot{\exists}\,!\,P . \equiv . \dot{\exists}\,!\,\breve{P}$ [*31·24 . Transp . *25·54]

***31·51.** $\vdash : (P) . f\breve{P} . \equiv . (P) . fP$

Dem.

$$\vdash . *10{\cdot}1 . \quad \supset \vdash : (P) . fP . \supset . f\breve{P} :$$

$$[*10{\cdot}11{\cdot}21]\ \supset \vdash : (P).fP.\supset.(P).f\breve{P} \qquad (1)$$
$$\vdash .*10{\cdot}1.*31{\cdot}12.\supset$$
$$\vdash : (P).f\breve{P}.\supset.f(\mathrm{Cnv}`\breve{P}).$$
$$[*31{\cdot}33{\cdot}12] \qquad \supset .fP :$$
$$[*10{\cdot}11{\cdot}21]\ \supset \vdash : (P).f\breve{P}.\supset.(P).fP \qquad (2)$$
$$\vdash .(1).(2).\supset \vdash .\mathrm{Prop}$$

***31·52.** $\vdash : (\exists P).f\breve{P}.\equiv.(\exists P).fP$ [*31·51 . Transp]

*32. RELACIONANTES Y RELACIONADOS DE UN TERMINO DADO CON RESPECTO A UNA RELACION DADA

Sumario del *32.

Dada una relación R, la clase de términos que tienen la relación R con respecto a un término dado y se llaman los *relacionantes* de y, y la clase de los términos con respecto a los cuales un término dado x tiene la relación R se llaman *relacionados* de x. Mediante el símbolo $\overrightarrow{R}$ indicaremos la relación de la clase de los relacionantes de y con respecto a y, y por $\overleftarrow{R}$ la relación entre la clase de los relacionados de x con respecto a x. También es conveniente disponer de una notación para las relaciones de $\overrightarrow{R}$ y $\overleftarrow{R}$ con respecto a R. Representaremos la relación de $\overrightarrow{R}$ a R por "sg", donde "sg" significa "sagitta". De manera similar, representaremos por "gs" la relación de $\overleftarrow{R}$ a R, para sugerir una flecha que va desde la derecha hacia la izquierda, en vez de izquierda a derecha. Tanto $\overrightarrow{R}$ como $\overleftarrow{R}$ son de gran utilidad en orden a salvar las funciones descriptivas a las que dan lugar; así, pues, $\overrightarrow{R}`y = \hat{x}\,(xRy)$ y $\overleftarrow{R}`x = \hat{y}\,(xRy)$. De este modo, por ejemplo, si R es la relación de padre a hijo, $\overrightarrow{R}`y =$ los padres de $y$, $\overleftarrow{R}`x =$ los hijos de x. Si R es la relación de menor a mayor entre los números de una clase, $\overrightarrow{R}`y =$ los números menores que $y$, y $\overleftarrow{R}`x =$ los números mayores que x. Cuando $R`y$ existe, $\overrightarrow{R}`y$ es la clase cuyo único miembro es $R`y$. Pero cuando hay muchos términos que tienen la relación $R$ con respecto a $y$, $\overrightarrow{R}`y$, que es la clase de esos términos, proporciona una notación que no puede ser proporcionada por $R`y$. Y, similarmente, si hay muchos términos respecto de los cuales $x$ tiene la relación $R$, $\overleftarrow{R}`x$ ofrece la notación de dichos términos. Así, por ejemplo, sea R la relación "sen", esto es, la relación que x tiene con respecto a y cuando $x = \operatorname{sen} y$. Entonces "$\overleftarrow{\text{sen}}`x$" representa a todos los valores de y tales que $x = \operatorname{sen} y$, es decir, todos los valores de $\operatorname{sen}^{-1} x$ o $\operatorname{arcsen} x$. A diferencia del símbolo habitual, no resulta ambiguo, ya que en vez de representar a uno de estos valores, representa la clase de ellos.

Las definiciones de $\overrightarrow{R}$, $\overleftarrow{R}$, sg, sg, son las siguientes:

***32·01.** $\overrightarrow{R} = \hat{\alpha}\hat{y}\,\{\alpha = \hat{x}\,(xRy)\}$ Df

***32·02.** $\overleftarrow{R} = \hat{\beta}\hat{x}\,\{\beta = \hat{y}\,(xRy)\}$ Df

***32·03.** $\mathrm{sg} = \hat{A}\hat{R}\,(A = \overrightarrow{R})$ Df

***32·04.** $\mathrm{gs} = \hat{A}\hat{R}\,(A = \overleftarrow{R})$ Df

En virtud de estas definiciones, tendremos $\mathrm{sg}`R = \overrightarrow{R}$, y $\mathrm{gs}`R = \overleftarrow{R}$. Esto ofrece una notación alternativa que es conveniente al tratar sobre una relación no representada por una letra única.

Debe observarse que si R es una relación homogénea (es decir una en la que relacionantes y relacionados son del mismo tipo), entonces $\overrightarrow{R}$ y $\overleftarrow{R}$ no son homogéneas, sino que relaciona una clase con objetos del tipo de sus miembros.

En virtud de las definiciones de $\overrightarrow{R}$ y $\overleftarrow{R}$, tendremos

***32·13.** $\vdash . \overrightarrow{R}`y = \hat{x}(xRy)$

***32·131.** $\vdash . \overleftarrow{R}`x = \hat{y}(xRy)$

Así, por *14·21, tendremos $\mathrm{E}!\,\overrightarrow{R}`y$ y $\mathrm{E}!\,\overleftarrow{R}`x$. De este modo, cualquiera que sea la relación R, tendremos $(y) . \mathrm{E}!\,\overrightarrow{R}`y$ y $(x) . \mathrm{E}!\,\overleftarrow{R}`x$. En general no tenemos $(y) . \exists!\,\overrightarrow{R}`y$ o $(x) . \exists!\,\overleftarrow{R}`x$. Así, tomando R como la relación de padres a hijos, $\overrightarrow{R}`y =$ los padres de $y$, y $\overleftarrow{R}`x =$ los hijos de x. De este modo, $\overleftarrow{R}`x = \Lambda$, es decir $\sim \exists!\,\overrightarrow{R}`x$, cuando x no es hijo, y $\overrightarrow{R}`y = \Lambda$, es decir, $\sim \exists!\,\overrightarrow{R}`y$, cuando y es Adán o Eva. Las dos clases de existencia $\mathrm{E}!\,\overrightarrow{R}`y$ y $\exists!\,\overrightarrow{R}`y$, pueden ambas ser predicados *significativamente* de $\overrightarrow{R}`y$, porque "$\overrightarrow{R}`y$" es una función descriptiva cuyo valor es una clase; y el mismo se aplica a $\overleftarrow{R}`x$. Se verá que (por *14·21)

$$\exists!\,\overrightarrow{R}`y . \supset . \mathrm{E}!\,\overrightarrow{R}`y,$$

pero la implicación conversa, en general, no es válida.

Tenemos

***32·16.** $\vdash : \overrightarrow{R} = \overrightarrow{S} . \equiv . \overleftarrow{R} = \overleftarrow{S} . \equiv . R = S$

También por las *32·18·181,

$$\vdash : x \in \overrightarrow{R}`y . \equiv . xRy . \equiv . y \in \overleftarrow{R}`x.$$

Así, pues, por el uso de $\overrightarrow{R}`y$ o de $\overleftarrow{R}`x$, cada expresión de la forma "xRy" puede reducirse a una expresión aseverando los miembros de una clase. Sin embargo, puesto que la clase en cuestión se da por una función descriptiva, y las funciones descriptivas se definen por medio de relaciones, no obtenemos así un método de reducir la teoría de relaciones a teoría de clases.

***32·01.** $\overrightarrow{R} = \hat{\alpha}\hat{y}\{\alpha = \hat{x}(xRy)\}$ Df

***32·02.** $\overleftarrow{R} = \hat{\beta}\hat{x}\{\beta = \hat{y}(xRy)\}$ Df

***32·03.** $\mathrm{sg} = \hat{A}\hat{R}(A = \overrightarrow{R})$ Df

***32·04.** $\mathrm{gs} = \hat{A}\hat{R}(A = \overleftarrow{R})$ Df

***32·1.** $\vdash : \alpha\overrightarrow{R}y . \equiv . \alpha = \hat{x}(xRy)$ [*21·3 . (*32·01)]

***32·101.** $\vdash : \beta\overleftarrow{R}x . \equiv . \beta = \hat{y}(xRy)$ [*21·3 . (*32·02)]

***32·11.** $\vdash . \hat{x}(xRy) = \overrightarrow{R}`y$ [*32·1 . *30·3]

$*32{\cdot}111.\ \vdash .\ \hat{y}(xRy) = \overleftarrow{R}`x$ [*32·101 . *30·3]

$*32{\cdot}12.\ \vdash .\ \mathrm{E} ! \overrightarrow{R}`y$ [*32·11 . *14·21]

$*32{\cdot}121.\ \vdash .\ \mathrm{E} ! \overleftarrow{R}`x$ [*32·111 . *14·21]

"$\mathrm{E} ! \overrightarrow{R}`y$" no debe confundirse con "$\exists ! \overrightarrow{R}`y$". El primero significa que hay una clase tal como $\overrightarrow{R}`y$, la cual, como acabamos de ver, siempre es verdadera; el segundo significa que $\overrightarrow{R}`y$ no es nulo, lo que sólo es verdad si y es un término respecto del cual algunos otros términos tienen la relación R. Obsérvese que, por las *14·21, tanto $\exists ! \overrightarrow{R}`y$ como $\sim \exists ! \overrightarrow{R}`y$ implican $\exists ! \overrightarrow{R}`y$. La contradictoria de $\exists ! \overrightarrow{R}`y$ no es $\sim \exists ! \overrightarrow{R}`y$, sino $\sim\{[\overrightarrow{R}`y] . \exists ! \overrightarrow{R}`y\}$. Esta última no debe implicar $\mathrm{E} ! \overrightarrow{R}`y$, a no ser por el hecho de que $\mathrm{E} ! \overrightarrow{R}`y$ es siempre verdadero.

$*32{\cdot}13.\ \vdash .\ \overrightarrow{R}`y = \hat{x}(xRy)$ [*32·11 . *20·59]

$*32{\cdot}131.\ \vdash .\ \overleftarrow{R}`x = \hat{y}(xRy)$ [*32·111 . *20·59]

$*32{\cdot}132.\ \vdash :\ \alpha\overrightarrow{R}y . \equiv . \alpha = \overrightarrow{R}`y . \equiv . \alpha = \hat{x}(xRy)$ [*32·1·13 . *20·57]

$*32{\cdot}133.\ \vdash :\ \beta\overleftarrow{R}x . \equiv . \beta = \overleftarrow{R}`x . \equiv . \beta = \hat{y}(xRy)$ [*32·101·131 . *20·57]

En general, el uso de la *20·57 sería tácito. Da la casualidad de que constantemente tenemos proposiciones como la *32·13, en la cual una expresión descriptiva se muestra como idéntica a una clase. En tales casos, siempre que las propiedades de las clases se aseveren de la expresión descriptiva, la *20·57 es relevante.

$*32{\cdot}14.\ \vdash :\ \overrightarrow{R} = \overrightarrow{S} . \equiv . R = S$

Dem.

$\vdash . *21{\cdot}43 . \supset \vdash :: \overrightarrow{R} = \overrightarrow{S} . \equiv :. \alpha\overrightarrow{R}y . \equiv_{\alpha,y} . \alpha\overrightarrow{S}y :.$

[*32·1] $\equiv :. \alpha = \hat{x}(xRy) . \equiv_{\alpha,y} . \alpha = \hat{x}(xSy) :.$

[*11·2] $\equiv :. (y) :. \alpha = \hat{x}(xRy) . \equiv_{\alpha} . \alpha = \hat{x}(xSy) :.$

[*20·25] $\equiv :. (y) : \hat{x}(xRy) = \hat{x}(xSy) :.$

[*20·15] $\equiv :. (y) :. (x) : xRy . \equiv . xSy :.$

[*11·2] $\equiv :. (x, y) : xRy . \equiv . xSy :.$

[*21·43] $\equiv :. R = S :: \supset \vdash .$ Prop

$*32{\cdot}15.\ \vdash :\ \overleftarrow{R} = \overleftarrow{S} . \equiv . R = S$ [Prueba similar]

$*32{\cdot}16.\ \vdash :\ \overrightarrow{R} = \overrightarrow{S} . \equiv . \overleftarrow{R} = \overleftarrow{S} . \equiv . R = S$ [*32·14·15]

$*32{\cdot}18.\ \vdash :\ x \in \overrightarrow{R}`y . \equiv . xRy$ [*32·13 . *20·33]

$*32{\cdot}181.\ \vdash :\ y \in \overleftarrow{R}`x . \equiv . xRy$ [*32·131 . *20·33]

$*32{\cdot}182.\ \vdash :\ x \in \overrightarrow{R}`y . \equiv . y \in \overleftarrow{R}`x$ [*32·18·181]

El cambio de "xRy" a "$x \in \overrightarrow{R}`y$" es algo que comúnmente se efectúa en el lenguaje. Por ejemplo, supongamos que "$xRy$" es "$x$ ama a $y$"; entonces "$x \in \overrightarrow{R}`y$" es "$x$ es un amante de y".

***32·19.** $\vdash : R \subseteq S . \supset . \overrightarrow{R}`y \subset \overrightarrow{S}`y . \overleftarrow{R}`x \subset \overleftarrow{S}`x$

Dem.

$$\vdash . *32\cdot18 . \supset \vdash :. \text{Hp} . \supset : x \in \overrightarrow{R}`y . \supset_x . x \in \overrightarrow{S}`y :$$
$$[*22\cdot1] \qquad \supset : \overrightarrow{R}`y \subset \overrightarrow{S}`y \qquad (1)$$
$$\vdash . *32\cdot181 . \supset \vdash :. \text{Hp} . \supset : y \in \overleftarrow{R}`x . \supset_y . y \in \overleftarrow{S}`x :$$
$$[*22\cdot1] \qquad \supset : \overleftarrow{R}`x \subset \overleftarrow{S}`x \qquad (2)$$
$$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash . \text{Prop}$$

***32·2.** $\vdash : A \operatorname{sg} R . \equiv . A = \overrightarrow{R}$ [*21·3 . (*32·03)]

***32·201.** $\vdash : A \operatorname{gs} R . \equiv . A = \overleftarrow{R}$ [*21·3 . (*32·04)]

***32·21.** $\vdash . \overrightarrow{R} = \operatorname{sg}`R$ [*32·2 . *30·3]

***32·211.** $\vdash . \overleftarrow{R} = \operatorname{gs}`R$ [*32·201 . *30·3]

***32·22.** $\vdash . \mathrm{E} ! \operatorname{sg}`R$ [*32·21 . *14·21]

***32·221.** $\vdash . \mathrm{E} ! \operatorname{gs}`R$ [*32·211 . *14·21]

***32·23.** $\vdash . \operatorname{sg}`R = \overrightarrow{R}$ [*32·21 . *21·2·57]

***32·231.** $\vdash . \operatorname{gs}`R = \overleftarrow{R}$ [*32·211 . *21·2·57]

***32·24.** $\vdash . \operatorname{sg}`\breve{R} = \operatorname{gs}`R$

Dem.

$$\vdash . *32\cdot23 . (*32\cdot01) . \qquad \supset \vdash . \operatorname{sg}`\breve{R} = \hat{\alpha}\hat{y}\{\alpha = \hat{x}(x \breve{R} y)\} .$$
$$[*21\cdot33] \qquad \supset \vdash : \alpha (\operatorname{sg}`\breve{R})\, y . \equiv . \alpha = \hat{x}(x \breve{R} y) .$$
$$[*31\cdot11 . *20\cdot15] \qquad \equiv . \alpha = \hat{x}(y R x) .$$
$$[*32\cdot101] \qquad \equiv . \alpha \overleftarrow{R} x .$$
$$[*32\cdot211] \qquad \equiv . \alpha (\operatorname{gs}`R)\, x \qquad (1)$$
$$\vdash . (1) . *11\cdot11 . *21\cdot43 . \supset \vdash . \text{Prop}$$

***32·241.** $\vdash . \operatorname{gs}`\breve{R} = \operatorname{sg}`R$ [Prueba similar]

***32·25.** $\vdash : A \operatorname{sg} R . \equiv . A = \operatorname{sg}`R$ [*30·4 . *32·22]

***32·251.** $\vdash : A \operatorname{gs} R . \equiv . A = \operatorname{gs}`R$ [*30·4 . *32·221]

***32·3.** $\vdash . \{\operatorname{sg}`(R \dot{\cap} S)\}`y = \overrightarrow{R}`y \cap \overrightarrow{S}`y$

Obsérvese que *no* tenemos

$$\operatorname{sg}`(R \dot{\cap} S) = \operatorname{sg}`R \dot{\cap} \operatorname{sg}`S.$$

Dem.

$$\vdash .*32{\cdot}23{\cdot}13 . \supset \vdash . \{\mathrm{sg}`(R \mathbin{\hat{\cap}} S)\}`y = \hat{x}\,\{x\,(R \mathbin{\hat{\cap}} S)\,y\}$$
$$[*23{\cdot}33] \qquad = \hat{x}\,(xRy . xSy)$$
$$[*22{\cdot}39] \qquad = \hat{x}\,(xRy) \cap \hat{x}\,(xSy)$$
$$[*32{\cdot}13] \qquad = \overrightarrow{R}`y \cap \overrightarrow{S}`y . \supset \vdash . \text{Prop}$$

***32·31.** $\vdash . \{\mathrm{gs}`(R \mathbin{\hat{\cap}} S)\}`x = \overleftarrow{R}`x \cap \overleftarrow{S}`x$

***32·32.** $\vdash . \{\mathrm{sg}`(R \mathbin{\hat{\cup}} S)\}`y = \overrightarrow{R}`y \cup \overrightarrow{S}`y$

***32·33.** $\vdash . \{\mathrm{gs}`(R \mathbin{\hat{\cup}} S)\}`x = \overleftarrow{R}`x \cup \overleftarrow{S}`x$

***32·34.** $\vdash . \{\mathrm{sg}`(\dot{-}R)\}`y = -\overrightarrow{R}`y$

***32·35.** $\vdash . \{\mathrm{gs}`(\dot{-}R)\}`x = -\overleftarrow{R}`x$

Las pruebas de estas proposiciones son similares a la de la *32·3.

***32·4.** $\vdash :. \mathrm{E}\,!\,R`z . \equiv : \exists\,!\,\overrightarrow{R}`z : x, y \in \overrightarrow{R}`z . \supset_{x,y} . x = y \quad [*30{\cdot}21 . *32{\cdot}18]$

***32·41.** $\vdash :. \mathrm{E}\,!\,S`y . \supset : \overrightarrow{R}`y = \overrightarrow{S}`y . \equiv . R`y = S`y$

Dem.

$$\vdash .*4{\cdot}86 . \quad \supset \vdash :: xSy . \equiv_x . x = b : \supset :. \quad xRy . \equiv_x . xSy : \equiv : xRy . \equiv_x . x = b \qquad (1)$$
$$\vdash .(1) .*5{\cdot}32 . \supset \vdash :. xSy . \equiv_x . x = b : xRy . \equiv_x . xSy : \equiv : \quad xSy . \equiv_x . x = b : xRy . \equiv_x . x = b \qquad (2)$$
$$\vdash .(2) .*10{\cdot}11{\cdot}281 . *32{\cdot}18{\cdot}181 . \supset$$
$$\vdash :. (\exists b) : xSy . \equiv_x . x = b : \overrightarrow{R}`y = \overrightarrow{S}`y : \equiv : (\exists b) : xSy . \equiv_x . x = b : xRy . \equiv_x . x = b :$$
$$[*30{\cdot}3.*14{\cdot}13] \qquad \equiv : (\exists b) : xSy . \equiv_x . x = b : R`y = b :$$
$$[*14{\cdot}101] \qquad \equiv : R`y = S`y \qquad (3)$$
$$\vdash .(3) .*30{\cdot}2 . \supset \vdash :. \mathrm{E}\,!\,S`y . \overrightarrow{R}`y = \overrightarrow{S}`y . \equiv . R`y = S`y :. \supset \vdash . \text{Prop}$$

***32·42.** $\vdash :. \overrightarrow{R}`y = \overrightarrow{S}`y . \supset : \mathrm{E}\,!\,R`y . \equiv . \mathrm{E}\,!\,S`y \quad [*30{\cdot}34 . *32{\cdot}18]$

*33. DOMINIOS, DOMINIOS CONVERSOS, Y CAMPOS DE RELACIONES

Sumario del *33.

Si R es una relación cualquiera, el *dominio* de R, que simbilizamos por $\mathrm{D}`R$, es la clase de los términos que tienen la relación $R$ con uno u otro; el *dominio converso*, $\breve{\mathrm{D}}`R$, es la clase de términos respecto a los cuales, uno u otro tienen la relación R; y el *campo*, $C`R$, es la suma del dominio y del dominio converso. (Nótese que el campo sólo tiene significación cuando R sea una relación *homogénea*.)

Las notaciones indicadas, $\mathrm{D}`R$, $\breve{\mathrm{D}}`R$, $C`R$ se derivan de las notaciones D, $\breve{\mathrm{D}}$, C para las relaciones, respecto a una relación de su dominio, dominio converso y campo, respectivamente. Tenemos

$$\mathrm{D}`R = \hat{x}\{(\exists y) . xRy\}$$
$$\breve{\mathrm{D}}`R = \hat{y}\{(\exists x) . xRy\}$$
$$C`R = \hat{x}\{(\exists y) : xRy . \mathrm{v} . yRx\};$$

Por tanto, definimos D, $\breve{\mathrm{D}}$ y C como sigue:

***33·01.** $\mathrm{D} = \hat{\alpha}\hat{R}\,[\alpha = \hat{x}\{(\exists y) . xRy\}]$ Df

***33·02.** $\breve{\mathrm{D}} = \hat{\beta}\hat{R}\,[\beta = \hat{y}\{(\exists x) . xRy\}]$ Df

***33·03.** $C = \hat{\gamma}\hat{R}\,[\gamma = \hat{x}\{(\exists y) : xRy . \mathrm{v} . yRx\}]$ Df

La letra C se eligió por ser la inicial de la palabra "campus". No es preciso una nueva definición para la relación de x con respecto a R cuando x es un miembro del campo de R. Esta relación, que llamaremos F, se define así:

***33·04.** $F = \hat{x}\hat{R}\{(\exists y) : xRy . \mathrm{v} . yRx\}$ Df

Encontraremos que $C = \overrightarrow{F} . \breve{\mathrm{D}}$ será la relación de una relación con respecto a su dominio, $\overleftarrow{\mathrm{D}}`\alpha$ será la clase de las relaciones que tienen por dominio a α. Observaciones similares se aplican a $\breve{\mathrm{D}}$ y a C. El *campo* de una relación es especialmente importante en lo que se refiere a su conexión con las series.

Las proposiciones de este número se usan constantemente a lo largo de lo que resta del libro. Las ideas de dominio, dominio converso, y campo son muy generales y tienen, en cierto modo, usos diferentes para las relaciones de clases distintas. Consideremos primeramente la clase de relaciones que dan origen a una función descriptiva $R`y$. Para esto requerimos que $R`y$ deba existir siempre que haya algo que tenga la relación R con y; esto es, que nunca debe haber más que un término que tenga la relación R con un término dado y. En este caso, los valores de y para los cuales existe $R`y$ constituirán el "dominio converso" de $R$, es decir, $\breve{\mathrm{D}}`R$, y los

valores que tome $R`y$ para varios valores de $y$ constituirán el "dominio" de $R$, es decir, $D`R$. Por lo tanto, el dominio converso es la clase de los posibles argumentos para la función descriptiva $R`y$, y el dominio es la clase de todos los valores de la función. Así, por ejemplo, si $R$ es la relación del cuadrado de un número entero $y$ con respecto a $y$, entonces $R`y$ = el cuadrado de y, con tal que y sea un número entero. En este caso, $\breve{C}`R$ es la clase de los números enteros, y $D`R$ es la clase de los cuadrados perfectos. O, de nuevo, supongamos que R es la relación de esposo a esposa; entonces $R`y$ = la esposa de $y$, $\breve{C}`R$ = los hombres casados, $D`R$ = las mujeres casadas. En tales casos, el *campo* tiene ordinariamente poca importancia; y si los valores de la función $R`y$ no son del mismo tipo que sus argumentos –es decir, si la relación R no es *homogénea*– el campo carece de sentido. Así, por ejemplo, si R es una relación homógenea, $\vec{R}$ y $\overleftarrow{R}$ no son homogéneas y, por lo tanto, "$C`\vec{R}$" y "$C`\overleftarrow{R}$" son sinsentidos.

Supongamos a continuación que R es la clase de relaciones que generan una serie, digamos la relación de menor a mayor entre los números enteros. Entonces, $D`R$ = todos los números enteros que son menores que algún otro entero = todos los números enteros, $D`R$ = todos los enteros que son mayores que algún otro entero = todos los números enteros excepto el 0. En este caso, $C`R$ = todos los números enteros que son mayores o menores que algún otro entero = todos los números enteros. Generalmente, si $R$ genera una serie, $D`R$ = todos los miembros de la serie excepto el último (si lo hubiese), $\breve{C}`R$ = todos los miembros de la serie excepto el primero (si lo hubiese), y $C`R$ = todos los miembros de la serie. En este caso, "xFR" expresa el hecho de que x es un miembro de la serie. Así, cuando R genera una serie, $C`R$ resulta importante, y la relación F es igualmente útil.

Tendremos ocasión de tratar acerca de muchas relaciones que tienen alguna de las propiedades de las series, y de muchas proposiciones que, aunque sólo interesan en conexión con las relaciones seriales, generalmente son más valiosas. En tales casos el campo de una relación de modo análogo debe ser importante. Así, en la sección sobre la inducción (Parte II, Sección E) donde preparamos el camino para la construcción de relaciones seriales por medio de una cierta clase de relaciones no-seriales, y a lo largo de la aritmética de relaciones, (Parte IV), los campos de relaciones intervendrán constantemente. Pero en las primeras partes del trabajo, lo que tiene lugar principalmente son los dominios y los dominios conversos.

Entre las propiedades más importantes de los dominios, dominios conversos y campos, que se prueban en este número, están las que vienen a continuación.

Siempre tenemos $E ! D`R$, $E ! \breve{C}`R$, $E ! C`R$ (*33·12·121·122). (El último de éstos, sin embargo, es sólo significante cuando R es homogéneo).

***33·13.** $\vdash : x \in D`R . \equiv . (\exists y) . xRy$

***33·131.** $\vdash : y \in \breve{C}`R . \equiv . (\exists x) . xRy$

***33·132.** $\vdash :. x \in C`R . \equiv : (\exists y) : xRy . \vee . yRx$

***33·14.** $\vdash : xRy . \supset . x \in D`R . y \in \breve{C}`R$

*33·16. $\vdash . C`R = \mathrm{D}`R \cup \mathrm{\breve{C}}`R$

*33·2·21·22. El dominio converso de una relación es el dominio de su conversa, el dominio de una relación es el dominio converso de su conversa, y el campo de una relación es el campo de su conversa.

*33·24. $\vdash : \exists ! \mathrm{D}`R . \equiv . \exists ! \mathrm{\breve{C}}`R . \equiv . \exists ! C`R . \equiv . \dot{\exists} ! R$

*33·4. $\vdash . \mathrm{D}`R = \hat{x} \{\exists ! \overleftarrow{R}`x\}$

con las proposiciones correspondientes (*33·41·42) para $\mathrm{\breve{C}}`R$ y $C`R$.

*33·43. $\vdash : \mathrm{E} ! R`y . \supset . y \in \mathrm{\breve{C}}`R . R`y \in \mathrm{D}`R$

*33·431. $\vdash : (y) . \mathrm{E} ! R`y . \supset . (\beta) . \beta \subset \mathrm{\breve{C}}`R$

*33·5. $\vdash . C = \overrightarrow{F}$

*33·51. $\vdash : x \in C`R . \equiv . xFR$

Las pruebas de las proposiciones tocantes a $\mathrm{\breve{C}}$ y a C son de ordinario similares a las concernientes a D, y, por lo tanto, se omiten con frecuencia.

---

*33·01. $\mathrm{D} = \hat{\alpha}\hat{R} [\alpha = \hat{x} \{(\exists y) . xRy\}]$ Df

*33·02. $\mathrm{\breve{C}} = \hat{\beta}\hat{R} [\beta = \hat{y} \{(\exists x) . xRy\}]$ Df

*33·03. $C = \hat{\gamma}\hat{R} [\gamma = \hat{x} \{(\exists y) : xRy . \vee . yRx\}]$ Df

*33·04. $F = \hat{x}\hat{R} \{(\exists y) : xRy . \vee . yRx\}$ Df

*33·1. $\vdash : \alpha \mathrm{D} R . \equiv . \alpha = \hat{x} \{(\exists y) . xRy\}$ [*21·3 . (*33·01)]

*33·101. $\vdash : \beta \mathrm{\breve{C}} R . \equiv . \beta = \hat{y} \{(\exists x) . xRy\}$

*33·102. $\vdash : \gamma C R . \equiv . \gamma = \hat{x} \{(\exists y) : xRy . \vee . yRx\}$

*33·103. $\vdash :. xFR . \equiv : (\exists y) : xRy . \vee . yRx$

*33·11. $\vdash . \mathrm{D}`R = \hat{x} \{(\exists y) . xRy\}$ [*33·1 . *30·3 . *20·59]

*33·111. $\vdash . \mathrm{\breve{C}}`R = \hat{y} \{(\exists x) . xRy\}$

*33·112. $\vdash . C`R = \hat{x} \{(\exists y) : xRy . \vee . yRx\}$

*33·12. $\vdash . \mathrm{E} ! \mathrm{D}`R$ [*33·11 . *14·21]

*33·121. $\vdash . \mathrm{E} ! \mathrm{\breve{C}}`R$

*33·122. $\vdash . \mathrm{E} ! C`R$

*33·123. $\vdash : \alpha \mathrm{D} R . \equiv . \alpha = \mathrm{D}`R$ [*30·4 . *33·12]

*33·124. $\vdash : \beta \mathrm{\breve{C}} R . \equiv . \beta = \mathrm{\breve{C}}`R$ [*30·4 . *33·121]

*33·125. $\vdash : \gamma C R . \equiv . \gamma = C`R$ [*30·4 . *32·123]

*33·13. $\vdash : x \in \mathrm{D}`R . \equiv . (\exists y) . xRy$ [*33·11 . *20·3·57]

*33·131. $\vdash : y \in \mathrm{\breve{C}}`R . \equiv . (\exists x) . xRy$

*33·132. $\vdash :. x \in C`R . \equiv : (\exists y) : xRy . \vee . yRx$

*33·14. $\vdash : xRy . \supset . x \in \mathrm{D}`R . y \in \mathrm{\breve{C}}`R$

Dem.

$\vdash . *10·24 . \supset \vdash :. \mathrm{Hp} . \supset : (\exists y) . xRy : (\exists x) . xRy :$

[*33·13·131] $\supset : x \in \mathrm{D}'R \,.\, y \in \mathrm{C}'R :. \supset \vdash .$ Prop

*33·15. $\vdash . \overrightarrow{R}'y \subset \mathrm{D}'R$

Dem.

$\vdash .$ *32·18 $. \supset \vdash : x \in \overrightarrow{R}'y \,.\, \supset_x . xRy .$

[*10·24] $\supset_x . (\exists y) . xRy .$

[*33·13] $\supset_x . x \in \mathrm{D}'R : \supset \vdash .$ Prop

*33·151. $\vdash . \overleftarrow{R}'x \subset \mathrm{C}'R$

*33·152. $\vdash . \overrightarrow{R}'x \cup \overleftarrow{R}'x \subset C'R$

*33·16. $\vdash . C'R = \mathrm{D}'R \cup \mathrm{C}'R$

Dem.

$\vdash .$ *33·132 $.$ *10·42 $. \supset$

$\vdash :. x \in C'R . \equiv : (\exists y) . xRy . \vee . (\exists y) . yRx :$

[*33·13·131] $\equiv : x \in \mathrm{D}'R . \vee . x \in \mathrm{C}'R :$

[*22·34] $\equiv : x \in \mathrm{D}'R \cup \mathrm{C}'R$ (1)

$\vdash .$ (1) $.$ *10·11 $.$ *20·43 $. \supset \vdash .$ Prop

*33·161. $\vdash . \mathrm{D}'R \subset C'R \,.\, \mathrm{C}'R \subset C'R$ [*33·16 . *22·58]

*33·17. $\vdash : xRy . \supset . x, y \in C'R$ [*33·14·161]

*33·18. $\vdash : \mathrm{D}'R = \mathrm{C}'R . \supset . \mathrm{D}'R = C'R$

Dem.

$\vdash .$ *22·56 $. \supset \vdash : \mathrm{D}'R = \mathrm{C}'R . \supset . \mathrm{D}'R = \mathrm{D}'R \cup \mathrm{C}'R$

[*33·16] $= C'R : \supset \vdash .$ Prop

*33·181. $\vdash : \mathrm{C}'R \subset \mathrm{D}'R . \equiv . \mathrm{D}'R = C'R$

Dem.

$\vdash .$ *22·62 $. \supset \vdash : \mathrm{C}'R \subset \mathrm{D}'R . \equiv . \mathrm{D}'R = \mathrm{D}'R \cup \mathrm{C}'R$

[*33·16] $= C'R : \supset \vdash .$ Prop

*33·182. $\vdash : \mathrm{D}'R \subset \mathrm{C}'R . \equiv . \mathrm{C}'R = C'R$ [Prueba similar]

Si R es la clase de relaciones que genera una serie, de forma que "xRy" puede leerse "x precede a y", entonces $\mathrm{C}'R \subset \mathrm{D}'R$ es la condición para que la serie pueda carecer de último término, ya que establece que cada término que sigue a algún término precede a algún otro término, y por tanto no es el último de la serie.

*33·2. $\vdash . \mathrm{C}'R = \mathrm{D}'\breve{R}$

Dem.

$\vdash .$ *31·11 $.$ *10·11 $. \supset \vdash : xRy . \equiv_x . y\breve{R}x :$

[*10·281] $\supset \vdash : (\exists x) . xRy . \equiv . (\exists x) . y\breve{R}x :$

[*33·13·131] $\supset \vdash : y \in \mathrm{C}'R . \equiv . y \in \mathrm{D}'\breve{R}$ (1)

$\vdash .$ (1) $.$ *10·11 $.$ *20·43 $. \supset \vdash .$ Prop

*33·21. $\vdash . \mathrm{D}'R = \mathrm{C}'\breve{R}$ [Prueba similar]

***33·22.** $\vdash . C`R = C`\breve{R}$

Dem.

$\vdash . *33·16·2·21 . \supset \vdash . C`R = \mathrm{C}`\breve{R} \cup \mathrm{D}`\breve{R}$

$[*33·16] \qquad = C`\breve{R} . \supset \vdash . \text{Prop}$

***33·24.** $\vdash : \exists ! \mathrm{D}`R . \equiv . \exists ! \mathrm{C}`R . \equiv . \exists ! C`R . \equiv . \dot{\exists} ! R$

Dem.

$\vdash . *33·13 . \supset \vdash :. \exists ! \mathrm{D}`R . \equiv : (\exists x) : (\exists y) . xRy :$

$[*25·5.(*11·03)] \qquad \equiv : \dot{\exists} ! R \qquad (1)$

$\vdash . *33·131 . \supset \vdash :. \exists ! \mathrm{C}`R . \equiv : (\exists y) : (\exists x) . xRy :$

$[*11·2] \qquad \equiv : (\exists x, y) . xRy :$

$[*25·5] \qquad \equiv : \dot{\exists} ! R \qquad (2)$

$\vdash . *33·132 . \supset \vdash :: \exists ! C`R . \equiv :. (\exists x) :. (\exists y) : xRy . \vee . yRx :.$

$[*11·7] \qquad \equiv :. (\exists x, y) . xRy :.$

$[*25·5] \qquad \equiv :. \dot{\exists} ! R \qquad (3)$

$\vdash . (1) . (2) . (3) . \supset \vdash . \text{Prop}$

***33·241.** $\vdash : \mathrm{D}`R = \Lambda . \equiv . \mathrm{C}`R = \Lambda . \equiv . C`R = \Lambda . \equiv . R = \dot{\Lambda}$

$[*33·24 . \text{Transp} . *24·51 . *25·51]$

***33·25.** $\vdash . \mathrm{D}`(R \dot{\cap} S) \subset \mathrm{D}`R \cap \mathrm{D}`S$

Dem.

$\vdash . *33·13 . \supset \vdash :. x \in \mathrm{D}`(R \dot{\cap} S) . \equiv : (\exists y) . x (R \dot{\cap} S) y :$

$[*21·33.*10·281] \qquad \equiv : (\exists y) . xRy . xSy :$

$[*10·5] \qquad \supset : (\exists y) . xRy : (\exists y) . xSy :$

$[*33·13] \qquad \supset : x \in \mathrm{D}`R . x \in \mathrm{D}`S :$

$[*21·33] \qquad \supset : x \in \mathrm{D}`R \cap \mathrm{D}`S \qquad (1)$

$\vdash . (1) . *10·11 . \supset \vdash . \text{Prop}$

***33·251.** $\vdash . \mathrm{C}`(R \dot{\cap} S) \subset \mathrm{C}`R \cap \mathrm{C}`S$ [Prueba similar]

***33·252.** $\vdash . C`(R \dot{\cap} S) \subset C`R \cap C`S$ [Prueba similar]

***33·26.** $\vdash . \mathrm{D}`(R \cup S) = \mathrm{D}`R \cup \mathrm{D}`S$

Dem.

$\vdash . *33·13 . \supset \vdash :. x \in \mathrm{D}`(R \cup S) . \equiv : (\exists y) . x (R \cup S) y :$

$[*23·34.*10·281] \qquad \equiv : (\exists y) : xRy . \vee . xSy :$

$[*10·42] \qquad \equiv : (\exists y) . xRy : \vee : (\exists y) . xSy :$

$[*33·13] \qquad \equiv : x \in \mathrm{D}`R . \vee . x \in \mathrm{D}`S :$

$[*22·34] \qquad \equiv : x \in \mathrm{D}`R \cup \mathrm{D}`S \qquad (1)$

$\vdash . (1) . *10·11 . *20·43 . \supset \vdash . \text{Prop}$

***33·261.** $\vdash . \mathrm{C}`(R \cup S) = \mathrm{C}`R \cup \mathrm{C}`S$ [Prueba similar]

***33·262.** $\vdash . C`(R \cup S) = C`R \cup C`S$ [*33·26·261·16]

***33·263.** $\vdash : R \subseteq S . \supset . \mathrm{D}`R \subset \mathrm{D}`S$

Dem.

$\vdash .*23{\cdot}1 . \supset \vdash :. \mathrm{Hp} . \supset : xRy . \supset_{x,y} . xSy :$

[*10·28·27] $\supset : (x) : (\exists y) . xRy . \supset . (\exists y) . xSy :$

[*33·13] $\supset : (x) : x \in \mathrm{D}'R . \supset . x \in \mathrm{D}'S :$

[*23·1] $\supset : \mathrm{D}'R \subset \mathrm{D}'S :. \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***33·264.** $\vdash : R \subseteq S . \supset . \mathrm{C}'R \subset \mathrm{C}'S$ [Prueba similar]

***33·265.** $\vdash : R \subseteq S . \supset . C'R \subset C'S$ [*33·263·264·16 . *22·72]

***33·27.** $\vdash . C'R = \mathrm{D}'(R \cup \breve{R})$

Dem.

$\vdash .*33{\cdot}16{\cdot}2 . \supset \vdash . C'R = \mathrm{D}'R \cup \mathrm{D}'\breve{R}$

[*33·26] $= \mathrm{D}'(R \cup \breve{R}) . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***33·271.** $\vdash . C'R = \mathrm{C}'(R \cup \breve{R})$ [Prueba similar]

***33·272.** $\vdash . \mathrm{D}'(R \cup \breve{R}) = \mathrm{C}'(R \cup \breve{R}) = C'(R \cup \breve{R}) = C'R$ [*33·27·271·16]

***33·28.** $\vdash . \mathrm{D}'\dot{V} = \mathrm{C}'\dot{V} = C'\dot{V} = V$

Dem.

$\vdash .*10{\cdot}25 . *25{\cdot}104 . \supset \vdash :. (x) : (\exists y) . x\dot{V}y :. (x) : (\exists y) . y\dot{V}x :.$

[*33·13·131] $\supset \vdash :. (x) . x \in \mathrm{D}'\dot{V} : (x) . x \in \mathrm{C}'\dot{V} :.$

[*24·14] $\supset \vdash : \mathrm{D}'\dot{V} = V . \mathrm{C}'\dot{V} = V$ (1)

[*33·16] $\supset \vdash . C'\dot{V} = V \cup V$

[*22·56] $= V$ (2)

$\vdash .(1).(2). \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***33·29.** $\vdash . \mathrm{D}'\dot{\Lambda} = \mathrm{C}'\dot{\Lambda} = C'\dot{\Lambda} = \Lambda$ [*33·241 . *21·2]

***33·3.** $\vdash :. \alpha \subset \mathrm{D}'R . \equiv : x \in \alpha . \supset_x . \exists ! \overleftarrow{R}'x$

Dem.

$\vdash .*32{\cdot}181 . \supset \vdash :. x \in \alpha . \supset_x . \exists ! \overleftarrow{R}'x : \equiv : x \in \alpha . \supset_x . (\exists y) . xRy :$

[*33·13] $\equiv : x \in \alpha . \supset_x . x \in \mathrm{D}'R :. \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***33·31.** $\vdash :. \beta \subset \mathrm{C}'R . \equiv : y \in \beta . \supset_y . \exists ! \overrightarrow{R}'y$ [Prueba como en la *33·3]

Las tres últimas proposiciones se usan en la teoría de selecciones (*80, *83 y *85). La segunda de ellas se usa también en la teoría del mayor y menor (*117) y en la teoría de las relaciones transitivas (*201).

***33·32.** $\vdash : \mathrm{D}'R \cap \mathrm{D}'S = \Lambda . \supset . R \dot{\cap} S = \dot{\Lambda}$

La conversa de esta proposición no es verdadera.

Dem.

$\vdash .*23{\cdot}33 . \quad \supset \vdash : x (R \dot{\cap} S) y . \supset . xRy . xSy .$

[*33·14.*22·33] $\supset . x \in \mathrm{D}'R \cap \mathrm{D}'S .$

$$[*10{\cdot}24] \qquad \supset . \exists ! \mathrm{D}`R \cap \mathrm{D}`S \tag{1}$$

$$\vdash . (1) . \mathrm{Transp} . \quad \supset \vdash : \mathrm{D}`R \cap \mathrm{D}`S = \Lambda . \supset . \sim \{x (R \dot{\cap} S) y\} \tag{2}$$

$$\vdash . (2) . *11{\cdot}11{\cdot}3 . \supset \vdash : \mathrm{D}`R \cap \mathrm{D}`S = \Lambda . \supset . (x, y) . \sim \{x (R \dot{\cap} S) y\} .$$

$$[*25{\cdot}15] \qquad \supset . R \dot{\cap} S = \dot{\Lambda} : \supset \vdash . \mathrm{Prop}$$

***33·33.** $\vdash : \mathrm{C}`R \cap \mathrm{C}`S = \Lambda . \supset . R \dot{\cap} S = \dot{\Lambda}$ **[Prueba como en la *33·32]**

***33·34.** $\vdash : C`R \cap C`S = \Lambda . \supset . R \dot{\cap} S = \dot{\Lambda}$

Dem.

$$\vdash . *33{\cdot}161 . *22{\cdot}49 . \supset \vdash . \mathrm{D}`R \cap \mathrm{D}`S \subset C`R \cap C`S .$$

$$[*24{\cdot}13] \qquad \supset \vdash : C`R \cap C`S = \Lambda . \supset . \mathrm{D}`R \cap \mathrm{D}`S = \Lambda .$$

$$[*33{\cdot}32] \qquad \supset . R \dot{\cap} S = \dot{\Lambda} : \supset \vdash . \mathrm{Prop}$$

***33·35.** $\vdash :. \mathrm{D}`R \subset \alpha . \equiv : xRy . \supset_{x,y} . x \in \alpha$

Dem.

$$\vdash . *33{\cdot}13 . \supset \vdash :. \mathrm{D}`R \subset \alpha . \equiv : (\exists y) . xRy . \supset_x . x \in \alpha :$$

$$[*10{\cdot}23] \qquad \equiv : xRy . \supset_{x,y} . x \in \alpha :. \supset \vdash . \mathrm{Prop}$$

***33·351.** $\vdash :. \mathrm{C}`R \subset \alpha . \equiv : xRy . \supset_{x,y} . y \in \alpha$ **[Prueba como en la *33·35]**

***33·352.** $\vdash :. C`R \subset \alpha . \equiv : xRy . \supset_{x,y} . x, y \in \alpha$

Dem.

$$\vdash . *33{\cdot}16 . *22{\cdot}59 . \supset$$

$$\vdash :. C`R \subset \alpha . \equiv : \mathrm{D}`R \subset \alpha . \mathrm{C}`R \subset \alpha :$$

$$[*33{\cdot}35{\cdot}351] \equiv : xRy . \supset_{x,y} . x \in \alpha : xRy . \supset_{x,y} . y \in \alpha :$$

$$[*11{\cdot}391] \qquad \equiv : xRy . \supset_{x,y} . x, y \in \alpha :. \supset \vdash . \mathrm{Prop}$$

Las dos siguientes proposiciones (*33·4·41) se usan muy frecuentemente.

***33·4.** $\vdash . \mathrm{D}`R = \hat{x} \{\exists ! \overleftarrow{R}`x\}$

Dem.

$$\vdash . *33{\cdot}13 . \supset \vdash : x \in \mathrm{D}`R . \equiv . (\exists y) . xRy .$$

$$[*32{\cdot}181] \qquad \equiv . (\exists y) . y \in \overleftarrow{R}`x .$$

$$[*24{\cdot}5] \qquad \equiv . \exists ! \overleftarrow{R}`x \tag{1}$$

$$\vdash . (1) . *10{\cdot}11 . *20{\cdot}33 . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$$

***33·41.** $\vdash . \mathrm{C}`R = \hat{y} \{\exists ! \overrightarrow{R}`y\}$ **[Prueba similar]**

***33·42.** $\vdash . C`R = \hat{x} \{\exists ! (\overrightarrow{R}`x \cup \overleftarrow{R}`x)\}$

Dem.

$$\vdash . *33{\cdot}4{\cdot}41{\cdot}16 . \supset \vdash . C`R = \hat{x} \{\exists ! \overrightarrow{R}`x\} \cup \hat{x} \{\exists ! \overleftarrow{R}`x\}$$

$$[*22{\cdot}391] \qquad = \hat{x} \{\exists ! \overrightarrow{R}`x . \vee . \exists ! \overleftarrow{R}`x\}$$

$$[*24{\cdot}56.*20{\cdot}15] \qquad = \hat{x} \{\exists ! (\overrightarrow{R}`x \cup \overleftarrow{R}`x)\} . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$$

***33·43.** $\vdash : \mathrm{E} ! R`y . \supset . y \in \mathrm{C}`R . R`y \in \mathrm{D}`R$

Dem.

$\vdash .*30{\cdot}32 . \supset \vdash : \mathrm{E}!\, \breve{R}`y . \supset . (\breve{R}`y)\, Ry .$

[*33·14] $\supset . y \in \mathrm{C}`R . \breve{R}`y \in \mathrm{D}`R : \supset \vdash .$ Prop

***33·431.** $\vdash : (y) . \mathrm{E}!\, \breve{R}`y . \supset . (\beta) . \beta \subset \mathrm{C}`R$

Dem.

$\vdash .*33{\cdot}43 . \quad \supset \vdash :. \mathrm{Hp} . \supset : y \in \mathrm{C}`R .$

[Simp] $\supset : y \in \beta . \supset . y \in \mathrm{C}`R$ (1)

$\vdash .(1) .*10{\cdot}11{\cdot}21 . \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \supset . \beta \subset \mathrm{C}`R$ (2)

$\vdash .(2) .*10{\cdot}11{\cdot}21 . \supset \vdash .$ Prop

***33·432.** $\vdash : (y) . \mathrm{E}!\, \breve{R}`y . \supset . \mathrm{C}`R = \mathrm{V}$

Dem.

$\vdash .*33{\cdot}43 .*10{\cdot}11{\cdot}27 . \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \supset . (y) . y \in \mathrm{C}`R .$

[*24·14] $\supset . \mathrm{C}`R = \mathrm{V} : \supset \vdash .$ Prop

***33·44.** $\vdash : \mathrm{E}!\, \breve{R}`x . \supset . x \in \mathrm{D}`R . \breve{R}`x \in \mathrm{C}`\breve{R}$

Dem.

$\vdash .*33{\cdot}43\, \frac{\breve{R}}{R} . \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \supset . x \in \mathrm{C}`\breve{R} . \breve{R}`x \in \mathrm{D}`\breve{R} .$

[*33·2·21] $\supset . x \in \mathrm{D}`R . \breve{R}`x \in \mathrm{C}`R : \supset \vdash .$ Prop

***33·45.** $\vdash :. y \in \mathrm{C}`R \cup \mathrm{C}`S . \supset_y . R`y = S`y : \supset . R = S$

Obsérvese que, por nuestros convenios en cuanto a las expresiones señaladas, los alcances de $R`y$ y de $S`y$ en la última es "$R`y = S`y$", y $R`y$ debe ser la primera en eliminarse.

Dem.

$\vdash .*30{\cdot}11 . \supset \vdash :: R`y = S`y . \equiv :. (\exists b) : xRy . \equiv_x . x = b : b = S`y :.$

[*30·11] $\equiv :. (\exists b) :. xRy . \equiv_x . x = b :. (\exists c) : xSy . \equiv_x . x = c : b = c :.$

[*13·195] $\equiv :. (\exists b) : xRy . \equiv_x . x = b : xSy . \equiv_x . x = b :.$

[*10·322] $\supset :. xRy . \equiv_x . xSy$ (1)

$\vdash .(1) . \supset \vdash :: \mathrm{Hp} . \quad \supset :. y \in \mathrm{C}`R \cup \mathrm{C}`S . \supset : xRy . \equiv . xSy :.$

[*5·32] $\supset :. y \in \mathrm{C}`R \cup \mathrm{C}`S . xRy . \equiv . y \in \mathrm{C}`R \cup \mathrm{C}`S . xSy :.$

[*33·14.*4·71] $\supset :. xRy . \equiv . xSy$ (2)

$\vdash .(2) .*11{\cdot}11{\cdot}3 . \supset \vdash :. \mathrm{Hp} . \supset : (x, y) : xRy . \equiv . xSy :$

[*21·43] $\supset : R = S :. \supset \vdash .$ Prop

***33·46.** $\vdash :. x \in \mathrm{D}`R \cup \mathrm{D}`S . \supset_x . \breve{R}`x = \breve{S}`x : \supset . R = S$ [Prueba como en la *33·45]

***33·47.** $\vdash :. y \in \mathrm{C}`R \cup \mathrm{C}`S . \supset_y . \vec{R}`y = \vec{S}`y : \supset . R = S$

Dem.

$\vdash .*33{\cdot}41 . \mathrm{Transp} . \supset \vdash : y \sim \in \mathrm{C}`R \cup \mathrm{C}`S . \supset . \vec{R}`y = \Lambda . \vec{S}`y = \Lambda$ (1)

$\vdash .(1) .*13{\cdot}172 .*4{\cdot}83 . \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \supset . (y) . \vec{R}`y = \vec{S}`y .$

[*30·41] $\supset . \vec{R} = \vec{S} .$

[*32·14] $\supset . R = S : \supset \vdash .$ Prop

***33·48.** $\vdash :. x \in \mathrm{D}`R \cup \mathrm{D}`S . \supset_x . \overleftarrow{R}`x = \overleftarrow{S}`x : \supset . R = S$ [Prueba como en la *33·47]

***33·5.** $\vdash . C = \overrightarrow{F}$

Dem.

$$\vdash . *32{\cdot}1 . \supset \vdash :. \alpha \overrightarrow{F} R . \equiv . \alpha = \hat{x}(xFR)$$
$$[*33{\cdot}103] \qquad = \hat{x}\{(\exists y) : xRy . \vee . yRx\} .$$
$$[*33{\cdot}102] \qquad \equiv . \alpha C R \qquad (1)$$
$$\vdash . (1) . *11{\cdot}11 . *21{\cdot}43 . \supset \vdash . \text{Prop}$$

***33·51.** $\vdash : x \in C`R . \equiv . xFR$ [*33·132·103]

F es útil en la aritmética ordinal, en donde nos ocupamos de las series generadas por una relación P, y en donde "xFP" expresa el hecho de que x es un miembro de esta serie. Las dos proposiciones últimas (*33·5·51) serán muy utilizadas en la Parte IV, en donde se trata de los fundamentos de la aritmética ordinal, pero de las que apenas se harán referencia en otras partes.

***33·6.** $\vdash : R \in \overleftarrow{\mathrm{D}}`\alpha . \equiv . \alpha = \mathrm{D}`R$

Dem.

$$\vdash . *32{\cdot}181 . \supset \vdash : R \in \overleftarrow{\mathrm{D}}`\alpha . \equiv . \alpha \mathrm{D} R .$$
$$[*33{\cdot}123] \qquad \equiv . \alpha = \mathrm{D}`R : \supset \vdash . \text{Prop}$$

***33·61.** $\vdash : R \in \overleftarrow{\mathrm{C}}`\alpha . \equiv . \alpha = \mathrm{C}`R$

***33·62.** $\vdash : R \in \overleftarrow{C}`\alpha . \equiv . \alpha = C`R$

*34. EL PRODUCTO RELATIVO DE DOS RELACIONES

Sumario del *34.

El producto relativo de dos relaciones, R y S, es la relación que tiene lugar entre x y z cuando hay un término intermedio y tal que x tiene la relación R con respecto a y, e y tiene la relación S con respecto a z. Así, por ejemplo, el producto relativo de *hermano* y *padre* es *tío paterno*; el producto relativo de *padre* y *padre* es *abuelo paterno*; y así sucesivamente. El producto de R y S se simboliza mediante "$R|S$"; la definición es:

*34·01. $R|S = \hat{x}\hat{z}\{(\exists y) . xRy . ySz\}$ Df

Esta definición sólo es significativa cuando $\mathrm{Cl}`R$ y $\mathrm{D}`S$ pertenecen al mismo tipo.

El producto relativo de R y R se llama el cuadrado de R; ponemos

*34·02. $R^2 = R|R$ Df

*34·03. $R^3 = R^2|R$ Df

Las proposiciones más útiles en este número son las siguientes:

*34·2. $\vdash . \mathrm{Cnv}`(R|S) = \breve{S}|\breve{R}$

Es decir, la conversa de un producto relativo se obtiene cambiando cada factor en su conversa e invirtiendo el orden de los factores.

*34·21. $\vdash . (P|Q)|R = P|(Q|R)$

Esto es, el producto relativo obedece a la ley asociativa.

*34·25. $\vdash . P|(Q \cup R) = (P|Q) \cup (P|R)$

*34·26. $\vdash . (P \cup Q)|R = (P|R) \cup (Q|R)$

Es decir, el producto relativo goza de la ley distributiva con respecto a la suma lógica de relaciones. (Para el producto lógico en vez de la suma lógica, sólo consideramos la inclusión en lugar de la identidad; cf. *34·23·24).

*34·34. $\vdash : R \subseteq P . S \subseteq Q . \supset . R|S \subseteq P|Q$

*34·36. $\vdash . \mathrm{D}`(P|Q) \subseteq \mathrm{D}`P . \mathrm{Cl}`(P|Q) \subseteq \mathrm{Cl}`Q$

*34·41. $\vdash : \mathrm{E}!P`Q`z . \supset . P`Q`z = (P|Q)`z$

---

*34·01. $R|S = \hat{x}\hat{z}\{(\exists y) . xRy . ySz\}$ Df

*34·02. $R^2 = R|R$ Df

*34·03. $R^3 = R^2|R$ Df

*34·1. $\vdash : x(R|S)z . \equiv . (\exists y) . xRy . ySz$ [*21·3 . (*34·01)]

***34·11.** $\vdash : x(R \mid S)z . \equiv . \exists ! (\overleftarrow{R}`x \cap \overrightarrow{S}`z)$

Dem.

$\vdash . *34·1 . *32·18·181 . \supset$

$\vdash : x(R \mid S)z . \equiv . (\exists y) . y \in \overleftarrow{R}`x . y \in \overrightarrow{S}`z .$

[*22·33] $\equiv . (\exists y) . y \in \overleftarrow{R}`x \cap \overrightarrow{S}`z .$

[*24·5] $\equiv . \exists ! (\overleftarrow{R}`x \cap \overrightarrow{S}`z) : \supset \vdash .$ Prop

***34·12.** $\vdash . R \mid S = \hat{x}\hat{z}\{\exists ! (\overleftarrow{R}`x \cap \overrightarrow{S}`x)\}$ [*21·33 . *34·11]

***34·2.** $\vdash . \mathrm{Cnv}`(R \mid S) = \breve{S} \mid \breve{R}$

Dem.

$\vdash . *31·131 . \supset \vdash : x\{\mathrm{Cnv}`(R \mid S)\}z . \equiv . z(R \mid S)x .$

[*34·1] $\equiv . (\exists y) . zRy . ySx .$

[*31·11] $\equiv . (\exists y) . y\breve{R}z . x\breve{S}y .$

[*34·1] $\equiv . x(\breve{S} \mid \breve{R})z$ (1)

$\vdash . (1) . *11·11 . *21·43 . \supset \vdash .$ Prop

***34·202.** $\vdash . R \mid S = (\mathrm{Cnv}`\breve{R}) \mid S$

Dem.

$\vdash . *31·131 . \supset \vdash : x(\mathrm{Cnv}`\breve{R})y . ySz . \equiv . y\breve{R}x . ySz .$

[*31·11] $\equiv . xRy . ySz$ (1)

$\vdash . (1) . *10·11·281 . *34·1 . \supset \vdash : x\{(\mathrm{Cnv}`\breve{R}) \mid S\}z . \equiv . x(R \mid S)z$ (2)

$\vdash . (2) . *11·11 . *21·43 . \supset \vdash .$ Prop

***34·203.** $\vdash . R \mid S = R \mid (\mathrm{Cnv}`\breve{S})$ **[Prueba similar]**

***34·21.** $\vdash . (P \mid Q) \mid R = P \mid (Q \mid R)$

Dem.

$\vdash . *34·1 . *10·281 . \supset \vdash :: (\exists z) . x(P \mid Q)z . zRw . \equiv :. (\exists z) : (\exists y) . xPy . yQz : zRw :.$

[*11·6] $\equiv :. (\exists y) :. xPy : (\exists z) . yQz . zRw :.$

[*34·1.*10·281] $\equiv :. (\exists y) . xPy . y(Q \mid R)w$ (1)

$\vdash . (1) . *11·11 . *34·1 . *21·43 . \supset \vdash .$ Prop

***34·22.** $P \mid Q \mid R = (P \mid Q) \mid R$ Df

Esta definición sirve únicamente para evitar los paréntesis.

***34·23.** $\vdash . P \mid (Q \dot{\cap} R) \subseteq (P \mid Q) \dot{\cap} (P \mid R)$

Dem.

$\vdash . *34·1 . \supset$

$\vdash :. x\{P \mid (Q \dot{\cap} R)\}y . \equiv : (\exists z) . xPz . z(Q \dot{\cap} R)y :$

[*23·33] $\equiv : (\exists z) . xPz . zQy . zRy :$

[*10·5] $\supset : (\exists z) . xPz . zQy : (\exists z) . xPz . zRy :$

$$[*34{\cdot}1] \qquad \supset : x\,(P \mid Q)\,y \,.\, x\,(P \mid R)\,y :$$
$$[*23{\cdot}33] \qquad \supset : x\,\{(P \mid Q) \mathbin{\hat{\cap}} (P \mid R)\}\,y \qquad (1)$$
$$\vdash .(1) .*11{\cdot}11 . \supset \vdash . \text{Prop}$$

La conversa de esta última proposición no es verdadera.

***34·24.** $\vdash .(P \mathbin{\hat{\cap}} Q) \mid R \subseteq (P \mid R) \mathbin{\hat{\cap}} (Q \mid R)$ [Prueba similar]

***34·25.** $\vdash . P \mid (Q \cup R) = (P \mid Q) \cup (P \mid R)$

Dem.

$$\vdash .*23{\cdot}34 .*10{\cdot}281 . \supset$$
$$\vdash :. (\exists z) . xPz . z\,(Q \cup R)\,y \,.\equiv : (\exists z) : xPz : zQy \,.\vee.\, zRy :$$
$$[*4{\cdot}4.*10{\cdot}281] \qquad \equiv : (\exists z) : xPz \,.\, zQy \,.\vee.\, xPz \,.\, zRy :$$
$$[*10{\cdot}42] \qquad \equiv : (\exists z) . xPz \,.\, zQy : \vee : (\exists z) . xPz \,.\, zRy :$$
$$[*34{\cdot}1] \qquad \equiv : x\,(P \mid Q)\,y \,.\vee.\, x\,(P \mid R)\,y :$$
$$[*23{\cdot}34] \qquad \equiv : x\,(P \mid Q \cup P \mid R)\,y \qquad (1)$$
$$\vdash .(1) .*11{\cdot}11 .*34{\cdot}1 . \supset \vdash . \text{Prop}$$

***34·26.** $\vdash .(P \cup Q) \mid R = (P \mid R) \cup (Q \mid R)$ [Prueba similar]

Las dos últimas formas de la ley distributiva, y la ley asociativa (*34·21), son las únicas leyes formales usuales que tienen validez en el producto relativo. En particular, la ley conmutativa no es generalmente válida.

***34·27.** $\vdash : R = R' . \supset . R \mid P = R' \mid P$

Dem.

$$\vdash .*21{\cdot}43 . \supset \vdash :. \text{Hp} . \supset : (x, y) : xRy \,.\equiv.\, xR'y :$$
$$[*11{\cdot}401] \qquad \supset : (x, y) : xRy \,.\, yPz \,.\equiv_z .\, xR'y \,.\, yPz :$$
$$[*10{\cdot}281] \qquad \supset : (x) : (\exists y) . xRy \,.\, yPz \,.\equiv_z .\, (\exists y) . xR'y \,.\, yPz :$$
$$[*21{\cdot}15] \qquad \supset : R \mid P = R' \mid P :. \supset \vdash . \text{Prop}$$

***34·28.** $\vdash : R = R' . \supset . P \mid R = P \mid R'$ [Prueba similar]

***34·29.** $\vdash : R = R' . \supset . P \mid R \mid Q = P \mid R' \mid Q$

Dem.

$$\vdash .*34{\cdot}27 . \supset \vdash : \text{Hp} . \supset . R \mid Q = R' \mid Q .$$
$$[*34{\cdot}28] \qquad \supset . P \mid R \mid Q = P \mid R' \mid Q : \supset \vdash . \text{Prop}$$

Al probar la igualdad de dos relaciones, digamos R y S, ordinariamente establecemos primero una proposición aseverada de la forma

$$xRy \,.\equiv.\, xSy$$
o
$$\text{Hp} . \supset : xRy \,.\equiv.\, xSy.$$

Entonces procedemos por la *11·11 (junto con la *11·3 en el segundo caso) a

$$(x, y) : xRy \,.\equiv.\, xSy \quad \text{o} \quad \text{Hp} . \supset : (x, y) : xRy \,.\equiv.\, xSy,$$

de donde el resultado se sigue mediante la *21·43. En el futuro omitiremos estos pasos, y escribimos "$\supset \vdash .$ Prop" una vez que la hayamos demostrado.

$$xRy \,.\equiv.\, xSy \;\; \mathrm{o} \;\; \mathrm{Hp} \,.\supset: xRy \,.\equiv.\, xSy.$$

Una elipsis similar se hará al probar la igualdad de clases.

***34·3.** $\vdash : \dot{\exists}\,!\,(P \mid Q) \,.\equiv.\, \exists\,!\,(\mathrm{C}`P \cap \mathrm{D}`Q)$

Dem.

$\vdash .\, *25{\cdot}5 \,.\supset$

$\vdash :: \dot{\exists}\,!\,(P \mid Q) \,.\equiv:.\, (\exists x, y) \,.\, x\,(P \mid Q)\,y :.$

[*34·1] $\equiv:.\, (\exists x, y) : (\exists z) \,.\, xPz \,.\, zQy :.$

[*11·27] $\equiv:.\, (\exists x, y, z) \,.\, xPz \,.\, zQy :.$

[*11·24] $\equiv:.\, (\exists z, x, y) \,.\, xPz \,.\, zQy :.$

[*11·27] $\equiv:.\, (\exists z) :. (\exists x, y) \,.\, xPz \,.\, zQy :.$

[*11·54] $\equiv:.\, (\exists z) :. (\exists x) \,.\, xPz : (\exists y) \,.\, zQy :.$

[*33·13·131] $\equiv:.\, (\exists z) :. z \in \mathrm{C}`P \,.\, z \in \mathrm{D}`Q :.$

[*22·33] $\equiv:.\, (\exists z) :. z \in \mathrm{C}`P \cap \mathrm{D}`Q :.$

[*24·5] $\equiv:.\, \exists\,!\,(\mathrm{C}`P \cap \mathrm{D}`Q) :: \supset \vdash .$ Prop

***34·301.** $\vdash : \mathrm{C}`P \cap \mathrm{D}`Q = \Lambda \,.\equiv.\, P \mid Q = \dot{\Lambda}$ [*34·3 . Transp]

***34·302.** $\vdash : C`P \cap C`Q = \Lambda \,.\supset.\, P \mid Q = \dot{\Lambda} \,.\, Q \mid P = \dot{\Lambda}$

Dem.

$\vdash .\, *33{\cdot}16 \,.\supset \vdash : \mathrm{Hp} \,.\supset.\, \mathrm{C}`P \cap \mathrm{D}`Q = \Lambda \,.\, \mathrm{C}`Q \cap \mathrm{D}`P = \Lambda \,.$

[*34·301] $\supset.\, P \mid Q = \dot{\Lambda} \,.\, Q \mid P = \dot{\Lambda} : \supset \vdash .$ Prop

***34·31.** $\vdash : \dot{\exists}\,!\,(P \mid Q) \,.\supset.\, \dot{\exists}\,!\,P \,.\, \dot{\exists}\,!\,Q$

Dem.

$\vdash .\, *34{\cdot}3 \,.\supset \vdash : \mathrm{Hp} \,.\supset.\, \exists\,!\,(\mathrm{C}`P \cap \mathrm{D}`Q) \,.$

[*24·561] $\supset.\, \exists\,!\,\mathrm{C}`P \,.\, \exists\,!\,\mathrm{D}`Q \,.$

[*33·24] $\supset.\, \dot{\exists}\,!\,P \,.\, \dot{\exists}\,!\,Q : \supset \vdash .$ Prop

***34·32.** $\vdash :. P = \dot{\Lambda} \,.\vee.\, Q = \dot{\Lambda} :\supset.\, P \mid Q = \dot{\Lambda}$ [*34·31 . Transp . *25·51]

***34·33.** $\vdash : x \in \mathrm{D}`R \,.\equiv.\, x\,(R \mid \breve{R})\,x$

Dem.

$\vdash .\, *33{\cdot}13 \,.\supset \vdash : x \in \mathrm{D}`R \,.\equiv.\, (\exists y) \,.\, xRy \,.$

[*4·24] $\equiv.\, (\exists y) \,.\, xRy \,.\, xRy \,.$

[*31·11] $\equiv.\, (\exists y) \,.\, xRy \,.\, y\breve{R}x \,.$

[*34·1] $\equiv.\, x\,(R \mid \breve{R})\,x : \supset \vdash .$ Prop

***34·34.** $\vdash : R \subseteq P \,.\, S \subseteq Q \,.\supset.\, R \mid S \subseteq P \mid Q$

Dem.

$\vdash .\, *23{\cdot}1 \,.\supset \vdash :. \mathrm{Hp} \,.\supset: xRy \,.\supset_{x,y} .\, xPy : ySz \,.\supset_{y,z} .\, yQz :$

[*11·2.*10·1·41] $\supset: xRy \,.\supset.\, xPy : ySz \,.\supset.\, yQz :$

[*3·47] $\supset: xRy \,.\, ySz \,.\supset.\, xPy \,.\, yQz$ (1)

$\vdash .\, (1) \,.\, *10{\cdot}11{\cdot}21{\cdot}28 \,.\supset$

$\vdash :. \mathrm{Hp} \,.\supset: (\exists y) \,.\, xRy \,.\, ySz \,.\supset.\, (\exists y) \,.\, xPy \,.\, yQz :$

[*34·1] $\supset: x\,(R \;\; S)\,z \,.\supset.\, x\,(P \mid Q)\,z$ (2)

$\vdash .(2).*11{\cdot}11{\cdot}3.\supset\vdash.\mathrm{Prop}$

***34·35.** $\vdash:\dot{\exists}!R.\mathrm{C}'R\subset\mathrm{D}'P.\supset.\dot{\exists}!R\mid P$

Dem.

$\vdash.*33{\cdot}24.\supset\vdash:\mathrm{Hp}.\supset.\exists!\mathrm{C}'R$ (1)

$\vdash.*22{\cdot}621.\supset\vdash:\mathrm{Hp}.\supset.\mathrm{C}'R=\mathrm{C}'R\cap\mathrm{D}'P$ (2)

$\vdash.(1).(2).\supset\vdash:\mathrm{Hp}.\supset.\exists!\mathrm{C}'R\cap\mathrm{D}'P.$

[*34·3] $\supset.\dot{\exists}!R\mid P:\supset\vdash.\mathrm{Prop}$

***34·351.** $\vdash:\dot{\exists}!R.\mathrm{D}'R\subset\mathrm{C}'P.\supset.\dot{\exists}!P\mid R$ [Prueba como en la *34·35]

***34·36.** $\vdash.\mathrm{D}'(P\mid Q)\subset\mathrm{D}'P.\mathrm{C}'(P\mid Q)\subset\mathrm{C}'Q$

Dem.

$\vdash.*33{\cdot}13.\supset\vdash:.x\in\mathrm{D}'(P\mid Q).\supset:(\exists z).x(P\mid Q)z:$

[*34·1] $\supset:(\exists z,y).xPy.yQz:$

[*11·23] $\supset:(\exists y,z).xPy.yQz:$

[*11·55.*10·5] $\supset:(\exists y).xPy:$

[*33·13] $\supset:x\in\mathrm{D}'P$ (1)

Similarmente $\vdash:.z\in\mathrm{C}'(P\mid Q).\supset:z\in\mathrm{C}'P$ (2)

$\vdash.(1).(2).*10{\cdot}11.\supset\vdash.\mathrm{Prop}$

La proposición siguiente es un lema para la *95·31.

***34·361.** $\vdash:\dot{\exists}!R.\mathrm{D}'R\subset\mathrm{C}'P.\mathrm{C}'R\subset\mathrm{D}'Q.\supset.\dot{\exists}!P\mid R\mid Q$

Dem.

$\vdash.*34{\cdot}35.\supset\vdash:\mathrm{Hp}.\supset.\dot{\exists}!R\mid Q$ (1)

$\vdash.*34{\cdot}36.\supset\vdash:\mathrm{Hp}.\supset.\mathrm{D}'(R\mid Q)\subset\mathrm{C}'P$ (2)

$\vdash.(1).(2).*34{\cdot}351.\supset\vdash.\mathrm{Prop}$

***34·37.** $\vdash.C'(P\mid Q)\subset\mathrm{D}'P\cup\mathrm{C}'Q$ [*34·36.*33·161.*22·72]

***34·38.** $\vdash.C'(P\mid Q)\subset C'P\cup C'Q$ [*34·37.*33·161.*22·72]

***34·4.** $\vdash:b=P'c.c=Q'z.\supset.b=(P\mid Q)'z$

Dem.

$\vdash.*30{\cdot}31.\supset\vdash:\mathrm{Hp}.\supset.bPc.cQz.$

[*34·1] $\supset.b(P\mid Q)z$ (1)

$\vdash.*30{\cdot}31.\supset\vdash:.\mathrm{Hp}.\supset:yQz.\supset_y.y=c:$

[Fact] $\supset:xPy.yQz.\supset_{x,y}.xPy.y=c.$

[*13·13] $\supset_{x,y}.xPc$ (2)

$\vdash.*30{\cdot}31.\supset\vdash:.\mathrm{Hp}.\supset:xPc.\supset_x.x=b$ (3)

$\vdash.(2).(3).\supset\vdash:.\mathrm{Hp}.\supset:xPy.yQz.\supset_{x,y}.x=b:$

[*10·23] $\supset:(\exists y).xPy.yQz.\supset_x.x=b:$

[*34·1] $\supset:x(P\mid Q)z.\supset_x.x=b$ (4)

$\vdash.(1).(4).*30{\cdot}31.\supset\vdash.\mathrm{Prop}$

***34·41.** $\vdash:\mathrm{E}!P'Q'z.\supset.P'Q'z=(P\mid Q)'z$

Dem.

$\vdash.*30{\cdot}52.\supset\vdash:\mathrm{Hp}.\supset.(\exists b,c).b=P'c.c=Q'z.$

[*30·51.*34·4] $\supset.(\exists b).b=P'Q'z.b=(P\mid Q)'z.$

[*14·145] $\supset.P'Q'z=(P\mid Q)'z:\supset\vdash.\mathrm{Prop}$

La última proposición ya no es verdadera si cambiamos la hipótesis en E ! $(P|Q)`z$, dado que $(P|Q)`z$ puede existir cuando no exista $P`Q`z$. Supongamos, por ejemplo, que Q sea la relación de hijo a padre, y P la relación de hijo a padre. Entonces $(P|Q)`z$ = la nieta de $z$, pero $P`Q`z$ = la hija del hijo de z. La primera existe siempre que z tenga sólo una nieta, mientras que la segunda exige, además, que z tenga solamente un hijo.

Por la misma razón no tenemos

$$b = (P \mid Q)`z \,.\supset.\, (\exists c) \,.\, b = P`c \,.\, c = Q`z.$$

Esta tendría validez si P, Q fuesen relaciones de uno a muchos (cf. *71), pero, en general, no en otro caso.

***34·42.** $\vdash : (z) \,.\, R`z = P`Q`z \,.\supset.\, R = P \mid Q$

Dem.

$\vdash .$ *14·21 . $\supset \vdash :.$ Hp $.\supset : (z) .$ E ! $R`z : (z) .$ E ! $P`Q`z$ (1)

$\vdash .$ (1) . *34·41 . $\supset \vdash :.$ Hp $.\supset : (z) . R`z = (P \mid Q)`z :$

[*30·42.(1)] $\supset : R = P \mid Q :. \supset \vdash .$ Prop

***34·5.** $\vdash : xR^2y \,.\equiv.\, (\exists z) \,.\, xRz \,.\, zRy$ [*34·1 . (*34·02)]

***34·51.** $\vdash : xR^3y \,.\equiv.\, (\exists z, w) \,.\, xRz \,.\, zRw \,.\, wRy$

Dem.

$\vdash .$ *34·1 . (*34·03) . $\supset$

$\vdash :. xR^3y \,.\equiv : (\exists w) \,.\, xR^2w \,.\, wRy :$

[*34·5] $\equiv : (\exists w) : (\exists z) \,.\, xRz \,.\, zRw : wRy :$

[*11·55] $\equiv : (\exists w, z) \,.\, xRz \,.\, zRw \,.\, wRy :$

[*11·2] $\equiv : (\exists z, w) \,.\, xRz \,.\, zRw \,.\, wRy :. \supset \vdash .$ Prop

***34·52.** $\vdash . R^3 = R \mid R^2$ [*34·21]

***34·53.** $\vdash : \dot{\exists} ! R^2 \,.\equiv.\, \exists ! D`R \cap C`R$ [*34·3]

***34·531.** $\vdash : D`R \cap C`R = \Lambda \,.\equiv.\, R^2 = \dot{\Lambda}$ [*34·53 . Transp]

***34·54.** $\vdash : xRx \,.\supset.\, xR^2x$

Dem.

$\vdash .$ *4·24 . $\supset \vdash : xRx \,.\supset.\, xRx \,.\, xRx \,.$

[*10·24] $\supset . (\exists y) \,.\, xRy \,.\, yRx \,.$

[*34·5] $\supset . xR^2x : \supset \vdash .$ Prop

***34·55.** $\vdash :. R^2 \subset S \,.\equiv : xRy \,.\, yRz \,.\supset_{x,y,z} .\, xSz$ [*34·5 . *10·23]

***34·56.** $\vdash .\, D`R^2 \subset D`R \,.\, C`R^2 \subset C`R \,.\, C`R^2 \subset C`R$ [*34·36·38]

***34·6.** $\vdash . (R \dot{\cap} S)^2 \subseteq R^2 \dot{\cap} S^2$

Dem.

$\vdash .$ *34·5 . $\supset \vdash :. x (R \dot{\cap} S)^2 y \,.\equiv : (\exists z) \,.\, x (R \dot{\cap} S) z \,.\, z (R \dot{\cap} S) y :$

[*23·33.*10·281] $\equiv : (\exists z) \,.\, xRz \,.\, xSz \,.\, zRy \,.\, zSy :$

[*4·3.*10·281] $\equiv : (\exists z) \,.\, xRz \,.\, zRy \,.\, xSz \,.\, zSy :$

[*10·5] $\supset : (\exists z) \,.\, xRz \,.\, zRy : (\exists z) \,.\, xSz \,.\, zSy :$

$$[*34{\cdot}5] \qquad \supset : xR^2y \,.\, xS^2y :$$
$$[*23{\cdot}33] \qquad \supset : x\,(R^2 \cap S^2)\,y \qquad (1)$$
$$\vdash .(1) .*11{\cdot}11 . \supset \vdash . \text{Prop}$$

***34·62.** $\vdash .(R \cup S)^2 = R^2 \cup R \mid S \cup S \mid R \cup S^2$

Dem.

$$\vdash .*34{\cdot}26 . \supset \vdash .(R \cup S)^2 = R \mid (R \cup S) \cup S \mid (R \cup S)$$
$$[*34{\cdot}25] \qquad = R^2 \cup R \mid S \cup S \mid R \cup S^2 . \supset \vdash . \text{Prop}$$

La última proposición es un lema para la *160·51, como también lo es la *34·73, las cuales emplean la proposición de arriba.

***34·63.** $\vdash . \text{Cnv}`(R^2) = (\text{Cnv}`R)^2$

Dem.

$$\vdash .*31{\cdot}131 . \supset$$
$$\vdash :. x\,\{\text{Cnv}`(R^2)\}\,y . \equiv : yR^2x :$$
$$[*34{\cdot}5] \qquad \equiv : (\exists z) . yRz . zRx :$$
$$[*31{\cdot}131.*10{\cdot}281] \qquad \equiv : (\exists z) . x\breve{R}z . z\breve{R}y :$$
$$[*31{\cdot}131.*34{\cdot}5] \qquad \equiv : x\,(\text{Cnv}`R)^2\,y : \supset \vdash . \text{Prop}$$

***34·7.** $\vdash . \text{Cnv}`(S \mid \breve{S}) = S \mid \breve{S}$

Dem.

$$\vdash .*34{\cdot}2 . \supset \vdash . \text{Cnv}`(S \mid \breve{S}) = (\text{Cnv}`\breve{S}) \mid \breve{S}$$
$$[*34{\cdot}202] \qquad = S \mid \breve{S} . \supset \vdash . \text{Prop}$$

De este modo, $S|\breve{S}$ siempre es una relación simétrica, esto es, una que es igual a su conversa.

***34·701.** $\vdash . \text{Cnv}`(\breve{S} \mid S) = \breve{S} \mid S$ [*34·2·203]

***34·702.** $\vdash . C`(S \mid \breve{S}) = \text{D}`S$

Dem.

$$\vdash .*34{\cdot}37 . \supset \vdash . C`(S \mid \breve{S}) \subset \text{D}`S \cup \text{C}`\breve{S}$$
$$[*33{\cdot}21] \qquad \subset \text{D}`S \qquad (1)$$
$$\vdash .*33{\cdot}13 . \supset \vdash : x \in \text{D}`S . \supset . (\exists y) . xSy .$$
$$[*31{\cdot}11] \qquad \supset . (\exists y) . xSy . y\breve{S}x .$$
$$[*34{\cdot}1] \qquad \supset . x\,(S \mid \breve{S})\,x .$$
$$[*33{\cdot}17] \qquad \supset . x \in C`(S \mid \breve{S}) \qquad (2)$$
$$\vdash .(1) .(2) .*10{\cdot}11 . \supset \vdash . \text{Prop}$$

***34·703.** $\vdash . C`(\breve{S} \mid S) = \text{C}`S$ [Prueba similar]

***34·73.** $\vdash : C`P \cap C`Q = \Lambda . \supset . (P \cup Q)^2 = P^2 \cup Q^2$

Dem.

$$\vdash .*34{\cdot}302 . \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \supset . P \mid Q = \dot{\Lambda} . Q \mid P = \dot{\Lambda} .$$
$$[*25{\cdot}24] \qquad \supset . P^2 \cup Q^2 = P^2 \cup P \mid Q \cup Q \mid P \cup Q^2$$
$$[*34{\cdot}62] \qquad = (P \cup Q)^2 : \supset \vdash . \mathrm{Prop}$$

***34·8.** $\vdash : R = \breve{R} . R^2 \subset R . \supset . R = R^2 = R \mid \breve{R}$

Dem.

$$\vdash .*34{\cdot}28 . \qquad \supset \vdash : R = \breve{R} . \supset . R^2 = R \mid \breve{R} \qquad (1)$$
$$\vdash .*34{\cdot}33 .*33{\cdot}14 . \quad \supset \vdash : xRy . \supset . x(R \mid \breve{R})x \qquad (2)$$
$$\vdash .(1) .(2) . \qquad \supset \vdash :. R = \breve{R} . \supset : xRy . \supset . xR^2x \qquad (3)$$
$$\vdash .(3) .*23{\cdot}1 . \qquad \supset \vdash :. R = \breve{R} . R^2 \subset R . \supset : xRy . \supset . xRx :$$
$$[*4{\cdot}7] \qquad \supset : xRy . \supset . xRx . xRy .$$
$$[*10{\cdot}24.*34{\cdot}5] \qquad \supset . xR^2y \qquad (4)$$
$$\vdash .(4) .*11{\cdot}11{\cdot}3 . \quad \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \supset . R \subset R^2 \qquad (5)$$
$$\vdash .*3{\cdot}27 . \qquad \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \supset . R^2 \subset R \qquad (6)$$
$$\vdash .(5) .(6) .*23{\cdot}41 . \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \supset . R = R^2 \qquad (7)$$
$$\vdash .(1) .(7) . \qquad \supset \vdash . \mathrm{Prop}$$

La hipótesis de esta proposición es la hipótesis de que R es simétrica ($R = \breve{R}$) y transitiva ($R^2 \subset R$). Estas son las propiedades formales de aquellas relaciones que convenientemente puede considerarse que, de algún modo, expresan la igualdad.

***34·81.** $\vdash : R = \breve{R} . R^2 \subset R . \equiv . R = \breve{R} . R^2 = R$ [*34·8 . *4·71]

Las siguientes proposiciones son lemas para la *34·85, que se usa en la *72·64.

***34·82.** $\vdash :. R = \breve{R} . R^2 \subset R . \supset : x \in \mathrm{D}`R . \equiv . xRx$

Dem.

$$\vdash .*34{\cdot}33 . \quad \supset \vdash : x \in \mathrm{D}`R . \equiv . x(R \mid \breve{R})x \qquad (1)$$
$$\vdash .*34{\cdot}8 . \quad \supset \vdash :. \mathrm{Hp} . \supset : x(R \mid \breve{R})x . \equiv . xRx \qquad (2)$$
$$\vdash .(1) .(2) . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$$

***34·83.** $\vdash : R = \breve{R} . R^2 \subset R . xRy . \supset . \overleftarrow{R}`x = \overleftarrow{R}`y$

Dem.

$$\vdash .*31{\cdot}11 . \quad \supset \vdash :. \mathrm{Hp} . \supset : yRx :$$
$$[*3{\cdot}2] \qquad \supset : xRz . \supset . yRx . xRz .$$
$$[*34{\cdot}55.\mathrm{Hp}] \qquad \supset . yRz \qquad (1)$$
$$\vdash .*3{\cdot}2 . \quad \supset \vdash :. \mathrm{Hp} . \supset : yRz . \supset . xRy . yRz .$$
$$[*34{\cdot}55.\mathrm{Hp}] \qquad \supset . xRz \qquad (2)$$
$$\vdash .(1) .(2) . \supset \vdash :. \mathrm{Hp} . \supset : xRz . \equiv . yRz :$$
$$[*10{\cdot}11{\cdot}21.*20{\cdot}15.*32{\cdot}111] \supset : \overleftarrow{R}`x = \overleftarrow{R}`y :. \supset \vdash . \mathrm{Prop}$$

***34·84.** $\vdash : R = \breve{R} . R^2 \subset R . y \in \mathrm{D}`R . \overleftarrow{R}`x = \overleftarrow{R}`y . \supset . xRy$

Dem.

$$\vdash .*34{\cdot}82 . \qquad \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \supset . yRy \qquad (1)$$
$$\vdash .*32{\cdot}181 .*20{\cdot}31 . \supset \vdash :. \mathrm{Hp} . \supset : xRz . \equiv_z . yRz :$$

$$[*10{\cdot}1] \qquad \supset : xRy \,.\equiv.\, yRy \qquad (2)$$
$$\vdash .(1).(2). \qquad \supset \vdash . \text{Prop}$$

***34·841.** $\vdash : R = \breve{R} \,.\, R^2 \subseteq R \,.\, x \in \mathrm{D}`R \,.\, \overleftarrow{R}`x = \overleftarrow{R}`y \,.\supset.\, xRy$

Dem.

$$\vdash .*34{\cdot}84\frac{y,\ x}{x,\ y}.\supset \vdash : \mathrm{Hp} \,.\supset.\, yRx \,.$$
$$[*31{\cdot}11.\mathrm{Hp}] \qquad \supset . xRy : \supset \vdash . \text{Prop}$$

***34·85.** $\vdash :. R = \breve{R} \,.\, R^2 \subseteq R \,.\supset : xRy \,.\equiv.\, x \in \mathrm{D}`R \,.\, \overleftarrow{R}`x = \overleftarrow{R}`y$

$[*34{\cdot}83{\cdot}841 \,.*33{\cdot}14]$

*35. RELACIONES CON DOMINIOS LIMITADOS Y DOMINIOS CONVERSOS

Sumario del *35.

En esta sección, hemos de considerar la relación que se deriva de una relación dada R al limitar su dominio o su dominio converso a miembros de alguna clase señalada. Una relación R con su dominio limitado a miembros de α, se escribe "$\alpha \restriction R$"; con su dominio converso limitado a miembros de β, se escribe "$R \upharpoonright \beta$"; con ambas limitaciones se escribe "$\alpha \restriction R \upharpoonright \beta$". Así, por ejemplo, "hermano" y "hermana" expresan la misma relación (que son de un parentesco común), con el dominio limitado en el primer caso a varones, y en el segundo a hembras. "La relación de amos blancos a criados de color" es una relación limitada tanto por su dominio como por su dominio converso. Ponemos

***35·01.** $\alpha \restriction R = \hat{x}\hat{y}\,(x \in \alpha \,.\, xRy)$ Df

con definiciones similares para $R \upharpoonright \alpha$ y para $\alpha \restriction R \upharpoonright \beta$.

Un caso particularmente importante es aquel en el que se impone la misma limitación sobre el dominio y sobre el dominio converso, es decir, en donde tenemos una relación de la forma "$\alpha \restriction R \upharpoonright \alpha$". En este caso, la limitación a miembros de α puede expresarse más brevemente como algo impuesto sobre el *campo*. En cuanto a este caso, es conveniente adoptar "$R \upharpoonright \alpha$" como una notación alternativa. Este caso se considerará en el número *36.

Es conveniente considerar ahora la relación entre x e y que esté constituida por una x que sea miembro de α y por una y que sea miembro de β. Esta relación se simbolizará por "$\alpha \uparrow \beta$". Así, pues, ponemos

***35·04.** $\alpha \uparrow \beta = \hat{x}\hat{y}\,(x \in \alpha \,.\, y \in \beta)$ Df

La principal importancia de las relaciones con *campos* limitados aparece en la teoría de las series. Dada una serie generada por la relación R, sea α una clase que consiste en parte de esta serie. Entonces α es el campo de la relación $\alpha \restriction R \upharpoonright \alpha$ o $R \upharpoonright \alpha$, y es ésta la relación generadora de la serie de miembros de α en el mismo orden que tienen como partes de la serie original. Así, pues, las partes de una serie, consideradas no meramente como clases sino como serie, se tratan por medio de relaciones seriales con campos limitados.

Las relaciones con *dominios* limitados no se usan, ni con mucho, tanto como las relaciones con *dominios conversos* limitados. Las relaciones con dominios conversos limitados juegan un gran papel en la aritmética, especialmente al establecerse las leyes formales. Lo que se desea en tales casos es una relación de uno-a-uno correlacionando dos clases o dos series. Es decir, deseamos una relación tal que no sólo $R`y$ exista siempre que $y \in \Cnv`R$, sino también que exista $\breve{R}`x$ siempre que

$x \in \mathrm{D}`R$. El tipo de relación que más fácilmente se encuentra que efectúe una relación como la dicha es alguna relación tal como D o $\breve{\mathrm{C}}$ o $C$, o alguna otra relación constante para la que siempre tengamos $\mathrm{E}\,!\,R`y$, con su dominio converso limitado de forma que, sujeto a la limitación, sólo un valor de y ofrezca un valor dado de $R`y$. Así, por ejemplo, sea λ una clase de relaciones, dos de las cuales no tengan el mismo dominio; entonces $\mathrm{D} \upharpoonright \lambda$ será una correlación de uno a uno de estas relaciones con sus dominios: si $R, S \in \lambda$, tenemos

$$\mathrm{D}`R = \mathrm{D}`S \,.\supset.\, R = S.$$

Tendremos también $\mathrm{D}`R = (\mathrm{D} \upharpoonright \lambda)`R$ y $\mathrm{D}`S = (\mathrm{D} \upharpoonright \lambda)`S$. Por otra parte, el dominio converso de $\mathrm{D} \upharpoonright \lambda$ es λ, y el dominio de $\mathrm{D} \upharpoonright \lambda$ es la clase de los dominios de los miembros de λ. Así, pues, $\mathrm{D} \upharpoonright \lambda$ da una correlación uno-uno de λ con los dominios de los miembros de λ. Es importante en aquellos casos en que son útiles las relaciones con los dominios conversos limitados.

Como referencia, en este número se dan un gran número de proposiciones, pero las que se usen frecuentemente serán relativamente pocas. Entre éstas se encuentran las siguientes:

***35·21.** $\vdash .\, \alpha \restriction R \upharpoonright \beta = (\alpha \restriction R) \upharpoonright \beta = \alpha \restriction (R \upharpoonright \beta)$

***35·31.** $\vdash .\, (R \upharpoonright \alpha) \upharpoonright \beta = R \upharpoonright (\alpha \cap \beta)$

***35·354.** $\vdash .\, (R \upharpoonright \alpha) \mid S = R \mid \alpha \restriction S$

Es decir, en un producto relativo no se produce cambio si limitamos el dominio converso del primer factor, o el dominio del segundo.

***35·412.** $\vdash .\, R \upharpoonright (\beta \cup \beta') = R \upharpoonright \beta \cup R \upharpoonright \beta'$

***35·452.** $\vdash : \mathrm{C}`R \subset \beta \,.\supset.\, R \upharpoonright \beta = R$

***35·48.** $\vdash : \mathrm{C}`P \subset \alpha \,.\supset.\, P \mid (\alpha \restriction R) = P \mid R$

***35·52.** $\vdash .\, \mathrm{Cnv}`(R \upharpoonright \beta) = \beta \restriction \breve{R}$

***35·61.** $\vdash .\, \mathrm{D}`(\alpha \restriction R) = \alpha \cap \mathrm{D}`R$

***35·64.** $\vdash .\, \mathrm{C}`(R \upharpoonright \beta) = \beta \cap \mathrm{C}`R$

***35·65.** $\vdash : \beta \subset \mathrm{C}`R \,.\supset.\, \mathrm{C}`(R \upharpoonright \beta) = \beta$

La hipótesis $\beta \subset \mathrm{C}`R$ se cumple en la mayoría de los casos en los que tengamos ocasión de usar $R \upharpoonright \beta$.

***35·66.** $\vdash : \mathrm{C}`R \subset \beta \,.\equiv.\, R \upharpoonright \beta = R$

***35·7.** $\vdash : \phi\,\{(R \upharpoonright \beta)`y\} \,.\equiv.\, y \in \beta \,.\, \phi\,(R`y)$

Esta proposición se usa muy frecuentemente, debido al hecho de que la limitación de dominio converso se aplica principalmente a relaciones tales que dan origen a funciones descriptivas (por ejemplo, D, $\breve{\mathrm{C}}$, C).

***35·71.** $\vdash :. y \in \beta \,.\supset_y.\, R`y = S`y :\supset.\, R \upharpoonright \beta = S \upharpoonright \beta$

Esta proposición es útil por una razón similar a la que hace útil a la *35·7.

***35·82.** $\vdash .\, \alpha \upharpoonright \beta = \alpha \restriction \dot{\mathrm{V}} \upharpoonright \beta$

Debido a esta proposición, las propiedades de $\alpha \uparrow \beta$ pueden deducirse a partir de las propiedades –ya probadas– de $\alpha \upharpoonright R \upharpoonright \beta$, pero haciendo el cambio $R = \dot{V}$.

La relación "$\alpha \uparrow \beta$" es la que podemos llamar una relación "analizable", es decir, la que es válida entre x e y cuando $x \in \alpha$ e $y \in \beta$, esto es, cuando x tenga una propiedad independiente de y, e y tenga una propiedad independiente de x.

***35·85.** $\vdash : \exists ! \beta . \supset . D'(\alpha \uparrow \beta) = \alpha$

***35·86.** $\vdash : \exists ! \alpha . \supset . \breve{C}'(\alpha \uparrow \beta) = \beta$

Si α o β son nulos, también lo es $\alpha \uparrow \beta$ (*35·88).

***35·01.** $\alpha \upharpoonright R = \hat{x}\hat{y}(x \in \alpha . xRy)$ Df

***35·02.** $R \upharpoonright \beta = \hat{x}\hat{y}(xRy . y \in \beta)$ Df

***35·03.** $\alpha \upharpoonright R \upharpoonright \beta = \hat{x}\hat{y}(x \in \alpha . xRy . y \in \beta)$ Df

***35·04.** $\alpha \uparrow \beta = \hat{x}\hat{y}(x \in \alpha . y \in \beta)$ Df

***35·05.** $R'x \uparrow \beta = (R'x) \uparrow \beta$ Df

La última definición nada más que sirve para evitar los paréntesis.

***35·1.** $\vdash : x(\alpha \upharpoonright R)y . \equiv . x \in \alpha . xRy$ [*21·3 . (*35·01)]

***35·101.** $\vdash : x(R \upharpoonright \beta)y . \equiv . xRy . y \in \beta$

***35·102.** $\vdash : x(\alpha \upharpoonright R \upharpoonright \beta)y . \equiv . x \in \alpha . xRy . y \in \beta$

***35·103.** $\vdash : x(\alpha \uparrow \beta)y . \equiv . x \in \alpha . y \in \beta$

***35·11.** $\vdash . \alpha \upharpoonright R \upharpoonright \beta = (\alpha \upharpoonright R) \dot{\cap} (R \upharpoonright \beta)$

Dem.

$\vdash . *35·102 . \supset \vdash : x(\alpha \upharpoonright R \upharpoonright \beta)y . \equiv . x \in \alpha . xRy . y \in \beta .$

[*4·24] $\equiv . x \in \alpha . xRy . xRy . y \in \beta .$

[*35·1·101] $\equiv . x(\alpha \upharpoonright R)y . x(R \upharpoonright \beta)y .$

[*23·33] $\equiv . x\{(\alpha \upharpoonright R) \dot{\cap} (R \upharpoonright \beta)\}y : \supset \vdash .$ Prop

***35·12.** $\vdash . (\alpha \upharpoonright R) \dot{\cap} (S \upharpoonright \beta) = \alpha \upharpoonright (R \dot{\cap} S) \upharpoonright \beta$

Dem.

$\vdash . *23·33 . \supset \vdash : x\{(\alpha \upharpoonright R) \dot{\cap} (S \upharpoonright \beta)\}y . \equiv . x(\alpha \upharpoonright R)y . x(S \upharpoonright \beta)y .$

[*35·1·101] $\equiv . x \in \alpha . xRy . xSy . y \in \beta .$

[*23·33] $\equiv . x \in \alpha . x(R \dot{\cap} S)y . y \in \beta .$

[*35·102] $\equiv . x\{\alpha \upharpoonright (R \dot{\cap} S) \upharpoonright \beta\}y : \supset \vdash .$ Prop

***35·13.** $\vdash . (\alpha \upharpoonright R) \dot{\cap} (\beta \upharpoonright S) = (\alpha \cap \beta) \upharpoonright (R \dot{\cap} S)$

Dem.

$\vdash . *23·33 . \supset \vdash : x\{(\alpha \upharpoonright R) \dot{\cap} (\beta \upharpoonright S)\}y . \equiv . x(\alpha \upharpoonright R)y . x(\beta \upharpoonright S)y .$

[*35·1] $\equiv . x \in \alpha . xRy . x \in \beta . xSy .$

[*22·33.*23·33] $\equiv . x \in (\alpha \cap \beta) . x(R \dot{\cap} S)y .$

[*35·1] $\equiv . x\{(\alpha \cap \beta) \upharpoonright (R \dot{\cap} S)\}y : \supset \vdash .$ Prop

***35·14.** $\vdash .(R \restriction \alpha) \dot{\cap} (S \restriction \beta) = (R \dot{\cap} S) \restriction (\alpha \cap \beta)$ [Prueba similar a la *35·13]

***35·15.** $\vdash .(\alpha \upharpoonright R \restriction \beta) \dot{\cap} (\alpha' \upharpoonright S \restriction \beta') = (\alpha \cap \alpha') \upharpoonright (R \dot{\cap} S) \restriction (\beta \cap \beta')$

Dem.

$\vdash .$ *35·11 $. \supset$

$\vdash .(\alpha \upharpoonright R \restriction \beta) \dot{\cap} (\alpha' \upharpoonright S \restriction \beta') = (\alpha \upharpoonright R) \dot{\cap} (R \restriction \beta) \dot{\cap} (\alpha' \upharpoonright S) \dot{\cap} (S \restriction \beta')$

[*35·13·14] $= \{(\alpha \cap \alpha') \upharpoonright (R \dot{\cap} S)\} \dot{\cap} \{(R \dot{\cap} S) \restriction (\beta \cap \beta')\}$

[*35·11] $= \{(\alpha \cap \alpha') \upharpoonright (R \dot{\cap} S) \restriction (\beta \cap \beta')\} . \supset \vdash .$ Prop

***35·16.** $\vdash .(\alpha \upharpoonright R) \dot{\cap} S = \alpha \upharpoonright (R \dot{\cap} S) = R \dot{\cap} \alpha \upharpoonright S$ [Prueba similar a la *35·13]

***35·17.** $\vdash .(R \restriction \beta) \dot{\cap} S = (R \dot{\cap} S) \restriction \beta = R \dot{\cap} S \restriction \beta$ [Prueba similar a la *35·13]

***35·18.** $\vdash .(\alpha \upharpoonright R \restriction \beta) \dot{\cap} S = \alpha \upharpoonright (R \dot{\cap} S) \restriction \beta = R \dot{\cap} \alpha \upharpoonright S \restriction \beta$

[Prueba similar a la *35·15]

***35·21.** $\vdash .\alpha \upharpoonright R \restriction \beta = (\alpha \upharpoonright R) \restriction \beta = \alpha \upharpoonright (R \restriction \beta)$

Dem.

$\vdash .$ *35·102 $. \supset \vdash : x (\alpha \upharpoonright R \restriction \beta) y . \equiv . x \in \alpha . xRy . y \in \beta .$

[*35·1] $\equiv . x (\alpha \upharpoonright R) y . y \in \beta .$

[*35·101] $\equiv . x \{(\alpha \upharpoonright R) \restriction \beta\} y$ (1)

$\vdash .$ *35·102 $. \supset \vdash : x (\alpha \upharpoonright R \restriction \beta) y . \equiv . x \in \alpha . xR\dot{y} . y \in \beta .$

[*35·101] $\equiv . x \in \alpha . x (R \restriction \beta) y .$

[*35·1] $\equiv . x \{\alpha \upharpoonright (R \restriction \beta)\} y$ (2)

$\vdash .(1) .(2) . \supset \vdash .$ Prop

***35·22.** $\vdash .(\alpha \upharpoonright R) \mid S = \alpha \upharpoonright (R \mid S)$

Dem.

$\vdash .$ *34·1 $. \supset \vdash :. x \{(\alpha \upharpoonright R) \mid S\} y . \equiv : (\exists z) . x (\alpha \upharpoonright R) z . zSy :$

[*35·1] $\equiv : (\exists z) . x \in \alpha . xRz . zSy :$

[*10·35] $\equiv : x \in \alpha : (\exists z) . xRz . zSy .$

[*34·1] $\equiv : x \in \alpha . x (R \mid S) y :$

[*35·1] $\equiv : x \{\alpha \upharpoonright (R \mid S)\} y :. \supset \vdash .$ Prop

***35·23.** $\vdash . S \mid (R \restriction \beta) = (S \mid R) \restriction \beta$ [Prueba similar a la *35·22]

***35·24.** $\alpha \upharpoonright R \mid S = (\alpha \upharpoonright R) \mid S$ Df

***35·25.** $S \mid R \restriction \beta = (S \mid R) \restriction \beta$ Df

***35·26.** $\vdash .(\alpha \upharpoonright R) \mid (S \restriction \beta) = \alpha \upharpoonright (R \mid S) \restriction \beta = \{\alpha \upharpoonright (R \mid S)\} \restriction \beta = \alpha \upharpoonright \{(R \mid S) \restriction \beta\}$

$= \{(\alpha \upharpoonright R) \mid S\} \restriction \beta = \alpha \upharpoonright \{R \mid (S \restriction \beta)\}$

$= (\alpha \upharpoonright R \mid S) \restriction \beta = \alpha \upharpoonright (R \mid S \restriction \beta)$

Dem.

$\vdash .$ *34·1 $. \supset \vdash :. x \{(\alpha \upharpoonright R) \mid (S \restriction \beta)\} y . \equiv : (\exists z) . x (\alpha \upharpoonright R) z . z (S \restriction \beta) y :$

[*35·1·101] $\equiv : (\exists z) . x \in \alpha . xRz . zSy . y \in \beta :$

[*10·35] $\equiv : x \in \alpha . y \in \beta : (\exists z) . xRz . zSy :$

[*34·1] $\equiv : x \in \alpha . x (R \mid S) y . y \in \beta :$

[*35·102] $\equiv : x \{\alpha \upharpoonright (R \mid S) \restriction \beta\} y$ (1)

$\vdash .(1) .$ *35·21·22·23 $. (*35·24·25) . \supset \vdash .$ Prop

***35·27.** $\alpha \restriction R \mid S \upharpoonright \beta = (\alpha \restriction R \mid S) \upharpoonright \beta$ Df

***35·31.** $\vdash . (R \upharpoonright \alpha) \upharpoonright \beta = R \upharpoonright (\alpha \cap \beta)$

Dem.

$$\begin{aligned}
&\vdash . *35{\cdot}101 . \supset \vdash : x \{(R \upharpoonright \alpha) \upharpoonright \beta\} y . \equiv . x (R \upharpoonright \alpha) y . y \in \beta . \\
&[*35{\cdot}101] \qquad \equiv . xRy . y \in \alpha . y \in \beta . \\
&[*22{\cdot}33] \qquad \equiv . xRy . y \in \alpha \cap \beta . \\
&[*35{\cdot}101] \qquad \equiv . x \{R \upharpoonright (\alpha \cap \beta)\} y : \supset \vdash . \text{Prop}
\end{aligned}$$

***35·32.** $\vdash . \alpha \restriction (\beta \restriction R) = (\alpha \cap \beta) \restriction R$ [Prueba similar a la de la *35·31]

***35·33.** $\vdash . (\alpha \restriction R \upharpoonright \beta) \upharpoonright \gamma = \{\alpha \restriction R \upharpoonright (\beta \cap \gamma)\}$ [Prueba similar a la de la *35·31]

***35·34.** $\vdash . \alpha \restriction (\beta \restriction R \upharpoonright \gamma) = \{(\alpha \cap \beta) \restriction R \upharpoonright \gamma\}$ [Prueba similar a la de la *35·31]

***35·35.** $\vdash . \alpha \restriction R = (\alpha \cap \mathrm{D}`R) \restriction R$

Dem.

$$\begin{aligned}
&\vdash . *35{\cdot}1 . \supset \vdash : x (\alpha \restriction R) y . \equiv . x \in \alpha . xRy . \\
&[*33{\cdot}14] \qquad \equiv . x \in \alpha . x \in \mathrm{D}`R . xRy . \\
&[*22{\cdot}33.*35{\cdot}1] \qquad \equiv . x \{(\alpha \cap \mathrm{D}`R) \restriction R\} y : \supset \vdash . \text{Prop}
\end{aligned}$$

***35·351.** $\vdash . R \upharpoonright \beta = R \upharpoonright (\beta \cap \mathrm{C}`R)$ [Prueba como en la *35·35]

***35·352.** $\vdash . \alpha \restriction R \upharpoonright \beta = (\alpha \cap \mathrm{D}`R) \restriction R \upharpoonright (\beta \cap \mathrm{C}`R)$ [Prueba como en la *35·35]

***35·354.** $\vdash . (R \upharpoonright \alpha) \mid S = R \mid \alpha \restriction S$

Dem.

$$\begin{aligned}
&\vdash . *34{\cdot}1 . *35{\cdot}101 . \supset \\
&\vdash : x \{(R \upharpoonright \alpha) \mid S\} z . \equiv . (\exists y) . xRy . y \in \alpha . ySz . \\
&[*35{\cdot}1] \qquad \equiv . (\exists y) . xRy . y (\alpha \restriction S) z . \\
&[*34{\cdot}1] \qquad \equiv . x \{R \mid (\alpha \restriction S)\} z : \supset \vdash . \text{Prop}
\end{aligned}$$

***35·41.** $\vdash . (\alpha \cup \alpha') \restriction R = \alpha \restriction R \cup \alpha' \restriction R$ [*35·1 . *22·34]

***35·412.** $\vdash . R \upharpoonright (\beta \cup \beta') = R \upharpoonright \beta \cup R \upharpoonright \beta'$ [*35·101 . *22·34]

***35·413.** $\vdash . (\alpha \cup \alpha') \restriction R \upharpoonright (\beta \cup \beta') = (\alpha \restriction R \upharpoonright \beta) \cup (\alpha \restriction R \upharpoonright \beta') \cup (\alpha' \restriction R \upharpoonright \beta) \cup (\alpha' \restriction R \upharpoonright \beta')$ [*35·102 . *22·34]

***35·42.** $\vdash . \alpha \restriction (R \cup S) = (\alpha \restriction R) \cup (\alpha \restriction S)$ [*35·1 . *23·34]

***35·421.** $\vdash . (R \cup S) \upharpoonright \beta = (R \upharpoonright \beta) \cup (S \upharpoonright \beta)$ [*35·101 . *23·34]

***35·422.** $\vdash . \alpha \restriction (R \cup S) \upharpoonright \beta = (\alpha \restriction R \upharpoonright \beta) \cup (\alpha \restriction S \upharpoonright \beta)$ [*35·102 . *23·34]

***35·43.** $\vdash : \alpha \subset \beta . \supset . \alpha \restriction R \subseteq \beta \restriction R$

Dem.

$$\begin{aligned}
&\vdash . *35{\cdot}1 . \supset \vdash :. \alpha \subset \beta . \supset : x (\alpha \restriction R) y . \equiv . x \in \alpha . xRy . \\
&[*22{\cdot}1] \qquad \supset . x \in \beta . xRy . \\
&[*35{\cdot}1] \qquad \supset . x (\beta \restriction R) y :. \supset \vdash . \text{Prop}
\end{aligned}$$

***35·431.** $\vdash : \beta \subset \gamma . \supset . R \upharpoonright \beta \subseteq R \upharpoonright \gamma$ [Prueba similar a la de la *35·43]

***35·432.** $\vdash : \alpha \subset \gamma . \beta \subset \delta . \supset . \alpha \restriction R \upharpoonright \beta \subseteq \gamma \restriction R \upharpoonright \delta$ [Prueba similar a la de la *35·43]

***35·44.** $\vdash . \alpha \restriction R \subseteq R$

Dem.

$\vdash .*35{\cdot}1 . \supset \vdash : x(\alpha \restriction R)y . \supset . x \in \alpha . xRy .$

[*3·27] $\supset . xRy : \supset \vdash .$ Prop

***35·441.** $\vdash . R \upharpoonright \beta \subseteq R$ [Prueba similar a la de la *35·44]

***35·442.** $\vdash . \alpha \restriction R \upharpoonright \beta \subseteq R$ [Prueba similar a la de la *35·44]

***35·451.** $\vdash : \mathrm{D}'R \subset \alpha . \supset . \alpha \restriction R = R$

Dem.

$\vdash .*4{\cdot}71 . \supset \vdash :. \mathrm{Hp} . \supset : x \in \mathrm{D}'R . \equiv . x \in \mathrm{D}'R . x \in \alpha :$

[*4·36] $\supset : x \in \mathrm{D}'R . xRy . \equiv . x \in \mathrm{D}'R . xRy . x \in \alpha$ (1)

$\vdash .*33{\cdot}14 . *4{\cdot}71 . \supset \vdash : xRy . \equiv . x \in \mathrm{D}'R . xRy$ (2)

$\vdash .(1) .(2) . \supset \vdash :. \mathrm{Hp} . \supset : xRy . \equiv . xRy . x \in \alpha .$

[*35·1] $\equiv . x(\alpha \restriction R)y :. \supset \vdash .$ Prop

***35·452.** $\vdash : \mathrm{C}'R \subset \beta . \supset . R \upharpoonright \beta = R$ [Prueba similar]

***35·453.** $\vdash : \mathrm{D}'R \subset \alpha . \supset . \alpha \restriction R \upharpoonright \beta = R \upharpoonright \beta$ [Prueba similar]

***35·454.** $\vdash : \mathrm{C}'R \subset \beta . \supset . \alpha \restriction R \upharpoonright \beta = \alpha \restriction R$ [Prueba similar]

***35·46.** $\vdash : R \subseteq S . \supset . \alpha \restriction R \subseteq \alpha \restriction S$

Dem.

$\vdash .*23{\cdot}1 . \supset \vdash :. \mathrm{Hp} . \supset : xRy . \supset . xSy :$

[Fact] $\supset : x \in \alpha . xRy . \supset . x \in \alpha . xSy :$

[*35·1] $\supset : x(\alpha \restriction R)y . \supset . x(\alpha \restriction S)y :. \supset \vdash .$ Prop

***35·461.** $\vdash : R \subseteq S . \supset . R \upharpoonright \beta \subseteq S \upharpoonright \beta$ [Prueba similar]

***35·462.** $\vdash : R \subseteq S . \supset . \alpha \restriction R \upharpoonright \beta \subseteq \alpha \restriction S \upharpoonright \beta$ [Prueba similar]

***35·471.** $\vdash : \mathrm{C}'P \cap \alpha = \Lambda . \supset . P \mid (\alpha \restriction R) = \dot{\Lambda}$

Dem.

$\vdash .*34{\cdot}1 . \supset \vdash : x \{P \mid (\alpha \restriction R)\} z . \supset . (\exists y) . xPy . y(\alpha \restriction R) z .$

[*35·1] $\supset . (\exists y) . xPy . y \in \alpha . yRz .$

[*33·14 . *10·5] $\supset . (\exists y) . y \in \mathrm{C}'P . y \in \alpha .$

[*22·33 . *24·5] $\supset . \exists ! \mathrm{C}'P \cap \alpha$ (1)

$\vdash .(1) . \mathrm{Transp} . *24{\cdot}51 . \supset$

$\vdash : \mathrm{C}'P \cap \alpha = \Lambda . \supset . \sim x \{P \mid (\alpha \restriction R)\} z :$

[*11·11·3] $\supset \vdash : \mathrm{C}'P \cap \alpha = \Lambda . \supset . (x, z) . \sim x \{P \mid (\alpha \restriction R)\} z .$

[*25·15] $\supset . P \mid (\alpha \restriction R) = \dot{\Lambda} : \supset \vdash .$ Prop

***35·472.** $\vdash : \mathrm{D}'P \cap \alpha = \Lambda . \supset . (R \upharpoonright \alpha) \mid P = \dot{\Lambda}$

***35·473.** $\vdash : \mathrm{C}'P \cap \alpha = \Lambda . \supset . P \mid (\alpha \restriction R \upharpoonright \beta) = \dot{\Lambda}$

***35·474.** $\vdash : \mathrm{D}'P \cap \beta = \Lambda . \supset . (\alpha \restriction R \upharpoonright \beta) \mid P = \dot{\Lambda}$

***35·48.** $\vdash : \mathrm{C}'P \subset \alpha . \supset . P \mid (\alpha \restriction R) = P \mid R$

Dem.

$\vdash .*22{\cdot}1 . \supset \vdash :. \mathrm{Hp} . \supset : y \in \mathrm{C}'P . \supset_y . y \in \alpha :$

$$[*4{\cdot}71] \qquad \supset : y \in \mathrm{C}`P \,.\, y \in \alpha \,.\, \equiv_y \,.\, y \in \mathrm{C}`P :$$

$$[*10{\cdot}311] \qquad \supset : xPy \,.\, y \in \mathrm{C}`P \,.\, y \in \alpha \,.\, \equiv_y \,.\, xPy \,.\, y \in \mathrm{C}`P \qquad (1)$$

$$\vdash \,.\, *33{\cdot}14 \,.\, *4{\cdot}71 \,.\, \supset \vdash : xPy \,.\, y \in \mathrm{C}`P \,.\, \equiv \,.\, xPy \qquad (2)$$

$$\vdash \,.\, (1) \,.\, (2) \,.\, \supset \vdash :. \mathrm{Hp} \,.\, \supset : xPy \,.\, y \in \alpha \,.\, \equiv_y \,.\, xPy :$$

$$[*10{\cdot}311] \qquad \supset : xPy \,.\, y \in \alpha \,.\, yRz \,.\, \equiv_y \,.\, xPy \,.\, yRz :$$

$$[*35{\cdot}1] \qquad \supset : xPy \,.\, y \,(\alpha \restriction R)\, z \,.\, \equiv_y \,.\, xPy \,.\, yRz :$$

$$[*10{\cdot}281] \qquad \supset : (\exists y) \,.\, xPy \,.\, y \,(\alpha \restriction R)\, z \,.\, \equiv \,.\, (\exists y) \,.\, xPy \,.\, yRz :$$

$$[*34{\cdot}1] \qquad \supset : x \,(P \mid \alpha \restriction R)\, z \,.\, \equiv \,.\, x \,(P \mid R)\, z :. \supset \vdash \,.\, \mathrm{Prop}$$

***35·481.** $\vdash : \mathrm{D}`R \subset \beta \,.\, \supset \,.\, (P \upharpoonright \beta) \mid R = P \mid R$ [Prueba similar]

***35·51.** $\vdash \,.\, \mathrm{Cnv}`(\alpha \restriction R) = \breve{R} \upharpoonright \alpha$

Dem.

$$\vdash \,.\, *31{\cdot}131 \,.\, \supset \vdash : x \,\{\mathrm{Cnv}`(\alpha \restriction R)\}\, y \,.\, \equiv \,.\, y \,(\alpha \restriction R)\, x \,.$$

$$[*35{\cdot}1] \qquad \equiv \,.\, y \in \alpha \,.\, yRx \,.$$

$$[*31{\cdot}11] \qquad \equiv \,.\, x \breve{R} y \,.\, y \in \alpha \,.$$

$$[*35{\cdot}101] \qquad \equiv \,.\, x \,(\breve{R} \upharpoonright \alpha)\, y : \supset \vdash \,.\, \mathrm{Prop}$$

***35·52.** $\vdash \,.\, \mathrm{Cnv}`(R \upharpoonright \beta) = \beta \restriction \breve{R}$ [Prueba similar a la de la *35·51]

***35·53.** $\vdash \,.\, \mathrm{Cnv}`(\alpha \restriction R \upharpoonright \beta) = \beta \restriction \breve{R} \upharpoonright \alpha$ [Prueba similar a la de la *35·51]

***35·61.** $\vdash \,.\, \mathrm{D}`(\alpha \restriction R) = \alpha \cap \mathrm{D}`R$

Dem.

$$\vdash \,.\, *33{\cdot}13 \,.\, \supset \vdash :. x \in \mathrm{D}`(\alpha \restriction R) \,.\, \equiv : (\exists y) \,.\, x \,(\alpha \restriction R)\, y :$$

$$[*35{\cdot}1] \qquad \equiv : (\exists y) \,.\, x \in \alpha \,.\, xRy :$$

$$[*10{\cdot}35] \qquad \equiv : x \in \alpha : (\exists y) \,.\, xRy :$$

$$[*33{\cdot}13] \qquad \equiv : x \in \alpha \,.\, x \in \mathrm{D}`R :$$

$$[*22{\cdot}33] \qquad \equiv : x \in (\alpha \cap \mathrm{D}`R) :. \supset \vdash \,.\, \mathrm{Prop}$$

***35·62.** $\vdash : \alpha \subset \mathrm{D}`R \,.\, \supset \,.\, \mathrm{D}`(\alpha \restriction R) = \alpha$ [*35·61 . *22·621]

***35·63.** $\vdash : \mathrm{D}`R \subset \alpha \,.\, \equiv \,.\, \alpha \restriction R = R$

Dem.

$$\vdash \,.\, *35{\cdot}61 \,.\, \supset \vdash : \alpha \restriction R = R \,.\, \supset \,.\, \alpha \cap \mathrm{D}`R = \mathrm{D}`R \,.$$

$$[*22{\cdot}621] \qquad \supset \,.\, \mathrm{D}`R \subset \alpha \qquad (1)$$

$$\vdash \,.\, (1) \,.\, *35{\cdot}451 \,.\, \supset \vdash \,.\, \mathrm{Prop}$$

***35·64.** $\vdash \,.\, \mathrm{C}`(R \upharpoonright \beta) = \beta \cap \mathrm{C}`R$ [Prueba como en la *35·61]

***35·641.** $\vdash : \alpha \cap \mathrm{D}`R = \Lambda \,.\, \supset \,.\, \alpha \restriction R = \dot{\Lambda}$ [*35·61 . *33·241]

***35·642.** $\vdash : \alpha \cap \mathrm{C}`R = \Lambda \,.\, \supset \,.\, R \upharpoonright \alpha = \dot{\Lambda}$ [*35·64 . *33·241]

***35·643.** $\vdash : \alpha \cap \mathrm{D}`R = \Lambda \,.\, \supset \,.\, \alpha \restriction (R \cup S) = \alpha \restriction S$ [*35·641·42]

***35·644.** $\vdash : \alpha \cap \mathrm{C}`R = \Lambda \,.\, \supset \,.\, (R \cup S) \upharpoonright \alpha = S \upharpoonright \alpha$ [*35·642·421]

***35·65.** $\vdash : \beta \subset \mathrm{C}`R \,.\, \supset \,.\, \mathrm{C}`(R \upharpoonright \beta) = \beta$ [*35·64 . *22·621]

***35·66.** $\vdash : \mathrm{C}`R \subset \beta \,.\, \equiv \,.\, R \upharpoonright \beta = R$ [Prueba como en la *35·63]

***35·671.** $\vdash \,.\, \mathrm{D}`(R \mid S) = \mathrm{D}`(R \upharpoonright \mathrm{D}`S)$

Dem.

$\vdash .*33{\cdot}13 . \supset \vdash :. x \in \mathrm{D}`(R \mid S) . \equiv : (\exists y) . x (R \mid S) y :$

[*34·1] $\equiv : (\exists y, z) . xRz . zSy :$

[*11·23] $\equiv : (\exists z, y) . xRz . zSy :$

[*10·35] $\equiv : (\exists z) : xRz : (\exists y) . zSy :$

[*33·13] $\equiv : (\exists z) . xRz . z \in \mathrm{D}`S :$

[*35·101] $\equiv : (\exists z) . x (R \restriction \mathrm{D}`S) z :$

[*33·13] $\equiv : x \in \mathrm{D}`(R \restriction \mathrm{D}`S) :. \supset \vdash .$ Prop

***35·672.** $\vdash . \mathrm{C}`(R \mid S) = \mathrm{C}`(\mathrm{C}`R \restriction S)$ [Prueba similar]

***35·68.** $\vdash : \alpha \cap \beta = \Lambda . \supset . (\alpha \restriction R \restriction \beta)^2 = \dot{\Lambda}$

Dem.

$\vdash .*35{\cdot}61{\cdot}64{\cdot}21 . \supset \vdash . \mathrm{D}`(\alpha \restriction R \restriction \beta) \subset \alpha . \mathrm{C}`(\alpha \restriction R \restriction \beta) \subset \beta .$

[*22·49.*24·13] $\supset \vdash : \alpha \cap \beta = \Lambda . \supset . \mathrm{D}`(\alpha \restriction R \restriction \beta) \cap \mathrm{C}`(\alpha \restriction R \restriction \beta) = \Lambda .$

[*34·531] $\supset . (\alpha \restriction R \restriction \beta)^2 = \dot{\Lambda} : \supset \vdash .$ Prop

***35·7.** $\vdash : \phi \{(R \restriction \beta)`y\} . \equiv . y \in \beta . \phi (R`y)$

Esta proposición se usa frecuentemente en las últimas partes de este trabajo.

Dem.

$\vdash .*14{\cdot}21 . \quad \supset \vdash : \phi \{(R \restriction \beta)`y\} . \supset . \mathrm{E} ! (R \restriction \beta)`y .$

[*33·43] $\supset . y \in \mathrm{C}`(R \restriction \beta) .$

[*35·64] $\supset . y \in \beta$ (1)

$\vdash . (1) .*4{\cdot}71 . \supset \vdash : \phi \{(R \restriction \beta)`y\} . \equiv . y \in \beta . \phi \{(R \restriction \beta)`y\}$ (2)

$\vdash .*4{\cdot}73 .*35{\cdot}101 . \supset \vdash :. y \in \beta . \quad \supset : x (R \restriction \beta) y . \equiv_x . xRy :$

[*14·272] $\supset : \phi \{(R \restriction \beta)`y\} . \equiv . \phi (R`y)$ (3)

$\vdash . (3) .*5{\cdot}32 . \supset \vdash : y \in \beta . \phi \{(R \restriction \beta)`y\} . \equiv . y \in \beta . \phi (R`y)$ (4)

$\vdash . (2) . (4) . \quad \supset \vdash .$ Prop

***35·71.** $\vdash :. y \in \beta . \supset_y . R`y = S`y : \supset . R \restriction \beta = S \restriction \beta$

Dem.

$\vdash .*4{\cdot}7 . \supset \vdash :.$ Hp $. \supset : y \in \beta . \supset_y . y \in \beta . R`y = S`y :$

[*35·7] $\supset : y \in \beta . \supset_y . (R \restriction \beta)`y = (S \restriction \beta)`y :$

[*35·64] $\supset : y \in \mathrm{C}`(R \restriction \beta) \cup \mathrm{C}`(S \restriction \beta) . \supset_y . (R \restriction \beta)`y = (S \restriction \beta)`y :$

[*33·45] $\supset : R \restriction \beta = S \restriction \beta :. \supset \vdash .$ Prop

***35·75.** $\vdash . \Lambda \restriction R = R \restriction \Lambda = \Lambda \restriction R \restriction \beta = \alpha \restriction R \restriction \Lambda = \dot{\Lambda}$

Dem.

$\vdash .*35{\cdot}61 . \quad \supset \vdash . \mathrm{D}`(\Lambda \restriction R) = \Lambda .$

[*33·241] $\supset \vdash . \Lambda \restriction R = \dot{\Lambda}$ (1)

$\vdash .*35{\cdot}64 . \quad \supset \vdash . \mathrm{C}`(R \restriction \Lambda) = \Lambda .$

[*33·241] $\supset \vdash . R \restriction \Lambda = \dot{\Lambda}$ (2)

$\vdash .*35{\cdot}441{\cdot}21 . \supset \vdash . \Lambda \restriction R \restriction \beta \subseteq \Lambda \restriction R .$

[(1).*25·13] $\supset \vdash . \Lambda \restriction R \restriction \beta = \dot{\Lambda}$ (3)

$\vdash .*35{\cdot}44{\cdot}21 . \quad \supset \vdash . \alpha \restriction R \restriction \Lambda \subseteq R \restriction \Lambda .$

[(2).*25·13] $\supset \vdash . \alpha \restriction R \restriction \Lambda = \dot{\Lambda}$ (4)

$$\vdash .(1).(2).(3).(4).\supset \vdash .\text{Prop}$$

***35·76.** $\vdash .\mathrm{V}\upharpoonleft R = R\upharpoonright \mathrm{V} = \mathrm{V}\upharpoonleft R\upharpoonright \mathrm{V} = R$

Dem.

$$\begin{aligned}
&\vdash .*35\cdot1 . \quad \supset \vdash : x(\mathrm{V}\upharpoonleft R)y . \quad \equiv . x \in \mathrm{V} . xRy . \\
&[*24\cdot104.*4\cdot73] \quad \equiv . xRy \qquad (1)\\
&\vdash .*35\cdot101 . \supset \vdash : x(R\upharpoonright \mathrm{V})y . \quad \equiv . xRy . y \in \mathrm{V} . \\
&[*24\cdot104.*4\cdot73] \quad \equiv . xRy \qquad (2)\\
&\vdash .*35\cdot102 . \supset \vdash : x(\mathrm{V}\upharpoonleft R\upharpoonright \mathrm{V})y . \equiv . x \in \mathrm{V} . xRy . y \in \mathrm{V} . \\
&[*24\cdot104.*4\cdot73] \quad \equiv . xRy \qquad (3)\\
&\vdash .(1).(2).(3). \supset \vdash . \text{Prop}
\end{aligned}$$

El resto de este número hasta la *35·93 exclusive, se relacionan con $\alpha \uparrow \beta$, excepto las *35·81·812.

***35·81.** $\vdash : x(\alpha\upharpoonleft \dot{\mathrm{V}})y . \equiv . x \in \alpha \quad [*35\cdot1 . *25\cdot104]$

***35·812.** $\vdash : x(\dot{\mathrm{V}}\upharpoonright \beta)y . \equiv . y \in \beta \quad [*35\cdot101 . *25\cdot104]$

***35·82.** $\vdash . \alpha \uparrow \beta = \alpha\upharpoonleft \dot{\mathrm{V}}\upharpoonright \beta$

Dem.

$$\begin{aligned}
&\vdash .*35\cdot103 . \supset \vdash : x(\alpha \uparrow \beta)y . \equiv . x \in \alpha . y \in \beta . \\
&[*25\cdot104] \quad \equiv . x \in \alpha . x\dot{\mathrm{V}}y . y \in \beta . \\
&[*35\cdot102] \quad \equiv . x(\alpha\upharpoonleft \dot{\mathrm{V}}\upharpoonright \beta)y : \supset \vdash . \text{Prop}
\end{aligned}$$

***35·822.** $\vdash . \alpha\upharpoonleft R\upharpoonright \beta = R \mathbin{\dot{\cap}} (\alpha \uparrow \beta)$

Dem.

$$\begin{aligned}
&\vdash .*35\cdot102 . \supset \vdash : x(\alpha\upharpoonleft R\upharpoonright \beta)y . \equiv . x \in \alpha . xRy . y \in \beta . \\
&[*4\cdot3] \quad \equiv . xRy . x \in \alpha . y \in \beta . \\
&[*35\cdot103] \quad \equiv . xRy . x(\alpha \uparrow \beta)y . \\
&[*23\cdot33] \quad \equiv . x\{R \mathbin{\dot{\cap}} (\alpha \uparrow \beta)\}y : \supset \vdash . \text{Prop}
\end{aligned}$$

***35·83.** $\vdash : \mathrm{D}`R \subset \alpha . \mathrm{C}`R \subset \beta . \equiv . R \in \alpha \uparrow \beta$

Dem.

$$\begin{aligned}
&\vdash .*33\cdot14 . \quad \supset \vdash :. xRy . \supset : x \in \mathrm{D}`R . y \in \mathrm{C}`R : \\
&[*22\cdot46] \quad \supset : \mathrm{D}`R \subset \alpha . \mathrm{C}`R \subset \beta . \supset . x \in \alpha . y \in \beta \qquad (1)\\
&\vdash .(1).\mathrm{Comm} . \supset \vdash :. \mathrm{D}`R \subset \alpha . \mathrm{C}`R \subset \beta . \supset : xRy . \supset . x \in \alpha . y \in \beta . \\
&[*35\cdot103] \quad \supset . x(\alpha \uparrow \beta)y \qquad (2)\\
&\vdash .*35\cdot103 . \quad \supset \vdash :. R \in \alpha \uparrow \beta . \supset : xRy . \supset_{x,y} . x \in \alpha . y \in \beta : \\
&[*33\cdot35\cdot351] \quad \supset : \mathrm{D}`R \subset \alpha . \mathrm{C}`R \subset \beta \qquad (3)\\
&\vdash .(2).(3). \quad \supset \vdash . \text{Prop}
\end{aligned}$$

***35·831.** $\vdash . \doteq (\alpha \uparrow \beta) = (-\alpha \uparrow \beta) \cup (\alpha \uparrow -\beta) \cup (-\alpha \uparrow -\beta)$

Dem.

$$\begin{aligned}
&\vdash .*23\cdot35 . \supset \vdash :: x\{\doteq(\alpha \uparrow \beta)\}y . \equiv :. \sim\{x(\alpha \uparrow \beta)y\} :. \\
&[*35\cdot103] \quad \equiv :. \sim(x \in \alpha . y \in \beta) :. \\
&[*4\cdot51] \quad \equiv :. x \sim\in \alpha . \vee . y \sim\in \beta :. \\
&[*4\cdot42] \quad \equiv :. x \sim\in \alpha : y \in \beta . \vee . y \sim\in \beta :. \vee :. x \in \alpha . \vee . x \sim\in \alpha : y \sim\in \beta :. \\
&[*4\cdot4] \quad \equiv :. x \sim\in \alpha . y \in \beta . \vee . x \sim\in \alpha . y \sim\in \beta . \vee . x \in \alpha . y \sim\in \beta . \vee . x \sim\in \alpha . y \sim\in \beta :.
\end{aligned}$$

[*4·25·31·37]

$$\equiv :. x \sim \epsilon \alpha . y \epsilon \beta . \vee . x \epsilon \alpha . y \sim \epsilon \beta . \vee . x \sim \epsilon \alpha . y \sim \epsilon \beta :.$$

[*22·35] $\equiv :. x \epsilon - \alpha . y \epsilon \beta . \vee . x \epsilon \alpha . y \epsilon - \beta . \vee . x \epsilon - \alpha . y \epsilon - \beta :.$

[*35·103] $\equiv :. x (- \alpha \uparrow \beta) y . \vee . x (\alpha \uparrow - \beta) y . \vee . x \{- \alpha \uparrow - \beta) y :.$

[*23·34] $\equiv :. x \{(- \alpha \uparrow \beta) \cup (\alpha \uparrow - \beta) \cup (- \alpha \uparrow - \beta)\} y :: \supset \vdash .$ Prop

***35·832.** $\vdash . \doteq (\alpha \uparrow R \uparrow \beta) = (- \alpha \uparrow \beta) \cup (\alpha \uparrow - \beta) \cup (- \alpha \uparrow - \beta) \cup \doteq R$

[*35·822·831 . Transp . *23·84]

***35·834.** $\vdash . (\alpha \uparrow \beta) \dot{\cap} (\gamma \uparrow \delta) = (\alpha \cap \gamma) \uparrow (\beta \cap \delta)$

Dem.

$\vdash . *35·103 . \supset$

$\vdash : x \{(\alpha \uparrow \beta) \dot{\cap} (\gamma \uparrow \delta)\} y . \equiv . x \epsilon \alpha . y \epsilon \beta . x \epsilon \gamma . y \epsilon \delta .$

[*22·33.*35·103] $\equiv . x \{(\alpha \cap \gamma) \uparrow (\beta \cap \delta)\} y : \supset \vdash .$ Prop

***35·84.** $\vdash . \mathrm{Cnv}`(\alpha \uparrow \beta) = \beta \uparrow \alpha$ [*35·103 . *31·131]

***35·85.** $\vdash : \exists ! \beta . \supset . \mathrm{D}`(\alpha \uparrow \beta) = \alpha$

Dem.

$\vdash . *35·103 . *10·281 . \supset$

$\vdash :. (\exists y) . x (\alpha \uparrow \beta) y . \equiv : (\exists y) . x \epsilon \alpha . y \epsilon \beta :$

[*10·35] $\equiv : x \epsilon \alpha : (\exists y) . y \epsilon \beta :$

[*24·5] $\equiv : x \epsilon \alpha . \exists ! \beta$ (1)

$\vdash . (1) . *33·13 . *10·35 . \supset \vdash .$ Prop

***35·86.** $\vdash : \exists ! \alpha . \supset . \mathrm{C}`(\alpha \uparrow \beta) = \beta$ [Prueba similar]

***35·87.** $\vdash : \dot{\exists} ! (\alpha \uparrow \beta) . \equiv . \exists ! \alpha . \exists ! \beta$

Dem.

$\vdash . *35·103 . \supset \vdash :. \dot{\exists} ! (\alpha \uparrow \beta) . \equiv : (\exists x, y) . x \epsilon \alpha . y \epsilon \beta :$

[*11·54] $\equiv : (\exists x) . x \epsilon \alpha : (\exists y) . y \epsilon \beta :$

[*24·5] $\equiv : \exists ! \alpha . \exists ! \beta :. \supset \vdash .$ Prop

***35·88.** $\vdash :. \alpha \uparrow \beta = \dot{\Lambda} . \equiv : \alpha = \Lambda . \vee . \beta = \Lambda$

[*35·87 . Transp . *24·51 . *25·51]

***35·881.** $\vdash : \mathrm{C}`R \subset \alpha . \supset . R | (\alpha \uparrow \beta) = \mathrm{D}`R \uparrow \beta$

Dem.

$\vdash . *34·1 . *35·103 . \supset$

$\vdash : x \{R | (\alpha \uparrow \beta)\} y . \equiv . (\exists z) . xRz . z \epsilon \alpha . y \epsilon \beta$ (1)

$\vdash . *33·14 . \supset \vdash :. \mathrm{C}`R \subset \alpha . \supset : xRz . \supset . z \epsilon \alpha :$

[*4·73] $\supset : xRz . \equiv . xRz . z \epsilon \alpha$ (2)

$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash :: \mathrm{Hp} . \supset :. x \{R | (\alpha \uparrow \beta)\} y . \equiv : (\exists z) . xRz . y \epsilon \beta :$

[*10·35] $\equiv : (\exists z) . xRz : y \epsilon \beta :$

[*33·13] $\equiv : x \epsilon \mathrm{D}`R . y \epsilon \beta :$

[*35·103] $\equiv : x (\mathrm{D}`R \uparrow \beta) y :: \supset \vdash .$ Prop

***35·882.** $\vdash : \mathrm{D}`R \subset \beta . \supset . (\alpha \uparrow \beta) | R = \alpha \uparrow \mathrm{C}`R$ [Prueba similar]

***35·89.** $\vdash : \exists ! \beta . \supset . (\alpha \uparrow \beta) | (\beta \uparrow \gamma) = (\alpha \uparrow \gamma) : \sim \exists ! \beta . \supset . (\alpha \uparrow \beta) | (\beta \uparrow \gamma) = \dot{\Lambda}$

Dem.

$\vdash .*34{\cdot}1 . \supset \vdash :. x \{(\alpha \uparrow \beta) \mid (\beta \uparrow \gamma)\} z .$

$\equiv : (\exists y) . x (\alpha \uparrow \beta) y . y (\beta \uparrow \gamma) z :$ [*35·103]

$\equiv : (\exists y) . x \epsilon \alpha . y \epsilon \beta . y \epsilon \beta . z \epsilon \gamma :$ [*4·24]

$\equiv : \exists ! \beta : x \epsilon \alpha . z \epsilon \gamma :$ [*10·35]

$\equiv : \exists ! \beta : x (\alpha \uparrow \gamma) z$ [*35·103] (1)

$\vdash . (1) . \supset \vdash :: \exists ! \beta . \supset : x \{(\alpha \uparrow \beta) \mid (\beta \uparrow \gamma)\} z . \equiv . x (\alpha \uparrow \gamma) z :.$

$\sim (\exists ! \beta) . \supset : \sim [x \{(\alpha \uparrow \beta) \mid (\beta \uparrow \gamma)\} z] :: \supset \vdash . \text{Prop}$

***35·891.** $\vdash :. \exists ! \beta . \vee . \sim \exists ! \alpha : \supset . (\alpha \uparrow \beta) \mid (\beta \uparrow \alpha) = (\alpha \uparrow \alpha)$

Dem.

$\vdash . *35{\cdot}88 . \supset \vdash : \sim \exists ! \alpha . \supset . \alpha \uparrow \alpha = \dot{\Lambda} . \alpha \uparrow \beta = \dot{\Lambda} .$

$\supset . \alpha \uparrow \alpha = \dot{\Lambda} . (\alpha \uparrow \beta) \mid (\beta \uparrow \alpha) = \dot{\Lambda} .$ [*34·32]

$\supset . (\alpha \uparrow \alpha) = (\alpha \uparrow \beta) \mid (\beta \uparrow \alpha)$ [*21·24] (1)

$\vdash . (1) . *35{\cdot}89 . \supset \vdash . \text{Prop}$

***35·892.** $\vdash : (\alpha \uparrow \alpha)^2 = (\alpha \uparrow \alpha)$ $\left[*35{\cdot}891 \frac{\alpha}{\beta}\right]$

***35·895.** $\vdash : \alpha \cap \beta = \Lambda . \supset . (\alpha \uparrow \beta)^2 = \dot{\Lambda}$ [*35·68·82]

***35·9.** $\vdash . \mathrm{D}`(\alpha \uparrow \alpha) = \mathrm{\Cup}`(\alpha \uparrow \alpha) = C`(\alpha \uparrow \alpha) = \alpha$

Dem.

$\vdash . *35{\cdot}85{\cdot}86 . \quad \supset \vdash : \exists ! \alpha . \supset . \mathrm{D}`(\alpha \uparrow \alpha) = \alpha . \mathrm{\Cup}`(\alpha \uparrow \alpha) = \alpha$ (1)

$\vdash . *35{\cdot}88 . \quad \supset \vdash : \sim \exists ! \alpha . \supset . \sim \dot{\exists} ! (\alpha \uparrow \alpha) .$

$\supset . \mathrm{D}`(\alpha \uparrow \alpha) = \Lambda . \mathrm{\Cup}`(\alpha \uparrow \alpha) = \Lambda .$ [*33·29]

$\supset . \mathrm{D}`(\alpha \uparrow \alpha) = \alpha . \mathrm{\Cup}`(\alpha \uparrow \alpha) = \alpha$ (2) [*24·51]

$\vdash . (1) . (2) . *4{\cdot}83 . \supset \vdash . \mathrm{D}`(\alpha \uparrow \alpha) = \mathrm{\Cup}`(\alpha \uparrow \alpha) = \alpha . \supset \vdash . \text{Prop}$

***35·91.** $\vdash : R \subseteq \alpha \uparrow \alpha . \equiv . C`R \subset \alpha$

Dem.

$\vdash . *35{\cdot}103 . \supset \vdash :. R \subseteq \alpha \uparrow \alpha . \equiv : xRy . \supset_{x,y} . x, y \epsilon \alpha :$

$\equiv : C`R \subset \alpha :. \supset \vdash . \text{Prop}$ [*33·352]

***35·92.** $\vdash :. (\exists \alpha) . P = \alpha \uparrow \alpha . \supset : R \subseteq P . \equiv . C`R \subset C`P$ [*35·9·91]

***35·93.** $\vdash : (R) . \phi (\mathrm{D}`R) . \equiv . (\alpha) . \phi \alpha$

Dem.

$\vdash . *33{\cdot}12 . *14{\cdot}18 . \supset \vdash : (\alpha) . \phi \alpha . \supset . \phi (\mathrm{D}`R) :$

$\supset \vdash : (\alpha) . \phi \alpha . \supset . (R) . \phi (\mathrm{D}`R)$ [*10·11·21] (1)

$\supset \vdash : (R) . \phi (\mathrm{D}`R) . \supset . \phi \{\mathrm{D}`(\alpha \uparrow \alpha)\} .$ [*10·1 .]

$\supset . \phi \alpha :$ [*35·9]

$\supset \vdash : (R) . \phi (\mathrm{D}`R) . \supset . (\alpha) . \phi \alpha$ [*10·11·21] (2)

$\vdash . (1) . (2) . \quad \supset \vdash . \text{Prop}$

***35·931.** $\vdash : (R) . \phi (\mathrm{\Cup}`R) . \equiv . (\alpha) . \phi \alpha$ [Prueba como en la *35·93]

***35·932.** $\vdash : (R) . \phi (C`R) . \equiv . (\alpha) . \phi \alpha$ [Prueba como en la *35·93]

***35·94.** $\vdash : (\exists R) . \phi(\mathrm{D}`R) . \equiv . (\exists \alpha) . \phi\alpha$ [*35·93 . Transp]

***35·941.** $\vdash : (\exists R) . \phi(\mathrm{I}`R) . \equiv . (\exists \alpha) . \phi\alpha$ [*35·931 . Transp]

***35·942.** $\vdash : (\exists R) . \phi(C`R) . \equiv . (\exists \alpha) . \phi\alpha$ [*35·932 . Transp]

*36. RELACIONES CON CAMPOS LIMITADOS

Sumario del *36.

En este número nos interesamos por el caso especial en el que se impone la misma limitación sobre el dominio y sobre el dominio converso de una relación. En este caso, se logra el mismo resultado imponiendo la limitación sobre el campo. Es conveniente ser capaces de considerar $\alpha \restriction P \restriction \alpha$ como una función descriptiva de α o de P, lo que se nos afirma mediante la notación $P \restriction \alpha$, en donde, como se explicará en la *38, $P \restriction$'α y $\restriction \alpha$'P significan ambas $P \restriction \alpha$. Si P es una relación serial y $\alpha \subset C$'P, "$P \restriction \alpha$" significa "los términos de α dispuestos en el orden determinado por P"; o, dicho brevemente "α en el orden $-P$". $P \restriction \alpha$ se define como sigue:

*36·01. $P \upharpoonright \alpha = \alpha \restriction P \restriction \alpha$ Df

De este modo tenemos

*36·13. $\vdash : x (P \upharpoonright \alpha) y . \equiv . x, y \in \alpha . xPy$

La mayoría de las proposiciones relativas a $P \restriction \alpha$ exigen que P deba tener, por lo menos, algunas de las características de una relación *serial.* Por tanto, las proposiciones relativas a $P \restriction \alpha$ que puedan darse en este número no son, para la mayor parte, las proposiciones más útiles relativas a $P \restriction \alpha$. Las proposiciones más útiles en este número son las siguientes:

*36·25. $\vdash : C$'$P \subset \alpha . \equiv . P \upharpoonright \alpha = P$

*36·29. $\vdash . P \upharpoonright \alpha = P \mathbin{\dot\cap} \alpha \uparrow \alpha$

*36·3. $\vdash . P \upharpoonright \alpha = P \upharpoonright (\alpha \cap C$'$P)$

*36·33. $\vdash . P \upharpoonright C$'$P = P$

---

*36·01. $P \upharpoonright \alpha = \alpha \restriction P \restriction \alpha$ Df

*36·11. $\vdash . P \upharpoonright \alpha = \alpha \restriction P \restriction \alpha$ [(*36·01)]

*36·13. $\vdash : x (P \upharpoonright \alpha) y . \equiv . x, y \in \alpha . xPy$ [*36·11 . *35·102]

Las siguientes proposiciones se obtienen a partir de las respectivas del *35 por medio de la *36·11, la cual, como se utiliza en cada uno de los casos, no es preciso poner su referencia de nuevo.

*36·2. $\vdash . P \upharpoonright \alpha \mathbin{\dot\cap} Q \upharpoonright \beta = (P \mathbin{\dot\cap} Q) \upharpoonright (\alpha \cap \beta)$ [*35·15]

*36·201. $\vdash . P \upharpoonright \alpha \mathbin{\dot\cap} P \upharpoonright \beta = P \upharpoonright (\alpha \cap \beta)$ [*36·2]

*36·202. $\vdash . P \upharpoonright \alpha \mathbin{\dot\cap} Q \upharpoonright \alpha = (P \mathbin{\dot\cap} Q) \upharpoonright \alpha$ [*36·2]

*36·203. $\vdash . P \upharpoonright \alpha \mathbin{\dot\cap} Q = (P \mathbin{\dot\cap} Q) \upharpoonright \alpha$ [*35·18]

*36·21. $\vdash . (P \upharpoonright \alpha) \upharpoonright \beta = P \upharpoonright (\alpha \cap \beta)$ [*35·33·34]

***36·22.** $\vdash .(P \restriction \alpha) \mid (Q \restriction \alpha) \subseteq (P \mid Q) \restriction \alpha$

Dem.

$\vdash .$ *36·13 . *34·1 . $\supset \vdash : x \{(P \restriction \alpha) \mid (Q \restriction \alpha)\} z . \equiv . (\exists y) . x, y, z \in \alpha . xPy . yQz .$

[*10·5] $\supset . (\exists y) . x, z \in \alpha . xPy . yQz$ (1)

$\vdash .(1) .$ *10·35 . *34·1 . $\supset \vdash .$ Prop

***36·23.** $\vdash .(P \cup Q) \restriction \alpha = P \restriction \alpha \cup Q \restriction \alpha$ [*35·422]

***36·24.** $\vdash : \alpha \subset \beta . \supset . P \restriction \alpha \subseteq P \restriction \beta$ [*35·432]

***36·241.** $\vdash : P \subseteq Q . \supset . P \restriction \alpha \subseteq Q \restriction \alpha$ [*35·462]

***36·25.** $\vdash : C'P \subset \alpha . \equiv . P \restriction \alpha = P$

Dem.

$\vdash .$ *36·13 . *4·7 . $\supset \vdash :. P \restriction \alpha = P . \equiv : xPy . \supset_{x,y} . x, y \in \alpha :$

[*33·352] $\equiv : C'P \subset \alpha :. \supset \vdash .$ Prop

***36·26.** $\vdash : C'P \cap \alpha = \Lambda . \supset . P \mid (Q \restriction \alpha) = \dot{\Lambda} . (Q \restriction \alpha) \mid P = \dot{\Lambda}$ [*35·473·474]

***36·27.** $\vdash : P \restriction \Lambda = \dot{\Lambda}$ [*35·75]

***36·28.** $\vdash . P \restriction V = P$ [*35·76]

***36·29.** $\vdash . P \restriction \alpha = P \mathbin{\dot{\cap}} \alpha \uparrow \alpha$ [*35·822]

***36·3.** $\vdash . P \restriction \alpha = P \restriction (\alpha \cap C'P)$

Dem.

$\vdash .$ *33·17 . *4·71 . $\supset \vdash : xPy . \equiv . x, y \in C'P . xPy :$

[Fact] $\supset \vdash : x, y \in \alpha . xPy . \equiv . x, y \in \alpha . x, y \in C'P . xPy .$

[*22·33] $\equiv . x, y \in \alpha \cap C'P . xPy .$

[*36·13] $\equiv . x \{P \restriction (\alpha \cap C'P)\} y$ (1)

$\vdash .(1) .$ *36·13 . $\supset \vdash .$ Prop

***36·31.** $\vdash : \alpha \cap C'P = \Lambda . \supset . P \restriction \alpha = \dot{\Lambda}$ [*36·3·27]

***36·32.** $\vdash : \alpha \cap C'P = \beta \cap C'P . \supset . P \restriction \alpha = P \restriction \beta$ [*36·3]

***36·33.** $\vdash . P \restriction C'P = P$ [*36·25]

***36·34.** $\vdash . \mathrm{Cnv}'P \restriction \alpha = (\breve{P}) \restriction \alpha$ [*35·53]

***36·35.** $\vdash . (P \restriction \alpha)^2 \subseteq (P^2) \restriction \alpha$ [*36·22]

***36·4.** $\vdash :. \alpha \cap D'R = \Lambda . \vee . \alpha \cap \breve{C}'R = \Lambda : \supset . (R \cup S) \restriction \alpha = S \restriction \alpha$

Dem.

$\vdash .$ *35·643 . $\supset \vdash : \alpha \cap D'R = \Lambda . \supset . \alpha \upharpoonright (R \cup S) = \alpha \upharpoonright S .$

[*35·21] $\supset . (R \cup S) \restriction \alpha = S \restriction \alpha$ (1)

Similarmente $\vdash : \alpha \cap \breve{C}'R = \Lambda . \supset . (R \cup S) \restriction \alpha = S \restriction \alpha$ (2)

$\vdash .(1) .(2) . \supset \vdash .$ Prop

*37. FUNCIONES DESCRIPTIVAS PLURALES

Sumario del *37.

En este número introducimos lo que puede considerarse como el plural de $R`y$. "$R`y$" se definió con la significación "el término que tiene la relación R con respecto a y". Ahora, introducimos la notación "$R``\beta$" para significar "los términos que tienen la relación $R$ respecto a los miembros de $\beta$". Así, si $\beta$ es la clase de los grandes hombres, y $R$ es la relación de esposa a esposo, $R``\beta$ significará "las esposas de grandes hombres". Si β es la clase de las fracciones de la forma $1 - 1/2^n$ para valores enteros de n, y R es la relación "menor que", $R``\beta$ será la clase de las fracciones cada una de las cuales es menor que algún miembro de esta clase de fracciones, es decir, $R``\beta$ será la clase de las fracciones propias. Generalmente, $R``\beta$ es la clase de aquellos relacionantes que tienen relacionados que son miembros de β.

Precisamos igualmente una notación para la relación de $R``\beta$ a β. A esta relación la llamaremos R_ϵ. De este modo, R_ϵ es la relación que tiene lugar entre dos clases, α y β, cuando α esté constituida por todos los términos que tienen la relación R con respecto a algún miembro de β.

Un caso especialmente importante surge cuando $R`y$ existe siempre si $y \in \beta$. En este caso, $R``\beta$ es la clase de todos los términos de la forma $R`y$ cuando $y \in \beta$. Simbolizaremos la hipótesis de que $R`y$ existe siempre si $y \in \beta$. Simbolizaremos la hipótesis de que $R`y$ existe siempre si $y \in \beta$ mediante la notación $\mathrm{E}\,!\,!\,R``\beta$, con la significación "las R`s de las $\beta$`s existen".

Las definiciones son las siguientes:

*37·01. $R``\beta = \hat{x}\{(\exists y) . y \in \beta . xRy\}$ Df

*37·02. $R_\epsilon = \hat{\alpha}\hat{\beta}(\alpha = R``\beta)$ Df

*37·03. $\breve{R}_\epsilon = \mathrm{Cnv}`(R_\epsilon)$ Df

Esta definición sirve únicamente para suprimir los paréntesis. Sin ella, "$\breve{R}_\epsilon$" quedaría ambigua entre $(\breve{R})_\epsilon$ y $\mathrm{Cnv}`(\breve{R}_\epsilon)$, que no son iguales. En todos los casos en que se presente un sufijo, adoptaremos el mismo convenio, es decir, siempre debemos poner

$$\breve{\mathrm{R}}_{\mathrm{sufijo}} = \mathrm{Cnv}`(R_{\mathrm{sufijo}})$$

*37·04. $R```\kappa = R_\epsilon``\kappa$ Df

De este modo, $R```\kappa$ está constituido por todas las clases que tienen la relación R_ϵ con respecto a algún miembro de κ. $\mathrm{R}```\kappa$ sólo tiene significación cuando κ es una clase de las clases relacionadas con miembros del dominio converso de R; en este caso, $R```\kappa$ es una clase de clases referentes a miembros del dominio de R.

*37·05. $\mathrm{E}\,!\,!\,R``\beta . =: y \in \beta . \supset_y . \mathrm{E}\,!\,R`y$ Df

Aquí, el símbolo "E ! ! R"β" debe tratarse como un todo, es decir, no debemos considerarlo como haciendo una aserción acerca de R"β. Si R"$\beta = \alpha$ no debemos suponer que estemos capacitados para poner "E ! ! α" lo cual no tendrá sentido, exactamente como "E ! x" es un sinsentido aun cuando $x = R$'y y E ! R'y.

La notación R"α, introducida en este número es sumamente útil, e incorpora una idea muy importante. Su uso es, en cierto modo, diferente según la clase de relación de que se trate. Consideremos primero la clase de relación que lleva a una función descriptiva, digamos D. Si λ es una clase de relaciones, D"λ es la clase de los dominios de estas relaciones. En este caso, D"λ es una clase cuyos miembros son todos de la forma D'R, donde $R \in \lambda$. Nuevamente, representamos por "$\times n$" la relación de m a $m \times n$; entonces, si simbolizamos por "NC" la clase de los números cardinales, $\times n$"NC representará todos los números que resultan de multiplicar un número cardinal por n, es decir, todos los múltiplos de n. Así, por ejemplo, $\times 2$"NC será la clase de los números pares. Si R es una correlación entre dos clases α y β, esto es, una relación tal que, si $y \in \beta$, R'y existe y es un miembro de α, mientras que, por el contrario, si $x \in \alpha$, $\breve{R}$'x existe y es un miembro de β, entonces, $\alpha = \breve{R}$"β, y podemos considerar a R como una transformación aplicada a cada miembro de β dando origen a un miembro de α. Por medio de tales transformaciones es como puede mostrarse que dos clases son *similares*; esto es, que tienen el mismo número (cardinal) de términos.

En el caso de relaciones seriales, la utilidad de la notación R"β es, en cierto modo, diferente. Supongamos, por ejemplo, que R sea la relación de menor a mayor entre los números reales. Entonces, si β es una clase cualquiera de números reales, R"β será el segmento de números reales determinado por β, es decir, la clase de números reales que son menores que el límite, o máximo de β. En una serie, si β es una clase contenida en la serie, y R es la relación generadora de la serie, R"β es el segmento determinado por β. Si β tiene un límite o un máximo, digamos x, R"β será $\vec{R}$'x. Pero si β no tiene un límite ni un máximo, R"β será lo que podemos denominar un segmento "irracional" de la serie. Veremos más adelante que los números reales pueden identificarse con los segmentos de la serie de racionales, es decir, si R es la relación de menor a mayor entre los racionales, los números reales serán todas las clases tales como "R"β", para los diferentes valores de β. Los números reales que corresponden a los racionales serán los que resulten de una β que no tiene límite o máximo; los irracionales serán los que resulten de una β que no tiene límite o máximo.

Este número puede dividirse en varias secciones, de la forma siguiente: 1) Primero, tenemos varias propiedades elementales de los términos definidos al principio del número; esta sección comienza con la *37·29. 2) A continuación, tenemos un conjunto de proposiciones que versan sobre productos relativos, y sobre símbolos tales como P"Q"γ, P"Q"κ, y así sucesivamente. La proposición central aquí es

***37·33.** $\vdash . (P \mid Q)$"$\gamma = P$"Q"γ

Por definición, $Q``\kappa = Q_\epsilon``\kappa$. Así, pues, $P``Q``\kappa = (P|Q_\epsilon)``\kappa$. Esto conexiona a las proposiciones que incorporan símbolos tales como $P``Q``\kappa$ con las proposiciones que se refieren a los productos relativos. Esta segunda sección la constituyen las proposiciones *37·3 a la *37·39. 3) Seguidamente, tenemos un conjunto de proposiciones sobre relaciones con dominios y dominios conversos, limitados unos y otros. Las principales de éstas son

*37·401. $\vdash . \mathrm{D}`(R \restriction \beta) = R``\beta$

*37·412. $\vdash . (R \restriction \alpha)``\beta = R``(\alpha \cap \beta)$

*37·41. $\vdash . \mathrm{D}`(R \restriction \alpha) = \alpha \cap R``\alpha . \breve{\mathrm{C}}`(R \restriction \alpha) = \alpha \cap \breve{R}``\alpha$

Estas proposiciones sobre relaciones con dominios y dominos conversos limitados, juntamente con otras relacionadas con ellas, van desde la *37·4 hasta la *37·52. 4) Después tenemos un número muy importante de proposiciones sobre las consecuencias de la hipótesis $\mathrm{E}!!R``\beta$; es decir, de la hipótesis de que, para cualquier argumento que sea miembro de β, R da origen a una función descriptiva $R`y$. La principal proposición en esta sección es

*37·6. $\vdash : \mathrm{E}!!R``\beta . \supset . R``\beta = \hat{x}\{(\exists y) . y \in \beta . x = R`y\}$

Las proposiciones con la hipótesis $\mathrm{E}!!R``\beta$ se aplican a los casos de $\vec{R}$ y $\overleftarrow{R}$, en las que se verifica la hipótesis. Esta sección se extiende desde la *37·6 hasta la *37·791. 5) Finalmente, tenemos tres proposiciones sobre el producto relativo de $\alpha \uparrow \beta$ con otras relaciones. Estas proposiciones son útiles en la relación aritmética (Parte IV).

Las proposiciones de este número que más se usan en lo que sigue, aparte de las ya mencionadas, son las siguientes (omitiendo aquellas que únicamente incorporan definiciones):

*37·15. $\vdash . R``\alpha \subset \mathrm{D}`R$

*37·16. $\vdash . \breve{R}``\alpha \subset \breve{\mathrm{C}}`R$

*37·2. $\vdash : \alpha \subset \beta . \supset . P``\alpha \subset P``\beta$

*37·22. $\vdash . P``(\alpha \cup \beta) = P``\alpha \cup P``\beta$

*37·25. $\vdash . \mathrm{D}`R = R``\breve{\mathrm{C}}`R . \breve{\mathrm{C}}`R = \breve{R}``\mathrm{D}`R$

*37·26. $\vdash . R``\beta = R``(\beta \cap \breve{\mathrm{C}}`R)$

*37·265. $\vdash . R``\alpha = R``(\alpha \cap \breve{C}`R) . \breve{R}``\alpha = \breve{R}``(\alpha \cap \breve{C}`R)$

*37·29. $\vdash . R``\Lambda = \Lambda . \breve{R}``\Lambda = \Lambda$

*37·32. $\vdash . \mathrm{D}`(P \mid Q) = P``\mathrm{D}`Q . \breve{\mathrm{C}}`(P \mid Q) = \breve{Q}``\breve{\mathrm{C}}`P$

*37·45. $\vdash :. (y) . \mathrm{E}!R`y . \supset : \exists ! R``\beta . \equiv . \exists ! \beta$

*37·46. $\vdash : x \in R``\alpha . \equiv . \exists ! \alpha \cap \overleftarrow{R}`x$

*37·61. $\vdash :: \mathrm{E}!!R``\beta . \supset :. R``\beta \subset \alpha . \equiv : y \in \beta . \supset_y . R`y \in \alpha$

Por ejemplo, sea R la relación de padre a hijo, β la clase de los etonianos, α la clase de los hombres ricos; entonces "$R``\beta \subset \alpha$" significa "todos los padres de

etonianos son ricos" mientras que "$y \in \beta \,.\, \supset_y \,.\, R`y \in \alpha$" significa "si un muchacho es etoniano, su padre debe ser rico". En virtud de la última proposición, estas dos expresiones son equivalentes

$*37{\cdot}62.\quad \vdash : \mathrm{E}\,!\, R`y \,.\, y \in \alpha \,.\, \supset \,.\, R`y \in R``\alpha$

$*37{\cdot}63.\quad \vdash :: \mathrm{E}\,!!\, R``\alpha \,.\, \supset :. x \in R``\alpha \,.\, \supset_x \,.\, \psi x : \equiv : y \in \alpha \,.\, \supset_y \,.\, \psi\,(R`y)$

$*37{\cdot}01.\quad R``\beta = \hat{x}\,\{(\exists y) \,.\, y \in \beta \,.\, xRy\}$ Df

$*37{\cdot}02.\quad R_\epsilon = \hat{\alpha}\hat{\beta}\,(\alpha = R``\beta)$ Df

$*37{\cdot}03.\quad \breve{R}_\epsilon = \mathrm{Cnv}`(R_\epsilon)$ Df

$*37{\cdot}04.\quad R```\kappa = R_\epsilon``\kappa$ Df

$*37{\cdot}05.\quad \mathrm{E}\,!!\, R``\beta \,.=: y \in \beta \,.\, \supset_y \,.\, \mathrm{E}\,!\, R`y$ Df

$*37{\cdot}1.\quad \vdash : x \in R``\beta \,.\equiv.\, (\exists y) \,.\, y \in \beta \,.\, xRy$ [$*20{\cdot}3\,.\,(*37{\cdot}01)$]

$*37{\cdot}101.\quad \vdash : \alpha R_\epsilon \beta \,.\equiv.\, \alpha = R``\beta$ [$*21{\cdot}3\,.\,(*37{\cdot}02)$]

$*37{\cdot}102.\quad \vdash : \alpha\,(\breve{R})_\epsilon\,\beta \,.\equiv.\, \alpha = \breve{R}``\beta$ [$*37{\cdot}101$]

$*37{\cdot}103.\quad \vdash : \alpha \in R```\kappa \,.\equiv.\, (\exists \beta) \,.\, \beta \in \kappa \,.\, \alpha = R``\beta \,.\equiv.\, \alpha \in R_\epsilon``\kappa$
[$*37{\cdot}1{\cdot}101\,.\,(*37{\cdot}04)$]

$*37{\cdot}104.\quad \vdash :. \mathrm{E}\,!!\, R``\beta \,.\equiv: y \in \beta \,.\, \supset_y \,.\, \mathrm{E}\,!\, R`y$ [$*4{\cdot}2\,.\,(*37{\cdot}05)$]

$*37{\cdot}105.\quad \vdash : x \in \breve{R}``\beta \,.\equiv.\, (\exists y) \,.\, y \in \beta \,.\, yRx$ [$*37{\cdot}1\,.\,*31{\cdot}11$]

$*37{\cdot}106.\quad \vdash :. \mathrm{E}\,!\, R`x \,.\, \supset : x \in \breve{R}``\beta \,.\equiv.\, R`x \in \beta$

Dem.

$\vdash \,.\, *37{\cdot}105\,.\,*30{\cdot}4\,.\,\supset \vdash :. \mathrm{Hp}\,.\,\supset : x \in \breve{R}``\beta \,.\equiv.\, (\exists y) \,.\, y \in \beta \,.\, y = R`x \,.$
[$*14{\cdot}205$] $\equiv.\, R`x \in \beta :. \supset \vdash .\,\mathrm{Prop}$

$*37{\cdot}11.\quad \vdash \,.\, R_\epsilon`\beta = R``\beta$ [$*37{\cdot}101\,.\,*30{\cdot}3$]

$*37{\cdot}111.\quad \vdash \,.\, \mathrm{E}\,!\, R_\epsilon`\beta$ [$*37{\cdot}11\,.\,*14{\cdot}21$]

$*37{\cdot}12.\quad \vdash : (\beta) \,.\, R``\beta = Q`\beta \,.\equiv.\, R_\epsilon = Q$ [$*30{\cdot}42\,.\,*37{\cdot}111{\cdot}11$]

$*37{\cdot}13.\quad \vdash : P = Q \,.\, \supset \,.\, P``\beta = Q``\beta$

Dem.

$\vdash \,.\, *21{\cdot}43\,.\,\supset \vdash :. \mathrm{Hp}\,.\,\supset : xPy \,.\equiv_{x,y}.\, xQy :$
[Fact] $\supset : y \in \beta \,.\, xPy \,.\equiv_{x,y}.\, y \in \beta \,.\, xQy :$
[$*10{\cdot}281$] $\supset : (\exists y) \,.\, y \in \beta \,.\, xPy \,.\equiv_x .\, (\exists y) \,.\, y \in \beta \,.\, xQy :$
[$*37{\cdot}1$] $\supset : x \in P``\beta \,.\equiv_x .\, x \in Q``\beta :. \supset \vdash .\,\mathrm{Prop}$

$*37{\cdot}131.\quad \vdash : P = Q \,.\, \supset \,.\, P_\epsilon = Q_\epsilon$

Dem.

$\vdash \,.\, *37{\cdot}13\,.\,\supset \vdash :. \mathrm{Hp}\,.\,\supset : \alpha = P``\beta \,.\equiv_{\alpha,\beta}.\, \alpha = Q``\beta :$
[$*37{\cdot}101$] $\supset : \alpha P_\epsilon \beta \,.\equiv_{\alpha,\beta}.\, \alpha Q_\epsilon \beta :. \supset \vdash .\,\mathrm{Prop}$

***37·14.** $\vdash : P = Q . \equiv . P_{\epsilon} = Q_{\epsilon}$

Dem.

$\vdash . *37·101 . *21·15 . \supset$

$\vdash :. P_{\epsilon} = Q_{\epsilon} . \quad \equiv : \alpha = P``\beta . \equiv_{\alpha,\beta} . \alpha = Q``\beta :$

[*13·183] $\equiv : (\beta) . P``\beta = Q``\beta :$

[*37·1.*20·15] $\equiv : (\beta, x) : (\exists y) . y \in \beta . xPy . \equiv . (\exists y) . y \in \beta . xQy :$

[*10·1] $\supset : (x) : (\exists y) . y \in \hat{z}\,(z = w) . xPy . \equiv . (\exists y) . y \in \hat{z}\,(z = w) . xQy :$

[*20·3] $\supset : (x) : (\exists y) . y = w . xPy . \equiv . (\exists y) . y = w . xQy :$

[*13·195] $\supset : (x) : xPw . \equiv . xQw$ (1)

$\vdash . (1) . *10·11·21 . *11·2 . \supset$

$\vdash :. P_{\epsilon} = Q_{\epsilon} . \quad \supset : (x, w) : xPw . \equiv . xQw :$

[*21·43] $\supset : P = Q$ (2)

$\vdash . (2) . *37·131 . \supset \vdash . \text{Prop}$

***37·15.** $\vdash . R``\alpha \subset \mathrm{D}`R$

Dem.

$\vdash . *37·1 . \supset \vdash : x \in R``\alpha . \supset . (\exists y) . y \in \alpha . xRy .$

[*10·5] $\supset . (\exists y) . xRy .$

[*33·13] $\supset . x \in \mathrm{D}`R : \supset \vdash . \text{Prop}$

***37·16.** $\vdash . \breve{R}``\alpha \subset \mathrm{C}`R \quad [*37·15\ \frac{\breve{R}}{R} . *33·2]$

***37·17.** $\vdash :. R``\beta \subset \alpha . \equiv : y \in \beta . xRy . \supset_{x,y} . x \in \alpha$

Dem.

$\vdash . *37·1 . \supset \vdash :. R``\beta \subset \alpha . \equiv : (\exists y) . y \in \beta . xRy . \supset_x . x \in \alpha :$

[*10·23] $\equiv : y \in \beta . xRy . \supset_{x,y} . x \in \alpha :. \supset \vdash . \text{Prop}$

***37·171.** $\vdash :. \breve{R}``\alpha \subset \beta . \equiv : x \in \alpha . xRy . \supset_{x,y} . y \in \beta$

Dem.

$\vdash . *37·105 . \supset \vdash :. \breve{R}``\alpha \subset \beta . \equiv : (\exists x) . x \in \alpha . xRy . \supset_y . y \in \beta :$

[*10·23] $\equiv : x \in \alpha . xRy . \supset_{x,y} . y \in \beta :. \supset \vdash . \text{Prop}$

***37·18.** $\vdash : y \in \beta . \supset . \vec{R}`y \subset R``\beta$

Dem.

$\vdash . *32·18 . \supset \vdash :. \text{Hp} . \supset : x \in \vec{R}`y . \supset . xRy . y \in \beta .$

[*37·1] $\supset . x \in R``\beta :. \supset \vdash . \text{Prop}$

***37·181.** $\vdash : x \in \alpha . \supset . \overleftarrow{R}`x \subset \breve{R}``\alpha$ [La prueba como en la *37·18]

***37·2.** $\vdash : \alpha \subset \beta . \supset . P``\alpha \subset P``\beta$

Dem.

$\vdash . *22·1 . \supset \vdash :. \text{Hp} . \supset : y \in \alpha . \supset_y . y \in \beta :$

[*10·31] $\supset : y \in \alpha . xPy . \supset_y . y \in \beta . xPy :$

[*10·28] $\supset : (\exists y) . y \in \alpha . xPy . \supset . (\exists y) . y \in \beta . xPy :$

[*37·1] $\supset : x \in P``\alpha . \supset . x \in P``\beta :. \supset \vdash . \text{Prop}$

La última proposición (*37·2) es una de las formas de inferencia asilogística debido a Jungius, profesor de Leibniz. El ejemplo dado por Jungius es: "Circulus est figura; ergo qui circulum describit, is figuram describit (68)". Aquí la clase de los círculos es nuestra α, la clase de figuras es nuestra β, y la relación de descripciones es nuestra P.

***37·201.** $\vdash : P \in Q \,.\, \supset \,.\, P``\alpha \subset Q``\alpha$ [Prueba similar]

***37·202.** $\vdash : \alpha \subset \beta \,.\, P \in Q \,.\, \supset \,.\, P``\alpha \subset Q``\beta$ [*37·2·201]

***37·21.** $\vdash . P``(\alpha \cap \beta) \subset P``\alpha \cap P``\beta$

Dem.

$\vdash . *37·1 . \supset \vdash :. x \in P``(\alpha \cap \beta) . \equiv : (\exists y) . y \in \alpha \cap \beta . xPy :$

[*22·33] $\equiv : (\exists y) . y \in \alpha . y \in \beta . xPy :$

[*10·5] $\supset : (\exists y) . y \in \alpha . xPy : (\exists y) . y \in \beta . xPy :$

[*37·1] $\supset : x \in P``\alpha . x \in P``\beta :$

[*22·33] $\supset : x \in P``\alpha \cap P``\beta :. \supset \vdash .$ Prop

***37·211.** $\vdash . (P \mathbin{\hat{\cap}} Q)``\alpha \subset P``\alpha \cap Q``\alpha$ [Prueba similar]

***37·212.** $\vdash . (P \mathbin{\hat{\cap}} Q)``(\alpha \cap \beta) \subset P``\alpha \cap P``\beta \cap Q``\alpha \cap Q``\beta$ [*37·21·211]

***37·22.** $\vdash . P``(\alpha \cup \beta) = P``\alpha \cup P``\beta$

Esta proposición se usa muy frecuentemente. El hecho de que aquí tengamos una identidad, mientras en la *37·21 sólo tenemos una inclusión, se debe al hecho de que la *10·42 establece una equivalencia, mientras que la *10·5 establece una implicación.

Dem.

$\vdash . *37·1 . \supset \vdash :. x \in P``(\alpha \cup \beta) . \equiv : (\exists y) . y \in \alpha \cup \beta . xPy :$

[*22·34] $\equiv : (\exists y) : y \in \alpha . \vee . y \in \beta : xPy :$

[*4·4] $\equiv : (\exists y) : y \in \alpha . xPy . \vee . y \in \beta . xPy :$

[*10·42] $\equiv : (\exists y) . y \in \alpha . xPy : \vee : (\exists y) . y \in \beta . xPy :$

[*37·1] $\equiv : x \in P``\alpha . \vee . x \in P``\beta :$

[*22·34] $\equiv : x \in P``\alpha \cup P``\beta :. \supset \vdash .$ Prop

***37·221.** $\vdash . (P \cup Q)``\alpha = P``\alpha \cup Q``\alpha$ [Prueba similar]

***37·222.** $\vdash . (P \cup Q)``(\alpha \cup \beta) = P``\alpha \cup P``\beta \cup Q``\alpha \cup Q``\beta$ [*37·22·221]

***37·23.** $\vdash . \mathrm{D}`R_\epsilon = \hat{\alpha}\,\{(\exists \beta) . \alpha = R``\beta\}$ [*37·101 . *33·11]

***37·231.** $\vdash . \mathrm{C}`R_\epsilon = \mathrm{Cls}$

El tipo de "Cls" aquí es el tipo cuyos miembros son del mismo tipo que $\mathrm{C}`R$. En la prueba, se hace uso del convenio de que una letra griega siempre significa una expresión de la forma $\hat{z}\,(\phi\,!\,z)$.

Dem.

$\vdash . *37·101 . \quad \supset \vdash : \alpha R_\epsilon \hat{z}\,(\phi\,!\,z) . \equiv . \alpha = R``\hat{z}\,(\phi\,!\,z) :$

[*10·11·281] $\supset \vdash : (\exists \alpha) . \alpha R_\epsilon \hat{z}\,(\phi\,!\,z) . \equiv . (\exists \alpha) . \alpha = R``\hat{z}\,(\phi\,!\,z) :$

---

(68) Citamos de Couturat, La Logique de Leibniz, Cap. III, § 15 (p. 75 n.).

$[*33{\cdot}131]$ $\quad \supset \vdash : \hat{z}(\phi ! z) \in \mathrm{C}`R_{\epsilon} . \equiv . (\exists \alpha) . \alpha = R``\hat{z}(\phi ! z)$ (1)

$\vdash . *20{\cdot}2 . (*37{\cdot}01) . \supset \vdash : \hat{x}\{(\exists y) . y \in \hat{z}(\phi ! z) . xRy\} = R``\hat{z}(\phi ! z) :$

$[*10{\cdot}11{\cdot}24]$ $\quad \supset \vdash : (\phi) : (\exists \alpha) . \alpha = R``\hat{z}(\phi ! z)$ (2)

$\vdash . (1) . (2) . *2{\cdot}02 . \supset \vdash : \hat{z}(\phi ! z) \in \mathrm{Cls} . \supset . \hat{z}(\phi ! z) \in \mathrm{C}`R_{\epsilon}$ (3)

$\vdash . *20{\cdot}41 . *2{\cdot}02 . \supset \vdash : \hat{z}(\phi ! z) \in \mathrm{C}`R_{\epsilon} . \supset . \hat{z}(\phi ! z) \in \mathrm{Cls}$ (4)

$\vdash . (3) . (4) . \quad \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

Tal como aparece en esta última prueba, es necesario, cuando debe ser probada una proposición que contiene "Cls", abandonar la notación con letras griegas y volver a la notación funcional explícita.

***37·24.** $\vdash : \alpha \in \mathrm{D}`R_{\epsilon} . \supset . \alpha \subset \mathrm{D}`R$

Dem.

$\vdash . *33{\cdot}13 . *37{\cdot}101 . \supset \vdash :: \alpha \in \mathrm{D}`R_{\epsilon} . \equiv :. (\exists \beta) . \alpha = R``\beta :.$

$[*20{\cdot}33.*37{\cdot}1] \quad \equiv :. (\exists \beta) : x \in \alpha . \equiv_x . (\exists y) . y \in \beta . xRy :.$

$[*11{\cdot}61] \quad \supset :. x \in \alpha . \supset_x : (\exists \beta, y) . y \in \beta . xRy :$

$[*11{\cdot}23] \quad \supset_x : (\exists y, \beta) . y \in \beta . xRy :$

$[*11{\cdot}55] \quad \supset_x : (\exists y) : xRy : (\exists \beta) . y \in \beta :$

$[*10{\cdot}5] \quad \supset_x : (\exists y) . xRy :$

$[*33{\cdot}13] \quad \supset_x : x \in \mathrm{D}`R :: \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***37·25.** $\vdash . \mathrm{D}`R = R``\mathrm{C}`R . \mathrm{C}`R = \breve{R}``\mathrm{D}`R$

Dem.

$\vdash . *33{\cdot}13 . \quad \supset \vdash : x \in \mathrm{D}`R . \equiv . (\exists y) . xRy .$

$[*33{\cdot}14.*4{\cdot}71] \quad \equiv . (\exists y) . y \in \mathrm{C}`R . xRy .$

$[*37{\cdot}1] \quad \equiv . x \in R``\mathrm{C}`R$ (1)

$\vdash . *33{\cdot}131 . \supset \vdash : y \in \mathrm{C}`R . \equiv . (\exists x) . xRy .$

$[*33{\cdot}14.*4{\cdot}71] \quad \equiv . (\exists x) . x \in \mathrm{D}`R . xRy .$

$[*37{\cdot}105] \quad \equiv . y \in \breve{R}``\mathrm{D}`R$ (2)

$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***37·26.** $\vdash . R``\beta = R``(\beta \cap \mathrm{C}`R)$

Dem.

$\vdash . *37{\cdot}1 . \supset \vdash :. x \in R``\beta . \equiv : (\exists y) . y \in \beta . xRy :$

$[*33{\cdot}14.*4{\cdot}71] \quad \equiv : (\exists y) . y \in \beta . y \in \mathrm{C}`R . xRy :$

$[*22{\cdot}33] \quad \equiv : (\exists y) . y \in \beta \cap \mathrm{C}`R . xRy :$

$[*37{\cdot}1] \quad \equiv : x \in R``(\beta \cap \mathrm{C}`R) :. \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***37·261.** $\vdash . \breve{R}``\beta = \breve{R}``(\beta \cap \mathrm{D}`R)$ $\quad [*37{\cdot}26 . *33{\cdot}21]$

***37·262.** $\vdash : \alpha \cap \mathrm{C}`R = \beta \cap \mathrm{C}`R . \supset . R``\alpha = R``\beta$ $\quad [*37{\cdot}26]$

***37·263.** $\vdash : \alpha \cap \mathrm{D}`R = \beta \cap \mathrm{D}`R . \supset . \breve{R}``\alpha = \breve{R}``\beta$ $\quad [*37{\cdot}261]$

***37·264.** $\vdash : \exists ! \alpha \cap R``\beta . \equiv . (\exists x, y) . x \in \alpha . y \in \beta . xRy . \equiv . \exists ! \beta \cap \breve{R}``\alpha$

Dem.

$\vdash . *22{\cdot}33 . *37{\cdot}1 . \supset \vdash :. \exists ! \alpha \cap R``\beta . \equiv : (\exists x) : x \in \alpha : (\exists y) . y \in \beta . xRy :$ (1)

$[*11{\cdot}55] \qquad \equiv : (\exists x, y) . x \in \alpha . y \in \beta . xRy \qquad (2)$

$\vdash . (1) . *11{\cdot}6 . \supset \vdash :. \exists ! \alpha \cap R``\beta . \equiv : (\exists y) : y \in \beta : (\exists x) . x \in \alpha . xRy :$

$[*37{\cdot}105] \qquad \equiv : (\exists y) . y \in \beta . y \in \breve{R}``\alpha :$

$[*22{\cdot}33] \qquad \equiv : \exists ! \beta \cap \breve{R}``\alpha \qquad (3)$

$\vdash . (2) . (3) . \supset \vdash . \text{Prop}$

***37·265.** $\vdash . R``\alpha = R``(\alpha \cap C`R) . \breve{R}``\alpha = \breve{R}``(\alpha \cap C`R)$

Dem.

$\vdash . *33{\cdot}161 . *22{\cdot}621 . \supset \vdash . \mathrm{C}`R = C`R \cap \mathrm{C}`R .$

$[*22{\cdot}481] \qquad \supset \vdash . \alpha \cap \mathrm{C}`R = \alpha \cap C`R \cap \mathrm{C}`R .$

$[*37{\cdot}262] \qquad \supset \vdash . R``\alpha = R``(\alpha \cap C`R) \qquad (1)$

$\vdash . (1) . *33{\cdot}22 . \qquad \supset \vdash . \text{Prop}$

***37·27.** $\vdash : \mathrm{C}`R \subset \beta . \supset . \mathrm{D}`R = R``\beta \quad [*22{\cdot}621 . *37{\cdot}25{\cdot}26]$

***37·271.** $\vdash : \mathrm{D}`R \subset \alpha . \supset . \mathrm{C}`\breve{R} = \breve{R}``\alpha \quad [*22{\cdot}621 . *37{\cdot}25{\cdot}261]$

***37·28.** $\vdash . R``\mathrm{V} = \mathrm{D}`R . \breve{R}``\mathrm{V} = \mathrm{C}`R \quad [*37{\cdot}27{\cdot}271 . *24{\cdot}11]$

***37·29.** $\vdash . R``\Lambda = \Lambda . \breve{R}``\Lambda = \Lambda$

Dem.

$\vdash . *10{\cdot}5 . \supset \vdash : (\exists y) . y \in \Lambda . xRy . \supset . (\exists y) . y \in \Lambda \qquad (1)$

$\vdash . (1) . \text{Transp} . *24{\cdot}53 . \supset \vdash . \sim(\exists y) . y \in \Lambda . xRy .$

$[*37{\cdot}1] \qquad \supset \vdash . \sim \exists ! R``\Lambda .$

$[*24{\cdot}51] \qquad \supset \vdash . R``\Lambda = \Lambda \qquad (2)$

$\vdash . (2) \frac{\breve{R}}{R} . \qquad \supset \vdash . \breve{R}``\Lambda = \Lambda \qquad (3)$

$\vdash . (2) . (3) . \supset \vdash . \text{Prop}$

***37·3.** $\vdash . \{\mathrm{sg}`(P \mid Q)\}`z = P``\overrightarrow{Q}`z$

Dem.

$\vdash . *32{\cdot}23{\cdot}13 . \supset$

$\vdash . \{\mathrm{sg}`(P \mid Q)\}`z = \hat{x}\{x (P \mid Q) z\}$

$[*34{\cdot}1] \qquad = \hat{x}\{(\exists y) . xPy . yQz\}$

$[*32{\cdot}18] \qquad = \hat{x}\{(\exists y) . xPy . y \in \overrightarrow{Q}`z\}$

$[(*37{\cdot}01)] \qquad = P``\overrightarrow{Q}`z . \supset \vdash . \text{Prop}$

***37·301.** $\vdash . \{\mathrm{gs}`(P \mid Q)\}`x = \breve{Q}``\overleftarrow{P}`x$ [Prueba similar]

***37·302.** $\vdash : R = P \mid Q . \supset . \overrightarrow{R}`z = P``\overrightarrow{Q}`z . \overleftarrow{R}`x = \breve{Q}``\overleftarrow{P}`x$

$[*37{\cdot}3{\cdot}301 . *32{\cdot}23{\cdot}231{\cdot}16]$

***37·31.** $\vdash . \mathrm{sg}`(P \mid Q) = P_{\epsilon} \mid \overrightarrow{Q}$

Dem.

$\vdash . *37{\cdot}11{\cdot}3 . \qquad \supset \vdash . (z) . \{\mathrm{sg}`(P \mid Q)\}`z = P_{\epsilon}`\overrightarrow{Q}`z \qquad (1)$

$\vdash . (1) . *34{\cdot}42 . \supset \vdash . \text{Prop}$

***37·311.** $\vdash . \mathrm{gs}`(P \mid Q) = (\breve{Q})_{\epsilon} \mid \overleftarrow{P}$ [Prueba similar]

***37·32.** $\vdash . \mathrm{D}`(P \mid Q) = P``\mathrm{D}`Q \,.\, \mathrm{C}`(P \mid Q) = \breve{Q}``\mathrm{C}`P$

Dem.

$$\begin{aligned}
&\vdash . *33\cdot13 \,.\, *34\cdot1 \,.\, \supset \\
&\vdash :. x \in \mathrm{D}`(P \mid Q) \,.\, \equiv : (\exists z) : (\exists y) \,.\, xPy \,.\, yQz : \\
&[*11\cdot23] \qquad \equiv : (\exists y) : (\exists z) \,.\, xPy \,.\, yQz : \\
&[*11\cdot55] \qquad \equiv : (\exists y) : xPy : (\exists z) \,.\, yQz : \\
&[*33\cdot13] \qquad \equiv : (\exists y) \,.\, xPy \,.\, y \in \mathrm{D}`Q : \\
&[*37\cdot1] \qquad \equiv : x \in P``\mathrm{D}`Q \qquad (1) \\
&\vdash . (1) \,.\, *10\cdot11 \,.\, *20\cdot43 \,.\, \supset \\
&\qquad \vdash . \mathrm{D}`(P \mid Q) = P``\mathrm{D}`Q \qquad (2) \\
&\vdash . *33\cdot2 \,. \quad \supset \vdash . \mathrm{C}`(P \mid Q) = \mathrm{D}`\mathrm{Cnv}`(P \mid Q) \\
&[*34\cdot2] \qquad = \mathrm{D}`(\breve{Q} \mid \breve{P}) \\
&[(2)] \qquad = \breve{Q}``\mathrm{D}`\breve{P} \\
&[*33\cdot2] \qquad = \breve{Q}``\mathrm{C}`P \qquad (3) \\
&\vdash . (2) \,.\, (3) \,.\, \supset \vdash . \mathrm{Prop}
\end{aligned}$$

***37·321.** $\vdash : \mathrm{C}`P \subset \mathrm{D}`Q \,.\, \supset \,.\, \mathrm{D}`(P \mid Q) = \mathrm{D}`P$ [*37·32·27]

***37·322.** $\vdash : \mathrm{D}`Q \subset \mathrm{C}`P \,.\, \supset \,.\, \mathrm{C}`(P \mid Q) = \mathrm{C}`Q$ [*37·32·271]

***37·323.** $\vdash : \mathrm{C}`P = \mathrm{D}`Q \,.\, \supset \,.\, \mathrm{D}`(P \mid Q) = \mathrm{D}`P \,.\, \mathrm{C}`(P \mid Q) = \mathrm{C}`Q$ [*37·321·322]

***37·33.** $\vdash . (P \mid Q)``\gamma = P``Q``\gamma$

Dem.

$$\begin{aligned}
&\cdot \vdash . *37\cdot1 \,.\, \supset \vdash :. x \in (P \mid Q)``\gamma \,.\, \equiv : (\exists z) \,.\, z \in \gamma \,.\, x(P \mid Q)z : \\
&[*34\cdot1.*11\cdot55] \qquad \equiv : (\exists z, y) \,.\, z \in \gamma \,.\, xPy \,.\, yQz : \\
&[*11\cdot23] \qquad \equiv : (\exists y, z) \,.\, xPy \,.\, yQz \,.\, z \in \gamma : \\
&[*11\cdot55] \qquad \equiv : (\exists y) : xPy : (\exists z) \,.\, yQz \,.\, z \in \gamma : \\
&[*37\cdot1] \qquad \equiv : (\exists y) \,.\, xPy \,.\, y \in Q``\gamma : \\
&[*37\cdot1] \qquad \equiv : x \in P``Q``\gamma :. \supset \vdash . \mathrm{Prop}
\end{aligned}$$

***37·34.** $\vdash . (P \mid Q)_\epsilon = P_\epsilon \mid Q_\epsilon$

Dem.

$$\begin{aligned}
&\vdash . *37\cdot11 \,.\, \supset \vdash . (P \mid Q)_\epsilon`\gamma = (P \mid Q)``\gamma \\
&[*37\cdot33] \qquad = P``Q``\gamma \\
&[*37\cdot11] \qquad = P_\epsilon`Q_\epsilon`\gamma \qquad (1) \\
&\vdash . (1) \,.\, *10\cdot11 \,.\, *34\cdot42 \,.\, \supset \vdash . \mathrm{Prop}
\end{aligned}$$

***37·341.** $\vdash . \{\mathrm{Cnv}`(P \mid Q)\}_\epsilon = (\breve{Q})_\epsilon \mid (\breve{P})_\epsilon$ [*34·2 . *37·34]

***37·35.** $\vdash : (z) \,.\, R`z = P`Q`z \,.\, \supset \,.\, (\gamma) \,.\, R``\gamma = P``Q``\gamma$

Dem.

$$\begin{aligned}
&\vdash . *34\cdot42 \,.\, \supset \vdash : \mathrm{Hp} \,.\, \supset \,.\, R = P \mid Q \,. \\
&[*37\cdot13] \qquad \supset \,.\, R``\gamma = (P \mid Q)``\gamma \\
&[*37\cdot33] \qquad = P``Q``\gamma : \supset \vdash . \mathrm{Prop}
\end{aligned}$$

***37·351.** $\vdash : (\alpha) \,.\, R`\alpha = P`Q``\alpha \,.\, \supset \,.\, (\kappa) \,.\, R``\kappa = P``Q```\kappa$

$$\left[*37\cdot35\,\frac{Q_\epsilon}{Q} \,.\, *37\cdot11 \,.\, (*37\cdot04)\right]$$

*37·352. $\vdash : (\alpha) . R``\alpha = P`Q``\alpha . \supset . (\kappa) . R```\kappa = P``Q```\kappa$

$\left[*37·351 \frac{R_\epsilon}{R} . *37·11 . (*37·04)\right]$

*37·353. $\vdash : (z) . R`S`z = P`Q`z . \supset . (\gamma) . R``S``\gamma = P``Q``\gamma$

Dem.

$\vdash . *14·21 . \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \supset . (z) . \mathrm{E}\,!\, R`S`z .$

[*34·41] $\supset . (z) . R`S`z = (R \mid S)`z .$

[*14·131·144] $\supset . (z) . (R \mid S)`z = P`Q`z .$

[*37·35] $\supset . (\gamma) . (R \mid S)``\gamma = P``Q``\gamma .$

[*37·33] $\supset . (\gamma) . R``S``\gamma = P``Q``\gamma : \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

*37·354. $\vdash : (\alpha) . R`S`\alpha = P`Q``\alpha . \supset . (\kappa) . R``S``\kappa = P``Q```\kappa$ $\left[*37·353 \frac{Q_\epsilon}{Q}\right]$

*37·355. $\vdash : (z) . R`S`z = P``Q`z . \supset . (\gamma) . R``S``\gamma = P```Q``\gamma$ $\left[*37·353 \frac{P_\epsilon}{P}\right]$

*37·36. $\vdash . \mathrm{D}`R^2 = R``\mathrm{D}`R . \mathrm{C}`R^2 = \breve{R}``\mathrm{C}`R$ [*37·32]

*37·37. $\vdash . (R^2)_\epsilon = (R_\epsilon)^2$ [*37·34]

*37·371. $R_\epsilon^2 = (R_\epsilon)^2$ Df

Esta definición sirve únicamente para la supresión de paréntesis. Como en la *37·03, esta definición se extenderá a todos los sufijos.

*37·38. $\vdash . \overrightarrow{R^2}`x = R``\overrightarrow{R}`x$ [*37·3]

*37·39. $\vdash . R^{2}``\alpha = R``R``\alpha$ [*37·33]

*37·4. $\vdash . \mathrm{C}`(\alpha \restriction R) = \breve{R}``\alpha$

Dem.

$\vdash . *33·131 . *35·1 . \supset \vdash : y \in \mathrm{C}`(\alpha \restriction R) . \equiv . (\exists x) . x \in \alpha . xRy .$

[*37·105] $\equiv . y \in \breve{R}``\alpha : \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

*37·401. $\vdash . \mathrm{D}`(R \upharpoonright \beta) = R``\beta$ [Prueba similar]

*37·402. $\vdash . \mathrm{D}`(\alpha \restriction R \upharpoonright \beta) = \alpha \cap R``\beta . \mathrm{C}`(\alpha \restriction R \upharpoonright \beta) = \beta \cap \breve{R}``\alpha$

Dem.

$\vdash . *33·13 . *35·102 . \supset$

$\vdash :. x \in \mathrm{D}`(\alpha \restriction R \upharpoonright \beta) . \equiv : (\exists y) . x \in \alpha . xRy . y \in \beta :$

[*10·35] $\equiv : x \in \alpha : (\exists y) . xRy . y \in \beta :$

[*37·1] $\equiv : x \in \alpha . x \in R``\beta :$

[*22·33] $\equiv : x \in \alpha \cap R``\beta$ (1)

Similarmente

$\vdash : y \in \mathrm{C}`(\alpha \restriction R \upharpoonright \beta) . \equiv . y \in \beta \cap \breve{R}``\alpha$ (2)

$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

*37·41. $\vdash . \mathrm{D}`(R \downharpoonright \alpha) = \alpha \cap R``\alpha . \mathrm{C}`(R \downharpoonright \alpha) = \alpha \cap \breve{R}``\alpha$ [*37·402 . *36·11]

*37·411. $\vdash . (\alpha \restriction R)``\beta = \mathrm{D}`(\alpha \restriction R \upharpoonright \beta) = \alpha \cap R``\beta$

Dem.

$\vdash . *37·401 . \supset \vdash . (\alpha \restriction R)``\beta = \mathrm{D}`(\alpha \restriction R) \upharpoonright \beta$

$$[*35{\cdot}21] \qquad = \mathrm{D}`(\alpha \restriction R \upharpoonright \beta) \qquad (1)$$

$$\vdash .(1) .*37{\cdot}402 . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$$

***37·412.** $\vdash .(R \upharpoonright \alpha)``\beta = R``(\alpha \cap \beta)$

Dem.

$$\vdash .*37{\cdot}401 . \supset \vdash .(R \upharpoonright \alpha)``\beta = \mathrm{D}`(R \upharpoonright \alpha) \upharpoonright \beta$$
$$[*35{\cdot}31] \qquad = \mathrm{D}`R \upharpoonright (\alpha \cap \beta)$$
$$[*37{\cdot}401] \qquad = R``(\alpha \cap \beta) . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$$

***37·413.** $\vdash .(R \downharpoonright \alpha)``\beta = \alpha \cap R``(\alpha \cap \beta)$

Dem.

$$\vdash .*37{\cdot}411 .*35{\cdot}21 . \supset \vdash .(R \downharpoonright \alpha)``\beta = \alpha \cap (R \upharpoonright \alpha)``\beta$$
$$[*37{\cdot}412] \qquad = \alpha \cap R``(\alpha \cap \beta) . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$$

***37·42.** $\vdash : R``\beta \subset \alpha . \supset . (\alpha \restriction R)``\beta = R``\beta \quad [*37{\cdot}411 .*22{\cdot}621]$

***37·421.** $\vdash : \beta \subset \alpha . \supset . (R \upharpoonright \alpha)``\beta = R``\beta \quad [*37{\cdot}412 .*22{\cdot}621]$

***37·43.** $\vdash :. \beta \subset \mathrm{C}`R . \supset : \exists ! R``\beta . \equiv . \exists ! \beta$

Dem.

$$\vdash .*37{\cdot}401 .*35{\cdot}65 . \supset \vdash :. \mathrm{Hp} . \supset : R``\beta = \mathrm{D}`(R \upharpoonright \beta) . \beta = \mathrm{C}`(R \upharpoonright \beta) \qquad (1)$$
$$\vdash .(1) .*33{\cdot}24 . \qquad \supset \vdash . \mathrm{Prop}$$

***37·431.** $\vdash :. \alpha \subset \mathrm{D}`R . \supset : \exists ! \breve{R}``\alpha . \equiv . \exists ! \alpha$ [Prueba como en la *37·43]

***37·44.** $\vdash :. \mathrm{C}`R = \mathrm{V} . \supset : \exists ! R``\beta . \equiv . \exists ! \beta$ [*37·43 . *24·11]

***37·441.** $\vdash :. \mathrm{D}`R = \mathrm{V} . \supset : \exists ! \breve{R}``\alpha . \equiv . \exists ! \alpha$ [Prueba como en la *37·44]

***37·45.** $\vdash :. (y) . \mathrm{E} ! R`y . \supset : \exists ! R``\beta . \equiv . \exists ! \beta$ [*33·431 . *37·43]

***37·451.** $\vdash :. (x) . \mathrm{E} ! \breve{R}`x . \supset : \exists ! \breve{R}``\alpha . \equiv . \exists ! \alpha$ [Prueba como en la *37·45]

***37·46.** $\vdash : x \in R``\alpha . \equiv . \exists ! \alpha \cap \overleftarrow{R}`x$ [*37·1 . *32·181]

***37·461.** $\vdash : x \sim\in \overleftarrow{R}``\alpha . \equiv . \alpha \cap \overleftarrow{R}`x = \Lambda . \equiv . \overleftarrow{R}`x \subset -\alpha$ [*37·46 . *24·311]

***37·462.** $\vdash : x \sim\in \overrightarrow{R}``\alpha . \equiv . \alpha \cap \overrightarrow{R}`x = \Lambda . \equiv . \overrightarrow{R}`x \subset -\alpha$ [*37·461 . *32·241]

***37·47.** $\vdash : \exists ! \alpha . \equiv . \exists ! R```\alpha . \equiv . \exists ! \breve{R}```\alpha$

Dem.

$$\vdash .*37{\cdot}45{\cdot}111 . \supset \vdash : \exists ! \alpha . \equiv . \exists ! R_{\epsilon}``\alpha .$$
$$[(*37{\cdot}04)] \qquad \equiv . \exists ! R```\alpha \qquad (1)$$
$$\vdash .(1) \frac{\breve{R}}{R} . \qquad \supset \vdash : \exists ! \alpha . \equiv . \exists ! \breve{R}```\alpha \qquad (2)$$
$$\vdash .(1) .(2) . \qquad \supset \vdash . \mathrm{Prop}$$

***37·5.** $\vdash : (\beta) . P``\beta = Q`\beta . \supset . (\kappa) . P```\kappa = Q``\kappa$

Dem.

$$\vdash .*37{\cdot}12 . \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \supset . P_{\epsilon} = Q .$$
$$[*37{\cdot}13] \qquad \supset . P_{\epsilon}``\kappa = Q``\kappa .$$
$$[(*37{\cdot}04)] \qquad \supset . P```\kappa = Q``\kappa : \supset \vdash . \mathrm{Prop}$$

***37·501.** $\vdash . \beta \cap \mathrm{C}`R \subset \breve{R}``R``\beta$

Dem.

$\vdash .*37{\cdot}1 .*10{\cdot}24 . \supset \vdash : y \in \beta . xRy . \supset . x \in R``\beta :$

[Exp.*10·11·21] $\supset \vdash :. y \in \beta . \supset : xRy . \supset_x . x \in R``\beta :$

[*4·7] $\supset : xRy . \supset_x . xRy . x \in R``\beta :$

[*10·28] $\supset : (\exists x) . xRy . \supset . (\exists x) . xRy . x \in R``\beta :$

[*33·131.*37·105] $\supset : y \in \mathrm{D}`R . \supset . y \in \breve{R}``R``\beta$ (1)

$\vdash .(1) . \mathrm{Imp} .*22{\cdot}33 . \supset$

$\vdash : y \in \beta \cap \mathrm{D}`R . \supset . y \in \breve{R}``R``\beta : \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***37·502.** $\vdash . \alpha \cap \mathrm{D}`R \subset R``\breve{R}``\alpha$ [Prueba similar]

***37·51.** $\vdash : \beta \subset \mathrm{D}`R . \equiv . \beta \subset \breve{R}``R``\beta$

Dem.

$\vdash .*37{\cdot}501 .*22{\cdot}621 . \supset \vdash : \beta \subset \mathrm{D}`R . \supset . \beta \subset \breve{R}``R``\beta$ (1)

$\vdash .*37{\cdot}16 . \supset \vdash : \beta \subset \breve{R}``R``\beta . \supset . \beta \subset \mathrm{D}`R$ (2)

$\vdash .(1).(2). \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***37·52.** $\vdash : \alpha \subset \mathrm{D}`R . \equiv . \alpha \subset R``\breve{R}``\alpha$ [Prueba similar]

A las proposiciones que siguen, hasta la *37·7 exclusive, les conciernen las propiedades especiales de $R``\beta$ que resulta de la hipótesis $\mathrm{E}!!R``\beta$, definida en la *37·05. La hipótesis $\mathrm{E}!!R``\beta$ es importante, porque tiene muchas consecuencias y en muchos casos se adapta a lo que deseamos tratar.

***37·6.** $\vdash : \mathrm{E}!! R``\beta . \supset . R``\beta = \hat{x}\{(\exists y) . y \in \beta . x = R`y\}$

Esta proposición es muy importante, y se usa constantemente.

Dem.

$\vdash .*37{\cdot}104 . \supset \vdash :: \mathrm{Hp} . \supset :. y \in \beta . \supset_y : \mathrm{E}! R`y :$

[*30·4] $\supset_y : x = R`y . \equiv . xRy :.$

[*5·32] $\supset :. y \in \beta . x = R`y . \equiv_y . y \in \beta . xRy :.$

[*10·281] $\supset :. (\exists y) . y \in \beta . x = R`y . \equiv . (\exists y) . y \in \beta . xRy .$

[*37·1] $\equiv . x \in R``\beta$ (1)

$\vdash .(1) .*10{\cdot}11{\cdot}21 .*20{\cdot}33 . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***37·601.** $\vdash : (x) . \mathrm{E}! R`x . \supset . R``\mathrm{V} = \hat{x}\{(\exists y) . x = R`y\}$

Dem.

$\vdash .*2{\cdot}02 .*10{\cdot}11{\cdot}27 . \supset \vdash :. \mathrm{Hp} . \supset : x \in \mathrm{V} . \supset_x . \mathrm{E}! R`x :$

[*37·104] $\supset : \mathrm{E}!! R``\mathrm{V} :$

[*37·6] $\supset : R``\mathrm{V} = \hat{x}\{(\exists y) . y \in \mathrm{V} . x = R`y\}$ (1)

$\vdash .*24{\cdot}104 .*4{\cdot}73 . \supset \vdash : y \in \mathrm{V} . x = R`y . \equiv . x = R`y :$

[*10·11·281] $\supset \vdash : (\exists y) . y \in \mathrm{V} . x = R`y . \equiv . (\exists y) . x = R`y :$

[*20·15] $\supset \vdash : \hat{x}\{(\exists y) . y \in \mathrm{V} . x = R`y\} = \hat{x}\{(\exists y) . x = R`y\}$ (2)

$\vdash .(1).(2). \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***37·61.** $\vdash :: \mathrm{E}!! R``\beta . \supset :. R``\beta \subset \alpha . \equiv : y \in \beta . \supset_y . R`y \in \alpha$

Dem.

$\vdash . *37{\cdot}17 . \quad \supset \vdash :: R``\beta \subset \alpha . \equiv :. y \in \beta . xRy . \supset_{x,y} . x \in \alpha :.$

$[*11{\cdot}2{\cdot}62] \qquad \equiv :. y \in \beta . \supset_y : xRy . \supset_x . x \in \alpha \qquad (1)$

$\vdash . *37{\cdot}104 . \supset \vdash ::. \mathrm{Hp} . \supset :: y \in \beta . \supset_y :. \mathrm{E}\,!\, R`y :.$

$[*30{\cdot}33] \qquad \supset_y :. R`y \in \alpha . \equiv : xRy . \supset_x . x \in \alpha \qquad (2)$

$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash :: \mathrm{Hp} . \supset :. R``\beta \subset \alpha . \equiv : y \in \beta . \supset_y . R`y \in \alpha :: \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***37·62.** $\vdash : \mathrm{E}\,!\, R`y . y \in \alpha . \supset . R`y \in R``\alpha$

Dem.

$\vdash . *30{\cdot}33 . \supset$

$\vdash :: \mathrm{E}\,!\, R`y . \supset :. R`y \in R``\alpha . \equiv : xRy . \supset_x . x \in R``\alpha \qquad (1)$

$\vdash . *3{\cdot}2 . \qquad \supset \vdash :. y \in \alpha . \supset : xRy . \supset . y \in \alpha . xRy .$

$[*10{\cdot}24.*37{\cdot}1] \qquad \supset . x \in R``\alpha \qquad (2)$

$\vdash . (2) . *10{\cdot}11{\cdot}21 . \supset \vdash :. y \in \alpha . \supset : xRy . \supset_x . x \in R``\alpha \qquad (3)$

$\vdash . (1) . (3) . \qquad \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

Este último tipo de inferencia está relacionado con lo que dijo Jevons (69): "Recuerdo la reciente observación del Prof. De Morgan de que toda la lógica de Aristóteles no podría probar que 'dado que un caballo es un animal, la cabeza de un caballo es la cabeza de un animal' ". Debe confesarse que esto es un mérito en la lógica de Aristóteles, ya que la inferencia propuesta es una falacia si no se le añade la premisa "E ! la cabeza del caballo en cuestión". Por ejemplo, la proposición de arriba no tiene validez para una ostra o una hidra. Pero añadiéndole $\mathrm{E}\,!\, R`y$, la proposición ofrece un tipo importante y común de inferencia asilogística.

***37·63.** $\vdash :: \mathrm{E}\,!!\, R``\alpha . \supset :. x \in R``\alpha . \supset_x . \psi x : \equiv : y \in \alpha . \supset_y . \psi (R`y)$

Dem.

$\vdash . *37{\cdot}1 . \quad \supset \vdash :: x \in R``\alpha . \supset_x . \psi x :\equiv :. (\exists y) . y \in \alpha . xRy . \supset_x . \psi x :.$

$[*10{\cdot}23] \qquad \equiv :. y \in \alpha . xRy . \supset_{x,y} . \psi x :.$

$[*11{\cdot}2{\cdot}62] \qquad \equiv :. y \in \alpha . \supset_y : xRy . \supset_x . \psi x \qquad (1)$

$\vdash . *37{\cdot}104 . \supset \vdash ::. \mathrm{Hp} . \supset :: y \in \alpha . \supset_y :. \mathrm{E}\,!\, R`y :.$

$[*30{\cdot}33] \qquad \supset_y :. \psi (R`y) . \equiv : xRy . \supset_x . \psi x \qquad (2)$

$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

Esta proposición se usa muy frecuentemente.

***37·64.** $\vdash :. \mathrm{E}\,!!\, R``\alpha . \supset : (\exists y) . y \in \alpha . \psi (R`y) . \equiv . (\exists x) . x \in R``\alpha . \psi x$

Dem.

$\vdash . *30{\cdot}33 . \supset \vdash :: \mathrm{Hp} . \supset :. y \in \alpha . \supset : \psi (R`y) . \equiv . (\exists x) . xRy . \psi x :.$

$[*5{\cdot}32] \qquad \supset :. y \in \alpha . \psi (R`y) . \equiv : y \in \alpha : (\exists x) . xRy . \psi x \qquad (1)$

$\vdash . (1) . *10{\cdot}11{\cdot}21{\cdot}281 . \supset$

$\vdash :: \mathrm{Hp} . \supset :. (\exists y) . y \in \alpha . \psi (R`y) . \equiv : (\exists y) : y \in \alpha : (\exists x) . xRy . \psi x :$

$[*11{\cdot}6] \qquad \equiv : (\exists x) : (\exists y) . y \in \alpha . xRy : \psi x :$

(69) "Principles of Science, Cap. I (p. 18 de la edición de 1887).

$$[*37{\cdot}1] \qquad \equiv : (\exists x) . x \in R``\alpha . \psi x :: \supset \vdash . \text{Prop}$$

***37·65.** $\vdash : \text{E} !! R``\beta . \alpha \subset R``\beta . \supset . \alpha = R``(\breve{R}``\alpha \cap \beta)$

Dem.

$$\vdash . *30{\cdot}21 . *3{\cdot}27 . \supset \vdash :: \text{Hp} . \supset :. y \in \beta . \supset_y : zRy . xRy . \supset . z = x \qquad (1)$$

$$\vdash . *37{\cdot}1 . \supset \vdash :. \text{Hp} . \supset :$$

$$x \in R``(\breve{R}``\alpha \cap \beta) . \equiv . (\exists y) . y \in \breve{R}``\alpha \cap \beta . xRy .$$

$$[*37{\cdot}105.*11{\cdot}55] \qquad \equiv . (\exists y, z) . z \in \alpha . zRy . y \in \beta . xRy .$$

$$[(1).*4{\cdot}71] \qquad \equiv . (\exists y, z) . z \in \alpha . zRy . y \in \beta . xRy . z = x .$$

$$[*13{\cdot}194] \qquad \equiv . (\exists y, z) . z \in \alpha . y \in \beta . xRy . z = x .$$

$$[*13{\cdot}195] \qquad \equiv . (\exists y) . x \in \alpha . y \in \beta . xRy .$$

$$[*10{\cdot}35.*37{\cdot}1] \qquad \equiv . x \in \alpha . x \in R``\beta .$$

$$[*4{\cdot}71.\text{Hp}] \qquad \equiv . x \in \alpha :. \supset \vdash . \text{Prop}$$

***37·66.** $\vdash :. \text{E} !! R``\beta . \supset : \alpha \subset R``\beta . \equiv . (\exists \gamma) . \gamma \subset \beta . \alpha = R``\gamma$

Dem.

$$\vdash . *37{\cdot}65 . \text{Exp} . *13{\cdot}195 . *22{\cdot}43 . \supset$$

$$\vdash :. \text{Hp} . \supset : \alpha \subset R``\beta . \supset . (\exists \gamma) . \gamma \subset \beta . \alpha = R``\gamma \qquad (1)$$

$$\vdash . *37{\cdot}2 . *13{\cdot}13 . \supset \vdash : \gamma \subset \beta . \alpha = R``\gamma . \supset . \alpha \subset R``\beta :$$

$$[*10{\cdot}11{\cdot}23] \qquad \supset \vdash : (\exists \gamma) . \gamma \subset \beta . \alpha = R``\gamma . \supset . \alpha \subset R``\beta \qquad (2)$$

$$\vdash . (1) . (2) . \qquad \supset \vdash . \text{Prop}$$

***37·67.** $\vdash :. z \in \gamma . \supset_z . \text{E} ! R`S`z : \supset . R``S``\gamma = \hat{x} \{(\exists z) . z \in \gamma . x = R`S`z\}$

Dem.

$$\vdash . *34{\cdot}41 . \qquad \supset \vdash : \text{Hp} . z \in \gamma . \supset_z . R`S`z = (R \mid S)`z \qquad (1)$$

$$\vdash . (1) . *14{\cdot}21 . \supset \vdash : \text{Hp} . z \in \gamma . \supset_z . \text{E} ! (R \mid S)`z \qquad (2)$$

$$\vdash . (2) . *37{\cdot}6 . \quad \supset \vdash : \text{Hp} . \supset . (R \mid S)``\gamma = \hat{x} \{(\exists z) . z \in \gamma . x = (R \mid S)`\gamma\}$$

$$[(1)] \qquad = \hat{x} \{(\exists z) . z \in \gamma . x = R`S`\gamma\} \qquad (3)$$

$$\vdash . *37{\cdot}33 . \qquad \supset \vdash . R``S``\gamma = (R \mid S)``\gamma \qquad (4)$$

$$\vdash . (3) . (4) . \qquad \supset \vdash . \text{Prop}$$

***37·68.** $\vdash :. z \in \gamma . \supset_z . P`Q`z = R`z : \supset . P``Q``\gamma = R``\gamma$

Dem.

$$\vdash . *14{\cdot}21 . \supset \vdash : \text{Hp} . z \in \gamma . \supset . \text{E} ! P`Q`z . \text{E} ! R`z .$$

$$[*34{\cdot}41] \qquad \supset . P`Q`z = (P \mid Q)`z . \text{E} ! R`z . \qquad (1)$$

$$[*14{\cdot}21{\cdot}131{\cdot}144.\text{Hp}] \qquad \supset . \text{E} ! (P \mid Q)`z . (P \mid Q)`z = R`z \qquad (2)$$

$$\vdash . *37{\cdot}33 . \supset \vdash . P``Q``\gamma = (P \mid Q)``\gamma \qquad (3)$$

$$\vdash . (2) . (3) . *37{\cdot}6 . \supset$$

$$\vdash : \text{Hp} . \supset . P``Q``\gamma = \hat{x} \{(\exists z) . z \in \gamma . x = (P \mid Q)`z\}$$

$$[(2)] \qquad = \hat{x} \{(\exists z) . z \in \gamma . x = R`z\}$$

$$[*37{\cdot}6.(1)] \qquad = R``z : \supset \vdash . \text{Prop}$$

***37·69.** $\vdash :. y \in \beta . \supset_y . R`y = S`y : \supset . R``\beta = S``\beta$

Dem.

$$\vdash . *14{\cdot}21 . \supset \vdash :: \text{Hp} . \supset :. y \in \beta . \supset . \text{E} ! R`y . \text{E} ! S`y :. \qquad (1)$$

$$
\begin{array}{lll}
[*30{\cdot}4] & \supset :. y \in \beta . \supset : xRy . \equiv . x = R`y . & \\
[*14{\cdot}142] & \equiv . x = S`y . & \\
[*30{\cdot}4.(1)] & \equiv . xSy :. & \\
[*5{\cdot}32] & \supset :. y \in \beta . xRy . \equiv . y \in \beta . xSy & (2) \\
\vdash . (2) . *10{\cdot}11{\cdot}21{\cdot}281 . \supset & & \\
\vdash :. \mathrm{Hp} . \supset : (\exists y) . y \in \beta . xRy . \equiv . (\exists y) . y \in \beta . xSy : & & \\
[*37{\cdot}1] \quad \supset : x \in R``\beta . \equiv . x \in S``\beta :. \supset \vdash . \mathrm{Prop} & &
\end{array}
$$

Un caso especialmente importante de $R``\beta$ es $\overrightarrow{R}``\beta$ o $\overleftarrow{R}``\beta$. Este caso se estudiará más adelante (en el *70); de momento, sólo debemos ofrecer unas cuantas proposiciones preliminares sobre ello. Se observará que la hipótesis $\mathrm{E}!!\overrightarrow{R}``\beta$ o la $\mathrm{E}!!\overleftarrow{R}``\beta$ siempre se verifica, en virtud de las *32·12·121. De aquí, las siguientes aplicaciones de la *37·6 ss.:

$$
\begin{array}{lll}
*37{\cdot}7. & \vdash . \overrightarrow{R}``\beta = \hat{\alpha}\{(\exists y) . y \in \beta . \alpha = \overrightarrow{R}`y\} & [*37{\cdot}6 . *32{\cdot}12] \\
*37{\cdot}701. & \vdash . \overleftarrow{R}``\alpha = \hat{\beta}\{(\exists x) . x \in \alpha . \beta = \overleftarrow{R}`x\} & [*37{\cdot}6 . *32{\cdot}121] \\
*37{\cdot}702. & \vdash :. \overrightarrow{R}``\beta \subset \kappa . \equiv : y \in \beta . \supset_y . \overrightarrow{R}`y \in \kappa & [*37{\cdot}61] \\
*37{\cdot}703. & \vdash :. \overleftarrow{R}``\beta \subset \kappa . \equiv : x \in \beta . \supset_x . \overleftarrow{R}`x \in \kappa & [*37{\cdot}61] \\
*37{\cdot}704. & \vdash : y \in \alpha . \supset . \overrightarrow{R}`y \in \overrightarrow{R}``\alpha & [*37{\cdot}62 . *32{\cdot}12] \\
*37{\cdot}705. & \vdash : x \in \alpha . \supset . \overleftarrow{R}`x \in \overleftarrow{R}``\alpha & [*37{\cdot}62 . *32{\cdot}121] \\
*37{\cdot}706. & \vdash :. \alpha \in \overrightarrow{R}``\beta . \supset_\alpha . \psi\alpha : \equiv : y \in \beta . \supset_y . \psi(\overrightarrow{R}`y) & [*37{\cdot}63] \\
*37{\cdot}707. & \vdash :. \beta \in \overleftarrow{R}``\alpha . \supset_\beta . \psi\beta : \equiv : x \in \alpha . \supset_x . \psi(\overleftarrow{R}`x) & [*37{\cdot}63] \\
*37{\cdot}708. & \vdash :. (\exists\alpha) . \alpha \in \overrightarrow{R}``\beta . \psi\alpha . \equiv . (\exists y) . y \in \beta . \psi(\overrightarrow{R}`y) & [*37{\cdot}64] \\
*37{\cdot}709. & \vdash :. (\exists\alpha) . \alpha \in \overleftarrow{R}``\beta . \psi\alpha . \equiv . (\exists x) . x \in \beta . \psi(\overleftarrow{R}`x) & [*37{\cdot}64] \\
*37{\cdot}71. & \vdash : \kappa \subset \overrightarrow{R}``\beta . \supset . \kappa = \overrightarrow{R}``\{(\mathrm{Cnv}`\overrightarrow{R})``\kappa \cap \beta\} & [*37{\cdot}65] \\
*37{\cdot}711. & \vdash : \kappa \subset \overleftarrow{R}``\beta . \supset . \kappa = \overleftarrow{R}``\{(\mathrm{Cnv}`\overleftarrow{R})``\kappa \cap \beta\} & [*37{\cdot}65] \\
*37{\cdot}712. & \vdash : \kappa \subset \overrightarrow{R}``\beta . \equiv . (\exists\gamma) . \gamma \subset \beta . \kappa = \overrightarrow{R}``\gamma & [*37{\cdot}66] \\
*37{\cdot}713. & \vdash : \kappa \subset \overleftarrow{R}``\beta . \equiv . (\exists\gamma) . \gamma \subset \beta . \kappa = \overleftarrow{R}``\gamma & [*37{\cdot}66]
\end{array}
$$

*37·72. $\vdash : R = P \mid Q . \supset . \overrightarrow{R}``\gamma = P``\overrightarrow{Q}``\gamma$

Dem.

$$
\begin{array}{ll}
\vdash . *37{\cdot}11{\cdot}302 . \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \supset . (z) . P_z`\overrightarrow{Q}`z = \overrightarrow{R}`z . & \\
[*37{\cdot}68] & \supset . P_z``\overrightarrow{Q}``\gamma = \overrightarrow{R}``\gamma . \\
[(*37{\cdot}04)] & \supset . P``\overrightarrow{Q}``\gamma = \overrightarrow{R}``\gamma : \supset \vdash . \mathrm{Prop}
\end{array}
$$

*37·721. $\vdash : R = P \mid Q . \supset . \overleftarrow{R}``\gamma = \breve{Q}``\overleftarrow{P}``\gamma$ [Prueba como en la *37·72]

*37·73. $\vdash : \exists! \beta . \equiv . \exists! \overrightarrow{R}``\beta . \equiv . \exists! \overleftarrow{R}``\beta$ [*37·45 . *32·12·121]

*37·731. $\vdash : \beta = \Lambda . \equiv . \overrightarrow{R}``\beta = \Lambda . \equiv . \overleftarrow{R}``\beta = \Lambda$ [*37·73 . Transp]

Obsérvese que las Λ's que aparecen en esta proposición no son todas del mismo tipo. Por ejemplo, si R relaciona individuales con individuales, la primera Λ será de la clase de los no individuales, mientras que la segunda y tercera serán las clases de no clases. Así, pues, la ambigüedad que se atribuye al tipo de Λ debe ser determinada de manera distinta en cada una de las presencias de Λ en esta proposición. En general, cuando éste sea el caso con nuestros símbolos ambiguos, adoptaremos una notación que indique el hecho. Pero, cuando el símbolo ambiguo es Λ, parece que apenas merece la pena.

***37·74.** $\vdash :. \beta \subset \mathrm{C}`R . \equiv : \alpha \in \overrightarrow{R}``\beta . \supset_\alpha . \exists ! \alpha$

Dem.

$\vdash . *37·706 . \supset \vdash :. \alpha \in \overrightarrow{R}``\beta . \supset_\alpha . \exists ! \alpha : \equiv : y \in \beta . \supset_y . \exists ! \overrightarrow{R}`y :$

[*33·31] $\equiv : \beta \subset \mathrm{C}`R :. \supset \vdash .$ Prop

***37·75.** $\vdash :. \alpha \subset \mathrm{D}`R . \equiv : \beta \in \overleftarrow{R}``\alpha . \supset_\beta . \exists ! \beta$ [Prueba como en la *37·74]

***37·76.** $\vdash . \overrightarrow{R}``\beta \subset \mathrm{Cls}$

Dem.

$\vdash . *37·7 . \supset \vdash :. \alpha \in \overrightarrow{R}``\beta . \supset : (\exists y) . y \in \beta . \alpha = \overrightarrow{R}`y :$

[*10·5] $\supset : (\exists y) . \alpha = \overrightarrow{R}`y :$

[*32·13] $\supset : (\exists y) . \alpha = \hat{x}\,(xRy) :$

[*20·16] $\supset : (\exists \phi) . \alpha = \hat{x}\,(\phi ! x) :$

[*20·4] $\supset : \alpha \in \mathrm{Cls} :. \supset \vdash .$ Prop

***37·761.** $\vdash . \overleftarrow{R}``\alpha \subset \mathrm{Cls}$ [Prueba como en la *37·76]

***37·77.** $\vdash : \alpha \in \overrightarrow{R}``\mathrm{C}`R . \supset_\alpha . \exists ! \alpha$ [*37·74 . *22·42]

***37·771.** $\vdash : \beta \in \overleftarrow{R}``\mathrm{D}`R . \supset_\beta . \exists ! \beta$ [Prueba como en la *37·77]

***37·772.** $\vdash . \Lambda \sim \epsilon \overrightarrow{R}``\mathrm{C}`R$ [*37·77 . *24·63]

***37·773.** $\vdash . \Lambda \sim \epsilon \overleftarrow{R}``\mathrm{D}`R$ [*37·771 . *24·63]

***37·78.** $\vdash . \mathrm{D}`\overrightarrow{R} = \overrightarrow{R}``\mathrm{V}$ [*37·28]

***37·781.** $\vdash . \mathrm{D}`\overleftarrow{R} = \overleftarrow{R}``\mathrm{V}$ [*37·28]

***37·79.** $\vdash . \overrightarrow{R}``\mathrm{V} = \hat{\alpha}\,\{(\exists y) . \alpha = \overrightarrow{R}`y\}$ [*37·601 . *32·12]

***37·791.** $\vdash . \overleftarrow{R}``\mathrm{V} = \hat{\beta}\,\{(\exists x) . \beta = \overleftarrow{R}`x\}$ [*37·601 . *32·121]

***37·8.** $\vdash . (\alpha \upharpoonright \beta) \mid S = \alpha \upharpoonright \breve{S}``\beta$

Dem.

$\vdash . *35·103 . *34·1 . \supset \vdash : x\,\{(\alpha \upharpoonright \beta) \mid S\}\,z . \equiv . (\exists y) . x \in \alpha . y \in \beta . ySz .$

[*10·35.*37·105] $\equiv . x \in \alpha . z \in \breve{S}``\beta .$

[*35·103] $\equiv . x\,(\alpha \upharpoonright \breve{S}``\beta)\,z :\supset \vdash .$ Prop

***37·81.** $\vdash . R \mid (\alpha \upharpoonright \beta) = (R``\alpha) \upharpoonright \beta$ [Prueba como en la *37·8]

***37·82.** $\vdash . R \mid (\alpha \upharpoonright \beta) \mid S = (R``\alpha) \upharpoonright (\breve{S}``\beta)$ [*37·8·81]

*38. RELACIONES Y CLASES DERIVADAS DE UNA FUNCION DESCRIPTIVA DOBLE

Sumario del *38.

Una función descriptiva doble es una función no proposicional de dos argumentos, tal como $\alpha \cap \beta$, $\alpha \cup \beta$, $R \dot{\cap} S$, $R \dot{\cup} S$, $R \mid S$, $\alpha \upharpoonright R$, $R \restriction \alpha$, $R \restriction \alpha$. Las proposiciones de este número son aplicables a todas las funciones que en su notación tengan (como en los ejemplos anteriores) un signo funcional entre los dos argumentos. A fin de tratar de una vez sobre todos los casos análogos, adoptaremos en este número la notación

$$x \, ? \, y,$$

en donde "?" significa cualquier signo como $\cap$, $\cup$, $\dot{\cap}$, $\dot{\cup}$, $\mid$, $\upharpoonright$, $\restriction$, $\restriction$, o un signo funcional cualquiera que se defina en el futuro y que satisfaga la condición

$$(x, y) . \mathbf{E} ! (x \, ? \, y).$$

Las relaciones y clases derivadas, con las que estamos interesados, pueden ilustrarse tomando el caso de $\alpha \cap \beta$. La relación de $\alpha \cap \beta$ a β se escribirá $\alpha \cap$, y la relación de $\alpha \cap \beta$ a α se escribirá $\cap \beta$. De este modo, tenemos

$$\vdash . \alpha \cap \beta = \alpha \cap `\beta = \cap \beta `\alpha.$$

La utilidad de esta notación es importante debido a la posibilidad de notificaciones tales como $\alpha \cap$ "κ y $\cap \beta$"κ. Por ejemplo, tomemos una frase tal como "los miembros extranjeros de los clubs ingleses". Entonces, si ponemos α = extranjeros, κ = clubs ingleses, tenemos $\alpha \cap$ "κ = las clases de los miembros extranjeros de los diversos clubs ingleses. O, de nuevo, sea α una cónica, y κ un lápiz de líneas; entonces, $\alpha \cap$ "κ = los varios pares de puntos en los que miembros de κ se encuentran con α.

En este caso, ya que $\alpha \cap \beta = \beta \cap \alpha$, tenemos $\alpha \cap = \cap \alpha$. Pero cuando la función en cuestión no es conmutativa, esto no tiene validez. Así, por ejemplo, no tenemos $R| = |R$.

Las notaciones de este número frecuentemente se aplicarán en lo sucesivo a $R|S$. De acuerdo con lo que se dijo anteriormente, escribimos $R|$ para designar la relación de $R|S$ a S, y $|S$ para la relación de $R|S$ a R. Por lo tanto, tenemos

$$R \mid `S = \mid S `R = R \mid S.$$

Por consiguiente, $|S$"λ será la clase de las relaciones obtenidas tomando miembros de λ y multiplicándolos relativamente por S. Así, pues, si λ fuese la clase de relaciones primo hermano, primo segundo, etc., y S fuese la relación de padre a hijo, $|S$"λ sería la clase de relaciones una vez quitado primo hermano, una vez

quitado primo segundo, etc., tomado en el sentido que va de la generación más vieja a la más joven.

Con frecuencia es conveniente estar capacitados para exponer $|S\text{``}\lambda$ y expresiones afines como funciones descriptivas del primer argumento en vez del segundo. Para este propósito, ponemos

$$\lambda \underset{,,}{|} S = |S\text{``}\lambda$$

con notaciones similares para otras funciones descriptivas dobles. Entonces tenemos, como en el caso de $R|S$,

$$\lambda \underset{,,}{|} \text{`}S = \underset{,,}{|} S\text{`}\lambda = \lambda \underset{,,}{|} S.$$

Esto nos faculta para formar la clase $\lambda \underset{,,}{|} \text{``}\mu$. Esta clase es muy útil porque los miembros de sus miembros (es decir, $s\text{`}\lambda \underset{,,}{|} \text{``}\mu$, como la definiremos en el *40) constituyen la clase de todos los productos $R|S$ que pueden formarse de un miembro de λ y un miembro de μ.

Así, pues, nos vemos guiados hacia tres definiciones generales para las funciones descriptivas dobles, a saber (si $x \mathbin{♀} y$ es una función cualquiera de éstas):

$x \mathbin{♀}$ es la relación de $x \mathbin{♀} y$ a y, para cualquier y.

$\mathbin{♀} y$ es la relación de $x \mathbin{♀} y$ a x, para cualquier x.

$\alpha \underset{,,}{♀} y$ es la clase de los valores de $x \mathbin{♀} y$ cuando x es una α.

Ya que $\alpha \underset{,,}{♀} y$ es, nuevamente, una función descriptiva doble, las dos primeras definciones de arriba pueden aplicársele. La tercera definición, por razones tipográficas, no puede ser aplicada convenientemente, aunque, en teoría es, desde luego, aplicable. Las relaciones $x \mathbin{♀}$ y $\mathbin{♀} y$ representan la idea general contenida en algunos de los usos en matemáticas del término "operación", como, p. ej., $+1$ es la operación de añadir 1.

Los usos de las notaciones introducidas en este número intervienen principalmente en la aritmética (Partes III y IV). Pocas proposiciones pueden darse en esta etapa, ya que la mayor parte de los usos importantes de la notación introducida aquí dependen de la sustitución de alguna función especial por la función general "♀" usada aquí. En este número, las proposiciones dadas son todas consecuencias inmediatas de las definiciones.

***38·01.** $x \mathbin{♀} = \hat{u}\hat{y}\,(u = x \mathbin{♀} y)$ Df

***38·02.** $\mathbin{♀} y = \hat{u}\hat{x}\,(u = x \mathbin{♀} y)$ Df

***38·03.** $\alpha \underset{,,}{♀} y = \mathbin{♀} y\text{``}\alpha$ Df

***38·1.** $\vdash : u\,(x \mathbin{♀})\,y \,.\equiv.\, u = x \mathbin{♀} y$ [(*38·01)]

***38·101.** $\vdash : u\,(\mathbin{♀} y)\,x \,.\equiv.\, u = x \mathbin{♀} y$ [(*38·02)]

***38·11.** $\vdash . x \mathbin{♀} \text{`}y = \mathbin{♀} y\text{`}x = x \mathbin{♀} y$ [*38·1·101 . *30·3]

***38·12.** $\vdash . \mathrm{E}!\, x \mathbin{\text{♀}} `y . \mathrm{E}!\, \text{♀}\, y`x$ [*38·11 . *14·21]

***38·13.** $\vdash : u \in x \mathbin{\text{♀}} ``\alpha . \equiv . (\exists y) . y \in \alpha . u = x \mathbin{\text{♀}} y$ [*38·1 . *37·1]

***38·131.** $\vdash : u \in \text{♀}\, y``\alpha . \equiv . (\exists x) . x \in \alpha . u = x \mathbin{\text{♀}} y$ [*38·101 . *37·1]

***38·2.** $\vdash . \alpha \underset{,,}{\text{♀}} y = \text{♀}\, y``\alpha$ [(*38·03)]

***38·21.** $\vdash . \alpha \underset{,,}{\text{♀}} y = \hat{u}\, \{(\exists x) . x \in \alpha . u = x \mathbin{\text{♀}} y\}$ [*38·2·131]

***38·22.** $\vdash . \alpha \underset{,,}{\text{♀}} `y = \underset{,,}{\text{♀}}\, y`\alpha = \alpha \underset{,,}{\text{♀}} y$ [*38·11]

***38·23.** $\vdash . \mathrm{E}!\, \alpha \underset{,,}{\text{♀}} `y . \mathrm{E}!\, \underset{,,}{\text{♀}}\, y`\alpha$ [*38·22 . *14·21]

***38·24.** $\vdash : \exists!\, \alpha \underset{,,}{\text{♀}} y . \equiv . \exists!\, \alpha$

Dem.

$\vdash . *38{\cdot}2 . *37{\cdot}29 . \mathrm{Transp} . \supset \vdash : \exists!\, \alpha \underset{,,}{\text{♀}} y . \supset . \exists!\, \alpha$ (1)

$\vdash . *38{\cdot}21 . \supset \vdash : x \in \alpha . \supset . (x \mathbin{\text{♀}} y) \in \alpha \underset{,,}{\text{♀}} y .$

[*10·24] $\supset . \exists!\, \alpha \underset{,,}{\text{♀}} y$ (2)

$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***38·3.** $\vdash . \alpha \underset{,,}{\text{♀}} ``\beta = \hat{\gamma}\, \{(\exists y) . y \in \beta . \gamma = \alpha \underset{,,}{\text{♀}} y\} = \hat{\gamma}\, \{(\exists y) . y \in \beta . \gamma = \text{♀}\, y``\alpha\}$

[*38·13·2]

***38·31.** $\vdash . \underset{,,}{\text{♀}}\, y``\kappa = \hat{\gamma}\, \{(\exists \alpha) . \alpha \in \kappa . \gamma = \alpha \underset{,,}{\text{♀}} y\} = \hat{\gamma}\, \{(\exists \alpha) . \alpha \in \kappa . \gamma = \text{♀}\, y``\alpha\} = \text{♀}\, y```\kappa$

[*38·131·2 . *37·103]

NOTA A LA SECCION D

Observaciones generales sobre las relaciones. La noción de "relación" es tan general que es importante percatarse de las diferentes clases de relaciones a las que pueden aplicarse las notaciones definidas en la sección anterior. Ocurre con frecuencia que una proposición que es válida para alguna relación sólo es importante para relaciones de ciertas clases; por tanto, es deseable que el lector pensase en algunas de las principales clases de relaciones. De entre los varios usos a los que las diferentes clases de relaciones pueden aplicarse, hay tres que son especialmente importantes, a saber 1) dar origen a funciones descriptivas, 2) establecer correlaciones entre diferentes calses, 3) generar series. Considerémoslas sucesivamente.

1) A fin de que una relación R pueda dar origen a una función descriptiva, debe ser tal que el relacionante sea único cuando se dé el relacionado. Así, por ejemplo, las relaciones Cnv, $\overrightarrow{R}$, $\overleftarrow{R}$, D, $\breve{\mathrm{C}}$, C, R_ϵ, definidas anteriormente, todas originan funciones descriptivas. En general, si R da origen a una función descriptiva, habrá una cierta clase a saber $\breve{\mathrm{C}}`R$, a la que debe pertenecer el argumento de la función a fin de que la función pueda tener un valor para ese argumento. Por ejemplo, tomando el seno como una ilustración, y escribiendo "sen`$y$" en vez de "sen y", la y debe ser un número a fin de que sen`$y$ pueda existir. Entonces, $\breve{\text{sen}}$ es la relación de $y$ a $x$ cuando $x = \text{sen}`y$. Si ponemos $\alpha =$ los números comprendidos entre $-\pi/2$ y $\pi/2$, ambos incluidos, el sen $\restriction \alpha$ será la relación de x a y cuando $x = \text{sen}`y$, y $-\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2$. La conversa de esta relación, que es $\alpha \restriction \breve{\text{sen}}$, también dará origen a una función descriptiva; de este modo, $(\alpha \restriction \breve{\text{sen}})`x =$ un valor de $\text{sen}^{-1}\ x$ que está situado entre $-\pi/2$ y $\pi/2$. Esto ilustra un caso que se da con mucha frecuencia, a saber, que una relación R —como se convino— no da origen a una función descriptiva, pero sí cuando su dominio o dominio converso está convenientemente limitado. Así, por ejemplo, la relación "progenitor" no da origen a una función descriptiva, pero sí cuando su dominio se limita a machos o a hembras. Similarmente, la relación "raíz cuadrada" causa una función descriptiva cuando su dominio se limita a números positivos o a números negativos. La relación "esposa" da origen a una función descriptiva cuando su dominio converso está limitado a hombres cristianos, pero no cuando se incluyen hombres mahometanos. El dominio de una relación que da origen a una función descriptiva sin limitar su dominio o su dominio converso está constituido por todos los posibles valores de la función; el dominio converso consiste en todos los posibles argumentos para la función. Nuevamente, si R da origen a una función descriptiva, $\overleftarrow{R}`x$ será la clase de aquellos argumentos para los que el valor de la función es $x$. Así, pues, $\overleftarrow{\text{sen}}`x$ consiste en todos los números cuyo seno sea x, es decir, todos los valores de $\text{sen}^{-1}\ x$. De nuevo, sen"α será los senos de los varios miembros de α. Si α es una clase de números, entonces, por la notación del *38, $2 \times$ "α serán los duplos de dichos números, $3 \times$ "α sus triplos, y

así sucesivamente. Para tomar otra ilustración, sea α un lápiz de trazar y sea $R`x$ la intersección de una línea x con una transversal dada. Entonces, $R``\alpha$ serán las intersecciones de las líneas trazadas por el lápiz con la transversal.

2) Las relaciones que establecen una correlación entre dos clases constituyen realmente un caso particular de relaciones que dan origen a funciones descriptivas, a saber, el caso en el que la relación conversa también origina una función descriptiva. En este caso, la relación es de "uno a uno", esto es, dado el relacionante, se determina el relacionado, y viceversa. Una relación que se conciba como una correlación generalmente se representará por S o por T. En tales casos, disponemos de una regla que interesa menos a los términos particulares x e y para los que xRy, que a las clases de tales términos. Generalmente, en tales casos, tenemos alguna clase β contenida en el dominio converso de nuestra relación S, y tenemos una clase α tal que $\alpha = S``\beta$. En este caso, la relación $S$ correlaciona los miembros de $\alpha$ y los miembros de $\beta$. Tendremos también $\beta = \breve{S}``\alpha$, de forma que, para una relación tal, la correlación es recíproca. Tales relaciones son fundamentales en aritmética, ya que ellas se usan para definir lo que se quiere expresar al decir que dos clases (o series) tienen el mismo número cardinal (u ordinal) de términos.

3) Las relaciones que originan series se representarán generalmente por P o Q, y en las proposiciones cuya importancia principal estribe en su aplicación a las series también, como regla, simbolizaremos una relación variable por P o Q. Cuando se usa P puede leerse como "precede". Así, pues, $\breve{P}$ puede leerse "sigue", $\overrightarrow{P}`x$ puede leerse "predecesores de $x$", $\overleftarrow{P}`x$ puede leerse "seguidores de x". $D`P$ lo constituirá todos los miembros de la serie generada por $P$, excepto el último (si lo hubiese), $\breve{C}`P$ lo constituirá todos los miembros de la serie excepto el primero (si lo hay), $C`P$ lo constituirá todos los miembros de la serie. $P``\alpha$ consistirá en todos los términos que precedan a algún miembro de $\alpha$. Supongamos, por ejemplo, que nuestra serie es la serie de los números reales, y que $\alpha$ es la clase de los miembros de una serie ascendente $x_1, x_2, x_3, \ldots x_\nu, \ldots$ Entonces, $P``\alpha$ será el segmento de los números reales definidos por esta serie; es decir, estará formado por todos los predecesores del límite de la serie. (En el caso de que la serie $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu \ldots$ se desarrolle sin límite, $P``\alpha$ será la serie total de los números naturales).

Ocurre con frecuencia que una relación tiene más o menos un carácter serial, sin llegar a tener todas las características necesarias para generar series. Tomemos, por ejemplo, la relación de hijo a padre. Es obvio que, por medio de esta relación, la serie puede generarse partiendo de un hombre cualquiera y terminar en Adán. Pero estas series no constituyen el campo de la relación en cuestión; además, esta relación no es *transitiva*, es decir, un hijo de un hijo de x no es un hijo de x. Sin embargo, si sustituimos por "hijo" la relación "descendiente directo por línea masculina" (lo cual puede definirse en términos de "hijo" por el método explicado en los *90 y *91), y si limitamos el dominio converso de esta relación a los antecesores de x por la línea masculina directa, obtenemos una nueva relación que *es* serial.

De nuevo, una relación puede generar un número de series, como por ejemplo la relación "x está al este de y". Si x e y son puntos situados sobre la superficie terrestre y, en el hemisferio este, esta relación genera una serie para cualquier paralelo de latitud. Confinando ulteriormente el campo de la relación a un paralelo de latitud, obtenemos una relación que genera una serie. (La razón para confinar x e y a un hemisferio es para asegurar que la relación sea transitiva, ya que de otra forma podríamos tener x al este de y, e y al este de z, pero x al oeste de z).

Una relación puede tener las características de las tres clases de relaciones, siempre que incluyamos en la tercera clase todas aquellas que conducen a series por alguna de tales limitaciones como las que acabamos de describir. Por ejemplo, la relación $+ 1$, esto es (en virtud de la notación del *38), la relación de $x + 1$ a x, en donde x se supone que es un número entero cardinal finito, tiene las características de las tres clases de relaciones. En el primer caso, nos conduce a la función descriptiva $(+ 1)'x$, esto es, $x + 1$. En el segundo caso, se correlaciona con cualquier clase α de números, la clase que se obtiene añadiendo 1 a cada miembro de α, es decir, $(+ 1)"\alpha$. Esta correlación se puede emplear para probar que el número de enteros finitos es infinito (en uno de los dos sentidos de la palabra "infinito"); pero si tomamos a nuestra clase α como la constituida por todos los números enteros incluido el 0, la clase $(+ 1)"\alpha$ consiste en todos los números naturales excepto el 0, de forma que los números naturales pueden correlacionarse con una parte (70) propia de sí mismos. De nuevo, la relación $+ 1$ puede usarse, igual que la de padre a hijo, para generar una serie, a saber la serie usual de los números enteros en orden de magnitud, en la que cada una tiene con su inmediato predecesor la relación $+ 1$. Así, pues, esta relación participa de las características de cada una de los tres tipos de relaciones.

(70) Es decir, una parte y no la totalidad. Respecto de esta definición de infinito, véase el *124.

SECCION E

PRODUCTOS Y SUMAS DE CLASES

Sumario de la Sección E.

En esta sección hacemos una extensión de $\alpha \cap \beta$, $\alpha \cup \beta$, $R \dot{\cap} S$, $R \dot{\cup} S$. Dada una clase de clases, digamos κ, el producto de κ (que se simboliza por $p`\kappa$) es la parte común de todos los miembros de κ, es decir, la clase que se compone de aquellos términos que pertenecen a cada miembro de κ. La definición es

$$p`\kappa = \hat{x}\,(\alpha \in \kappa \,.\, \supset_{\alpha} \,.\, x \in \alpha) \quad \text{Df.}$$

Si κ tiene sólo dos miembros, supongamos α y β, $p`\kappa = \alpha \cap \beta$. Si $\kappa$ tiene tres miembros, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, entonces $p`\kappa = \alpha \cap \beta \cap \gamma$; y así sucesivamente. Pero este proceso sólo puede continuarse hasta un número finito de términos, mientras que la definición de $p`\kappa$ no exige que κ deba ser finito. Esta noción es de gran importancia en relación con los límites inferiores de las series. Por ejemplo, sea λ la clase de los números racionales cuyos cuadrados sean mayores que 2, y tengamos "xMy" con la significación "$x < y$, siendo x e y racionales". Entonces, si $x \in \lambda$, $\overrightarrow{M}`x$ será la clase de los racionales menores que x. De este modo, $\overrightarrow{M}``\lambda$ será la clase de las clases tales como $\overrightarrow{M}`x$, en donde $x \in \lambda$. Así, pues, el producto de $\overrightarrow{M}``\lambda$, que llamamos $p`\overrightarrow{M}``\lambda$, será la clase de los racionales que son menores que cada miembro de $\lambda$, esto es, la clase de los racionales cuyos cuadrados son menores que 2. Cada miembro de $\overrightarrow{M}``\lambda$ es un segmento de las series de los números racionales, y $p`\overrightarrow{M}``\lambda$ es el límite inferior de estos segmentos. Así es como probamos la existencia de los límites inferiores de las series de segmentos.

De manera similar, la *suma* de una clase de clases κ se define como la clase que está constituida por todos los términos que pertenezcan a *algún* miembro de κ; esto es,

$$s`\kappa = \hat{x}\,\{(\exists \alpha) \,.\, \alpha \in \kappa \,.\, x \in \alpha\} \quad \text{Df,}$$

es decir, x pertenece a la suma de κ si x pertenece a algún κ. Esta noción juega el mismo papel por lo que respecta a los límites superiores de series de segmentos como $p`\kappa$ lo juega para los límites inferiores. Sin embargo, tiene muchos más usos que $p`\kappa$, y es en conjunto una concepción más importante. Así, pues, en aritmética cardinal, si dos miembros de κ no tienen ningún término en común, la suma aritmética de los números de miembros poseidos por los distintos miembros de κ es el número de los miembros poseidos por $s`\kappa$.

El producto de una clase de relaciones (digamos λ) es la relación que se da entre x e y cuando x e y tienen cada relación de la clase λ. La definición es:

$$\dot{p}`\lambda = \hat{x}\hat{y}(R \in \lambda . \supset_R . xRy) \quad \text{Df.}$$

Las propiedades de $\dot{p}`\lambda$ son análogas o las de $p`\kappa$, pero sus usos son menos.

La suma de una clase de relaciones (digamos λ) es la relación que se da entre x e y siempre que sea una relación de la clase λ que se dé entre κ e y. La definición es

$$\dot{s}`\lambda = \hat{x}\hat{y}\{(\exists R) . R \in \lambda . xRy\} \quad \text{Df.}$$

Esta concepción, aunque menos importante que $s`\kappa$, lo es más que $\dot{p}`\lambda$. La adición de las series y de los números ordinales depende de ella, si bien la conexión es menor inmediata que la de la suma de los números cardinales con $s`\kappa$.

En lugar de definir $p`\kappa$, $s`\kappa$, $\dot{p}`\lambda$, $\dot{s}`\lambda$, puede ser formalmente más correcto definir p, s, $\dot{p}$ y $\dot{s}$, que son las relaciones que dan origen a las funciones descriptivas anteriores. De este modo, tendremos

$$p = \hat{\beta}\hat{\kappa}\{\beta = \hat{x}(\alpha \in \kappa . \supset_\alpha . x \in \alpha)\} \quad \text{Df,}$$

Por consiguiente debemos proceder a

$$\vdash : \beta p \kappa . \equiv . \beta = \hat{x}(\alpha \in \kappa . \supset_\alpha . x \in \alpha),$$

$$\vdash . p`\kappa = \hat{x}(\alpha \in \kappa . \supset_\alpha . x \in \alpha),$$

y

$$\vdash . \mathrm{E} ! p`\kappa.$$

Pero en los casos donde la relación, como opuesta a la función descriptiva, se requiere muy raramente, es más simple y sencillo dar la definición de la función descriptiva en el primer ejemplo. En tales casos, la relación siempre se supone tácitamente que ha sido también definida; es decir, cuando damos una definición de la forma

$$R`x = S`x \quad \text{Df,}$$

en donde S es alguna relación definida previamente, siempre suponemos que esta definición debe considerarse como derivada de

$$R = \hat{u}\hat{x}(u = S`x) \quad \text{Df.}$$

Además de los productos y sumas tratamos en esta sección de ciertas propiedades de las relaciones $R|$ y $|S$, cuyos significados resultan de la notación introducida en el *38. Tales relaciones son muy útiles en aritmética. La razón para versar sobre ellas en esta sección es que una gran cantidad de las proposiciones que se han de probar entraña sumas de clases de clases o relaciones.

*40. PRODUCTOS Y SUMAS DE CLASES DE CLASES

Sumario del *40.

En este número introducimos las dos notaciones (explicadas anteriormente)

$$p`\kappa = \hat{x}\,(\alpha \in \kappa \,.\, \supset_\alpha \,.\, x \in \alpha) \quad \text{Df}$$
$$s`\kappa = \hat{x}\,\{(\exists \alpha) \,.\, \alpha \in \kappa \,.\, x \in \alpha\} \quad \text{Df}$$

Se verá que ambas notaciones se van haciendo cada vez más útiles, conforme vayamos avanzando, pero a lo largo del trabajo será más útil $s`\kappa$ que $p`\kappa$. Para que $p`\kappa$ y $s`\kappa$ tengan significación se precisa que κ deba ser una clase de clases.

En este número, las proposiciones más útiles son las siguientes:

***40·12.** $\vdash : \alpha \in \kappa \,.\, \supset \,.\, p`\kappa \subset \alpha$

Esto es, el producto de κ está contenido en cada miembro de κ

***40·13.** $\vdash : \alpha \in \kappa \,.\, \supset \,.\, \alpha \subset s`\kappa$

Esto es, cada miembro de κ se contiene en la suma de κ.

***40·15.** $\vdash :. \beta \subset p`\kappa \,.\, \equiv : \gamma \in \kappa \,.\, \supset_\gamma \,.\, \beta \subset \gamma$

Esto es, β se contiene en el producto de κ si β se contiene en cada miembro de κ, y viceversa.

***40·151.** $\vdash :. s`\kappa \subset \beta \,.\, \equiv : \gamma \in \kappa \,.\, \supset_\gamma \,.\, \gamma \subset \beta$

Esto es, la suma de κ se contiene en β si cada miembro de κ se contiene en β, y viceversa.

***40·2.** $\vdash : \kappa = \Lambda \,.\, \supset \,.\, p`\kappa = V$

Esto es, el producto de la clase nula de clases es la clase universal. Esto, a primera vista, puede parecer paradójico, pero realmente no lo es. De los pocos miembros que κ tenga, el mayor, hablando en modo general, es $p`\kappa$. Si $\kappa$ no tiene miembros, entonces $\kappa$ no tiene miembros a los que un término dado $x$ no pertenezca y, por lo tanto, $x$ pertenece a $p`\kappa$.

***40·23.** $\vdash : \exists ! \kappa \,.\, \supset \,.\, p`\kappa \subset s`\kappa$

Esto es, salvo que κ sea nulo, su producto está contenido en su suma.

***40·38.** $\vdash . \hat{R}``s`\kappa = s`R```\kappa$

Esta proposición se usa muy frecuentemente en aritmética. Lo que expresa es lo siguiente: dada una clase de clases κ, tomemos su suma $s`\kappa$, y entonces, consideremos todos los términos que tienen la relación $R$ con respecto a algunos miembros de $s`\kappa$; esto da la clase $R``s`\kappa$; a continuación, tomemos cada miembro separado de $\kappa$, digamos $\alpha$, y formemos la clase $R``\alpha$, que consiste en todos los términos que

tienen la relación R con respecto a algún miembro de α. Esta clase de las clases tales como $R``\alpha$, para varias α's que sean miembros de κ, es $R```\kappa$; la suma de esta clase, por la proposición anterior, es la misma que $R``s`\kappa$.

***40·4.** $\vdash :. \mathrm{E}\,!!\, R``\beta . \supset . s`R``\beta = \hat{x}\{(\exists y) . y \in \beta . x \in R`y\}$

Esta proposición requiere, para que tenga significación, que $R`y$ deba ser siempre una clase. La proposición manifiesta que, si $R`y$ existe siempre cuando $y \in \beta$, entonces la suma de todas las clases que tienen la relación R con respecto a algunos miembros de β consiste en todos los miembros de clases tales como $R`y$, en donde $y \in \beta$.

***40·5.** $\vdash . s`\overrightarrow{R}``\beta = R``\beta$

Esta proposición proviene de la *40·4 mediante la sustitución de $\overrightarrow{R}$ por R en dicha proposición.

***40·51.** $\vdash . p`\overrightarrow{R}``\beta = \hat{x}\{y \in \beta . \supset_y . xRy\}$

En virtud de la *40·5, $p`\overrightarrow{R}``\beta$ se correlaciona con $R``\beta$. De este modo, si R es una relación serial, $p`\overrightarrow{R}``\beta$ se compone de los términos que preceden a la totalidad de $\beta$, y $R``\beta$ está constituida por los términos que preceden a parte de β. Si β tiene un límite inferior, será el límite superior o máximo de $p`\overrightarrow{R}``\beta$; si $\beta$ tiene un límite superior, será el límite superior de $R``\beta$.

***40·61.** $\vdash : \exists\,!\,\beta . \supset . p`\overrightarrow{R}``\beta \subset R``\beta . p`\overleftarrow{R}``\beta \subset \breve{R}``\beta$

En esta proposición, la hipótesis es esencial ya que, si $\beta = \Lambda$, $p`\overrightarrow{R}``\beta = \mathrm{V}$ y $R``\beta = \Lambda$.

***40·01.** $p`\kappa = \hat{x}(\alpha \in \kappa . \supset_\alpha . x \in \alpha)$ Df

***40·02.** $s`\kappa = \hat{x}\{(\exists \alpha) . \alpha \in \kappa . x \in \alpha\}$ Df

***40·1.** $\vdash :. x \in p`\kappa . \equiv : \alpha \in \kappa . \supset_\alpha . x \in \alpha$ [*20·3 . (*40·01)]

***40·11.** $\vdash : x \in s`\kappa . \equiv . (\exists \alpha) . \alpha \in \kappa . x \in \alpha$ [*20·3 . (*40·02)]

***40·12.** $\vdash : \alpha \in \kappa . \supset . p`\kappa \subset \alpha$

Dem.

$\vdash . $ *40·1 . *10·1 . $\supset \vdash :. x \in p`\kappa . \supset : \alpha \in \kappa . \supset . x \in \alpha :.$

[Comm] $\supset \vdash :. \alpha \in \kappa . \supset : x \in p`\kappa . \supset . x \in \alpha$ (1)

$\vdash . (1) . $ *10·11·21 . *22·1 . $\supset \vdash .$ Prop

***40·13.** $\vdash : \alpha \in \kappa . \supset . \alpha \subset s`\kappa$

Dem.

$\vdash . $ *40·11 . *10·24 . $\supset \vdash : \alpha \in \kappa . x \in \alpha . \supset . x \in s`\kappa :$

[Exp] $\supset \vdash :. \alpha \in \kappa . \supset : x \in \alpha . \supset . x \in s`\kappa$ (1)

$\vdash . (1) . $ *10·11·21 . *22·1 . $\supset \vdash .$ Prop

***40·14.** $\vdash : \alpha \in \kappa . x \in p`\kappa . \supset . x \in \alpha$ [*40·12 . Imp]

***40·141.** $\vdash : \alpha \in \kappa . x \in \alpha . \supset . x \in s`\kappa$ [*40·11 . *10·24]

***40·15.** $\vdash :. \beta \subset p`\kappa . \equiv : \gamma \in \kappa . \supset_\gamma . \beta \subset \gamma$

Dem.

$\vdash . *40{\cdot}1 . \supset \vdash :: \beta \subset p`\kappa : \equiv :. x \in \beta . \supset_x : \gamma \in \kappa . \supset_\gamma . x \in \gamma :.$

[*11·62] $\equiv :. (x, \gamma) : x \in \beta . \gamma \in \kappa . \supset . x \in \gamma :.$

[*4·3·84.*11·33] $\equiv :. (x, \gamma) : \gamma \in \kappa . x \in \beta . \supset . x \in \gamma :.$

[*11·2·62] $\equiv :. \gamma \in \kappa . \supset_\gamma : x \in \beta . \supset_x . x \in \gamma :.$

[*22·1] $\equiv :. \gamma \in \kappa . \supset_\gamma . \beta \subset \gamma :: \supset \vdash .$ Prop

***40·151.** $\vdash :. s`\kappa \subset \beta . \equiv : \gamma \in \kappa . \supset_\gamma . \gamma \subset \beta$

Dem.

$\vdash . *40{\cdot}11 . \supset \vdash :: s`\kappa \subset \beta . \equiv :. (\exists \gamma) . \gamma \in \kappa . x \in \gamma . \supset_x . x \in \beta :.$

[*10·23] $\equiv :. (\gamma, x) :. \gamma \in \kappa . x \in \gamma . \supset . x \in \beta :.$

[*11·62] $\equiv :. (\gamma) :. \gamma \in \kappa . \supset : (x) : x \in \gamma . \supset . x \in \beta :.$

[*22·1] $\equiv :. \gamma \in \kappa . \supset_\gamma . \gamma \subset \beta :: \supset \vdash .$ Prop

Esta proposición se usa frecuentemente.

***40·16.** $\vdash : \kappa \subset \lambda . \supset . p`\lambda \subset p`\kappa$

Dem.

$\vdash . *10{\cdot}1 . \supset \vdash :: \mathrm{Hp} . \supset :. \gamma \in \kappa . \supset . \gamma \in \lambda :.$

[Syll] $\supset :. \gamma \in \lambda . \supset . x \in \gamma : \supset : \gamma \in \kappa . \supset . x \in \gamma$ (1)

$\vdash . (1) . *10{\cdot}11{\cdot}21 . \supset$

$\vdash :: \mathrm{Hp} . \supset :. (\gamma) :. \gamma \in \lambda . \supset . x \in \gamma : \supset : \gamma \in \kappa . \supset . x \in \gamma :.$

[*10·27] $\supset :. (\gamma) : \gamma \in \lambda . \supset . x \in \gamma : \supset : (\gamma) : \gamma \in \kappa . \supset . x \in \gamma :.$

[*40·1] $\supset :. x \in p`\lambda . \supset . x \in p`\kappa$ (2)

$\vdash . (2) . *10{\cdot}11{\cdot}21 . \supset \vdash .$ Prop

***40·161.** $\vdash : \kappa \subset \lambda . \supset . s`\kappa \subset s`\lambda$

Dem.

$\vdash . *10{\cdot}1 . \supset \vdash :. \mathrm{Hp} . \supset : \gamma \in \kappa . \supset . \gamma \in \lambda :$

[Fact] $\supset : \gamma \in \kappa . x \in \gamma . \supset . \gamma \in \lambda . x \in \gamma :$

[*10·11·28] $\supset : (\exists \gamma) . \gamma \in \kappa . x \in \gamma . \supset . (\exists \gamma) . \gamma \in \lambda . x \in \gamma :$

[*40·11] $\supset : x \in s`\kappa . \supset . x \in s`\lambda$ (1)

$\vdash . (1) . *10{\cdot}11{\cdot}21 . \supset \vdash .$ Prop

***40·17.** $\vdash . p`\kappa \cup p`\lambda \subset p`(\kappa \cap \lambda)$

Dem.

$\vdash . *22{\cdot}34 . \supset \vdash :: x \in p`\kappa \cup p`\lambda . \equiv :. x \in p`\kappa . \vee . x \in p`\lambda :.$

[*40·1] $\equiv :. \gamma \in \kappa . \supset_\gamma . x \in \gamma : \vee : \gamma \in \lambda . \supset_\gamma . x \in \gamma :.$

[*10·41] $\supset :. (\gamma) :. \gamma \in \kappa . \supset . x \in \gamma : \vee : \gamma \in \lambda . \supset . x \in \gamma :.$

[*4·79] $\supset :. (\gamma) : \gamma \in \kappa . \gamma \in \lambda . \supset . x \in \gamma :.$

[*22·33] $\supset :. (\gamma) : \gamma \in \kappa \cap \lambda . \supset . x \in \gamma :.$

[*40·1] $\supset :. x \in p`(\kappa \cap \lambda)$ (1)

$\vdash . (1) . *10{\cdot}11 . \supset \vdash .$ Prop

***40·171.** $\vdash . s`\kappa \cup s`\lambda = s`(\kappa \cup \lambda)$

Dem.

$\vdash .*22{\cdot}34 . \supset \vdash :: x \in s^{\epsilon}\kappa \cup s^{\epsilon}\lambda . \equiv :. x \in s^{\epsilon}\kappa . \vee . x \in s^{\epsilon}\lambda :.$

[*40·11] $\equiv :. (\exists\gamma) . \gamma \in \kappa . x \in \gamma : \vee : (\exists\gamma) . \gamma \in \lambda . x \in \gamma :.$

[*10·42] $\equiv :. (\exists\gamma) : \gamma \in \kappa . x \in \gamma . \vee . \gamma \in \lambda . x \in \gamma :.$

[*4·4] $\equiv :. (\exists\gamma) :. \gamma \in \kappa . \vee . \gamma \in \lambda : x \in \gamma :.$

[*22·34] $\equiv :. (\exists\gamma) . \gamma \in \kappa \cup \lambda . x \in \gamma :.$

[*40·11] $\equiv :. x \in s^{\epsilon}(\kappa \cup \lambda) :: \supset \vdash .$ Prop

***40·18.** $\vdash . p^{\epsilon}(\kappa \cup \lambda) = p^{\epsilon}\kappa \cap p^{\epsilon}\lambda$

Dem.

$\vdash .*40{\cdot}1 . \supset \vdash :: x \in p^{\epsilon}(\kappa \cup \lambda) . \equiv :. \gamma \in \kappa \cup \lambda . \supset_{\gamma} . x \in \gamma :.$

[*22·34] $\equiv :. (\gamma) :. \gamma \in \kappa . \vee . \gamma \in \lambda : \supset . x \in \gamma :.$

[*4·77] $\equiv :. (\gamma) :. \gamma \in \kappa . \supset . x \in \gamma : \gamma \in \lambda . \supset . x \in \gamma :.$

[*10·22·221] $\equiv :. (\gamma) : \gamma \in \kappa . \supset . x \in \gamma :. (\gamma) : \gamma \in \lambda . \supset . x \in \gamma :.$

[*40·1] $\equiv :. x \in p^{\epsilon}\kappa . x \in p^{\epsilon}\lambda :.$

[*22·33] $\equiv :. x \in p^{\epsilon}\kappa \cap p^{\epsilon}\lambda :: \supset \vdash .$ Prop

***40·181.** $\vdash . s^{\epsilon}(\kappa \cap \lambda) \subset s^{\epsilon}\kappa \cap s^{\epsilon}\lambda$

Dem.

$\vdash .*40{\cdot}11 . \supset \vdash :: x \in s^{\epsilon}(\kappa \cap \lambda) . \equiv :. (\exists\gamma) . \gamma \in \kappa \cap \lambda . x \in \gamma :.$

[*22·33] $\equiv :. (\exists\gamma) . \gamma \in \kappa . \gamma \in \lambda . x \in \gamma :.$

[*10·5] $\supset :. (\exists\gamma) . \gamma \in \kappa . x \in \gamma : (\exists\gamma) . \gamma \in \lambda . x \in \gamma :.$

[*40·11.*22·33] $\supset :. x \in s^{\epsilon}\kappa \cap s^{\epsilon}\lambda :: \supset \vdash .$ Prop

***40·19.** $\vdash :: x \in s^{\epsilon}\kappa . \equiv :. \gamma \in \kappa . \supset_{\gamma} . \gamma \subset \beta : \supset_{\beta} . x \in \beta$

Esta proposición es la extensión de la *22·6.

Dem.

$\vdash .*40{\cdot}151 . \supset$

$\vdash :: \gamma \in \kappa . \supset_{\gamma} . \gamma \subset \beta : \supset_{\beta} . x \in \beta :. \equiv :. s^{\epsilon}\kappa \subset \beta . \supset_{\beta} . x \in \beta$ (1)

$\vdash .*10{\cdot}1 . \supset \vdash :. s^{\epsilon}\kappa \subset \beta . \supset_{\beta} . x \in \beta : \supset : s^{\epsilon}\kappa \subset s^{\epsilon}\kappa . \supset . x \in s^{\epsilon}\kappa :$

[*22·42] $\supset : x \in s^{\epsilon}\kappa$ (2)

$\vdash .*22{\cdot}46 . \supset \vdash :. x \in s^{\epsilon}\kappa . s^{\epsilon}\kappa \subset \beta . \supset . x \in \beta :.$

[Exp] $\supset \vdash :. x \in s^{\epsilon}\kappa . \supset : s^{\epsilon}\kappa \subset \beta . \supset . x \in \beta :.$

[*10·11·21] $\supset \vdash :. x \in s^{\epsilon}\kappa . \supset : s^{\epsilon}\kappa \subset \beta . \supset_{\beta} . x \in \beta$ (3)

$\vdash .(2) . (3) . \supset \vdash :. s^{\epsilon}\kappa \subset \beta . \supset_{\beta} . x \in \beta : \equiv . x \in s^{\epsilon}\kappa$ (4)

$\vdash .(1) . (4) . \supset \vdash .$ Prop

***40·2.** $\vdash : \kappa = \Lambda . \supset . p^{\epsilon}\kappa = \mathrm{V}$

Dem.

$\vdash .*24{\cdot}5{\cdot}51 . \quad \supset \vdash :. \mathrm{Hp} . \supset : \sim(\exists\alpha) . \alpha \in \kappa :$

[*10·53] $\supset : (\alpha) : \alpha \in \kappa . \supset . x \in \alpha :$

[*40·1] $\supset : x \in p^{\epsilon}\kappa$ (1)

$\vdash .(1) .*10{\cdot}11{\cdot}21 . \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \supset . (x) . x \in p^{\epsilon}\kappa .$

[*24·14] $\supset . p^{\epsilon}\kappa = \mathrm{V} : \supset \vdash .$ Prop

***40·21.** $\vdash : \kappa = \Lambda . \supset . s`\kappa = \Lambda$

Dem.

$\vdash .$ *24·51 . $\supset \vdash : \mathrm{Hp} . \supset . \sim (\exists \alpha) . \alpha \in \kappa .$

[*10·5.Transp] $\supset . \sim (\exists \alpha) . \alpha \in \kappa . x \in \alpha .$

[*40·11.Transp] $\supset . x \sim \in s`\kappa$ (1)

$\vdash . (1) .$ *10·11·21 $. \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \supset . (x) . x \sim \in s`\kappa .$

[*24·15] $\supset . s`\kappa = \Lambda : \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

En la proposición anterior, las dos Λ's son de tipos diferentes, dado que κ es del tipo superior inmediato al de $s`\kappa$. Así, pues, debería ser más correcto escribir

$$\vdash : \kappa = \Lambda \cap \mathrm{Cls} . \supset . s`\kappa = \Lambda \cap \mathrm{V}.$$

Pero en el caso de Λ no es muy importante mantener la distinción de tipos.

***40·22.** $\vdash : \Lambda \in \kappa . \supset . p`\kappa = \Lambda$

Dem.

$\vdash .$ *40·12 $. \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \supset . p`\kappa \subset \Lambda .$

[*24·13] $\supset . p`\kappa = \Lambda : \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

En esta proposición, las dos Λ son del mismo tipo.

***40·221.** $\vdash : \mathrm{V} \in \kappa . \supset . s`\kappa = \mathrm{V}$

Dem.

$\vdash .$ *40·13 $. \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \supset . \mathrm{V} \subset s`\kappa .$

[*24·141] $\supset . s`\kappa = \mathrm{V} : \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***40·23.** $\vdash : \exists ! \kappa . \supset . p`\kappa \subset s`\kappa$

Dem.

$\vdash .$ *40·12·13 $. \supset \vdash : \alpha \in \kappa . \supset . p`\kappa \subset \alpha . \alpha \subset s`\kappa .$

[*22·44] $\supset . p`\kappa \subset s`\kappa :$

[*10·11·23] $\supset \vdash : (\exists \alpha) . \alpha \in \kappa . \supset . p`\kappa \subset s`\kappa : \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

Obsérvese que la hipótesis $\exists ! \kappa$ es esencial a esta proposición, ya que cuando $\kappa = \Lambda$, $p`\kappa = \mathrm{V}$ y $s`\kappa = \Lambda$. Así, pues,

$$\vdash : \exists ! \kappa . \equiv . p`\kappa \subset s`\kappa.$$

***40·24.** $\vdash :. \exists ! \kappa : \gamma \in \kappa . \supset_\gamma . \beta \subset \gamma : \supset . \beta \subset s`\kappa$

Dem.

$\vdash .$ *40·15 $. \supset \vdash :. \gamma \in \kappa . \supset_\gamma . \beta \subset \gamma : \supset . \beta \subset p`\kappa$ (1)

$\vdash .$ *40·23 $. \supset \vdash : \exists ! \kappa . \supset . p`\kappa \subset s`\kappa$ (2)

$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \supset . \beta \subset p`\kappa . p`\kappa \subset s`\kappa .$

[*22·44] $\supset . \beta \subset s`\kappa : \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

La última proposición se usa en la prueba de la *215·25.

***40·25.** $\vdash : x \in s`\kappa . \equiv . \exists ! \kappa \cap \hat{\alpha} (x \in \alpha)$

Dem.

$\vdash .$ *22·33 $. \supset \vdash : \exists ! \kappa \cap \hat{\alpha} (x \in \alpha) . \equiv . (\exists \gamma) . \gamma \in \kappa . \gamma \in \hat{\alpha} (x \in \alpha) .$

[*20·3] $\equiv . (\exists \gamma) . \gamma \in \kappa . x \in \gamma .$

[*40·11] $\equiv . x \in s`\kappa : \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***40·26.** $\vdash : \exists ! \, s'\kappa . \equiv . (\exists \alpha) . \alpha \in \kappa . \exists ! \, \alpha$

Dem.

$$\begin{aligned}
&\vdash . *40{\cdot}11 . \supset \vdash :. \exists ! \, s'\kappa . \equiv : (\exists x) : (\exists \alpha) . \alpha \in \kappa . x \in \alpha : \\
&[*11{\cdot}23{\cdot}55] \qquad \equiv : (\exists \alpha) : \alpha \in \kappa : (\exists x) . x \in \alpha : \\
&[*24{\cdot}5] \qquad \equiv : (\exists \alpha) . \alpha \in \kappa . \exists ! \, \alpha :. \supset \vdash . \text{Prop}
\end{aligned}$$

La siguiente proposición se usa en la prueba de la *216·51.

***40·27.** $\vdash :. \alpha \cap s'\kappa = \Lambda . \equiv : \gamma \in \kappa . \supset_\gamma . \alpha \cap \gamma = \Lambda$

Dem.

$$\begin{aligned}
&\vdash . *24{\cdot}311 . \supset \\
&\vdash :: \alpha \cap s'\kappa = \Lambda . \equiv :. s'\kappa \subset -\alpha :. \\
&[*22{\cdot}1{\cdot}35] \qquad \equiv :. x \in s'\kappa . \supset_x . x \sim \in \alpha :. \\
&[*40{\cdot}1] \qquad \equiv :. (\exists \gamma) . \gamma \in \kappa . x \in \gamma . \supset_x . x \sim \in \alpha :. \\
&[*10{\cdot}23] \qquad \equiv :. \gamma \in \kappa . x \in \gamma . \supset_{x,\gamma} . x \sim \in \alpha :. \\
&[*11{\cdot}2{\cdot}62] \qquad \equiv :. \gamma \in \kappa . \supset_\gamma : x \in \gamma . \supset_x . x \sim \in \alpha :. \\
&[*24{\cdot}39] \qquad \equiv :. \gamma \in \kappa . \supset_\gamma . \alpha \cap \gamma = \Lambda :: \supset \vdash . \text{Prop}
\end{aligned}$$

Las siguientes proposiciones sólo tienen significación cuando R sea una relación cuyo dominio se componga de clases, ya que ellos conciernen a $p'R''\alpha$ o $s'R''\alpha$, y, por lo tanto, se precisa que $R''\alpha$ deba ser una clase de clases.

***40·3.** $\vdash . p'R''(\alpha \cup \beta) = p'R''\alpha \cap p'R''\beta \quad [*37{\cdot}22 . *40{\cdot}18]$

***40·31.** $\vdash . s'R''(\alpha \cup \beta) = s'R''\alpha \cup s'R''\beta \quad [*37{\cdot}22 . *40{\cdot}171]$

***40·32.** $\vdash . p'R''\alpha \cup p'R''\beta \subset p'R''(\alpha \cap \beta)$

Dem.

$$\begin{aligned}
&\vdash . *37{\cdot}21 . \supset \vdash . R''(\alpha \cap \beta) \subset R''\alpha \cap R''\beta . \\
&[*40{\cdot}16] \qquad \supset \vdash . p'(R''\alpha \cap R''\beta) \subset p'R''(\alpha \cap \beta) \qquad (1) \\
&\vdash . *40{\cdot}17 . \supset \vdash . p'R''\alpha \cup p'R''\beta \subset p'(R''\alpha \cap R''\beta) \qquad (2) \\
&\vdash . (1) . (2) . *22{\cdot}44 . \supset \vdash . \text{Prop}
\end{aligned}$$

***40·33.** $\vdash . s'R''(\alpha \cap \beta) \subset s'R''\alpha \cap s'R''\beta \quad [*37{\cdot}21 . *40{\cdot}161 . *40{\cdot}181]$

Las siguientes proposiciones no requieren más que el dominio de R deba estar compuesto de clases.

***40·35.** $\vdash . p'R'''\kappa = \hat{x} \{\beta \in \kappa . \supset_\beta . x \in R''\beta\}$

Dem.

$$\begin{aligned}
&\vdash . *40{\cdot}1 . \supset \vdash :. x \in p'R'''\kappa . \equiv : \gamma \in R'''\kappa . \supset_\gamma . x \in \gamma : \\
&[*37{\cdot}103] \qquad \equiv : (\exists \beta) . \beta \in \kappa . \gamma = R''\beta . \supset_\gamma . x \in \gamma : \\
&[*10{\cdot}23] \qquad \equiv : \beta \in \kappa . \gamma = R''\beta . \supset_{\beta,\gamma} . x \in \gamma : \\
&[*13{\cdot}191] \qquad \equiv : \beta \in \kappa . \supset_\beta . x \in R''\beta \qquad (1) \\
&\vdash . (1) . *10{\cdot}11 . *20{\cdot}3 . \supset \vdash . \text{Prop}
\end{aligned}$$

***40·36.** $\vdash . s'R'''\kappa = \hat{x} \{(\exists \beta) . \beta \in \kappa . x \in R''\beta\}$ [Prueba similar]

***40·37.** $\vdash . R''p'\kappa \subset p'R'''\kappa$

Dem.

$$\vdash . *37{\cdot}1 . \supset \vdash :: x \in R''p'\kappa . \equiv :. (\exists y) . y \in p'\kappa . xRy :.$$

$$
\begin{array}{ll}
[*40{\cdot}1] & \equiv :. (\exists y) : \beta \in \kappa \,.\, \supset_\beta \,.\, y \in \beta : xRy :. \\
[*10{\cdot}33] & \equiv :. (\exists y) :. (\beta) : \beta \in \kappa \,.\, \supset \,.\, y \in \beta : xRy :. \\
[*11{\cdot}26] & \supset :. (\beta) :. (\exists y) : \beta \in \kappa \,.\, \supset \,.\, y \in \beta : xRy :. \\
[*5{\cdot}31] & \supset :. (\beta) :. (\exists y) : \beta \in \kappa \,.\, \supset \,.\, y \in \beta \,.\, xRy :. \\
[*10{\cdot}37] & \supset :. (\beta) :. \beta \in \kappa \,.\, \supset \,.\, (\exists y) \,.\, y \in \beta \,.\, xRy :. \\
[*37{\cdot}1] & \supset :. (\beta) : \beta \in \kappa \,.\, \supset \,.\, x \in R``\beta :. \\
[*40{\cdot}35] & \supset :. x \in p`R```\kappa :: \supset \vdash . \text{Prop}
\end{array}
$$

***40·38.** $\vdash . R``s`\kappa = s`R```\kappa$

Dem.

$$
\begin{array}{ll}
\vdash . *37{\cdot}1 \,.\, \supset \vdash :: x \in R``s`\kappa \,.\, \equiv :. (\exists y) \,.\, y \in s`\kappa \,.\, xRy :. \\
[*40{\cdot}11] & \equiv :. (\exists y) :. (\exists \alpha) \,.\, \alpha \in \kappa \,.\, y \in \alpha : xRy :. \\
[*11{\cdot}6] & \equiv :. (\exists \alpha) :. \alpha \in \kappa : (\exists y) \,.\, y \in \alpha \,.\, xRy :. \\
[*37{\cdot}1] & \equiv :. (\exists \alpha) \,.\, \alpha \in \kappa \,.\, x \in R``\alpha :. \\
[*40{\cdot}36] & \equiv :. x \in s`R```\kappa :: \supset \vdash . \text{Prop}
\end{array}
$$

Esta proposición se usa frecuentemente en las pruebas de proposiciones aritméticas.

***40·4.** $\vdash : \text{E} !! R``\beta \,.\, \supset \,.\, s`R``\beta = \hat{x}\,\{(\exists y) \,.\, y \in \beta \,.\, x \in R`y\}$

Esta proposición es significante sólo cuando $\text{D}`R \subset \text{Cls}$.

Dem.

$$
\begin{array}{ll}
\vdash . *37{\cdot}6 \,.\, \supset \vdash : \text{Hp} \,.\, \supset \,.\, R``\beta = \hat{\alpha}\,\{(\exists y) \,.\, y \in \beta \,.\, \alpha = R`y\} & (1) \\
\vdash . (1) \,.\, *40{\cdot}11 \,.\, \supset & \\
\vdash :: \text{Hp} \,.\, \supset :. x \in s`R``\beta \,.\, \equiv : (\exists \alpha) : (\exists y) \,.\, y \in \beta \,.\, \alpha = R`y : x \in \alpha : & \\
[*11{\cdot}6] & \equiv : (\exists y) : y \in \beta : (\exists \alpha) \,.\, \alpha = R`y \,.\, x \in \alpha : \\
[*14{\cdot}205] & \equiv : (\exists y) \,.\, y \in \beta \,.\, x \in R`y :: \supset \vdash . \text{Prop}
\end{array}
$$

***40·41.** $\vdash : \text{E} !! R``\beta \,.\, \supset \,.\, p`R``\beta = \hat{x}\,\{y \in \beta \,.\, \supset_y \,.\, x \in R`y\}$ [Prueba similar]

***40·42.** $\vdash : (x) \,.\, R`x = P`x \cup Q`x \,.\, \supset \,.\, s`R``\alpha = s`(P``\alpha \cup Q``\alpha) = s`P``\alpha \cup s`Q``\alpha$

Dem.

$$
\begin{array}{ll}
\vdash . *14{\cdot}21 \,. \quad \supset \vdash : \text{Hp} \,.\, \supset \,.\, (x) \,.\, \text{E} ! R`x \,.\, \text{E} ! P`x \,.\, \text{E} ! Q`x & (1) \\
\vdash . (1) \,.\, *40{\cdot}4 \,.\, \supset \vdash : \text{Hp} \,.\, \supset \,.\, s`R``\alpha = \hat{x}\,\{(\exists y) \,.\, y \in \alpha \,.\, x \in R`y\} & \\
[\text{Hp}] & = \hat{x}\,\{(\exists y) \,.\, y \in \alpha \,.\, x \in P`y \cup Q`y\} \\
[*22{\cdot}34] & = \hat{x}\,\{(\exists y) : y \in \alpha : x \in P`y \,.\vee.\, x \in Q`y\} \\
[*4{\cdot}4.*10{\cdot}42] & = \hat{x}\,\{(\exists y) \,.\, y \in \alpha \,.\, x \in P`y \,.\vee.\, (\exists y) \,.\, y \in \alpha \,.\, x \in Q`y\} \\
[(1).*40{\cdot}4] & = \hat{x}\,\{x \in s`P``\alpha \,.\vee.\, x \in s`Q``\alpha\} \\
[*20{\cdot}42.*22{\cdot}34] & = s`P``\alpha \cup s`Q``\alpha \\
[*40{\cdot}171] & = s`(P``\alpha \cup Q``\alpha) : \supset \vdash . \text{Prop}
\end{array}
$$

Esta proposición se usa en la *40·57, en donde hacemos $R = C$, $P = \text{D}$, $Q = \text{C}$.

***40·43.** $\vdash :: \text{E} !! R``\beta \,.\, \supset :. s`R``\beta \subset \alpha \,.\, \equiv : y \in \beta \,.\, \supset_y \,.\, R`y \subset \alpha$

Dem.

$$
\begin{array}{ll}
\vdash . *37{\cdot}63 \,.\, \supset \vdash :: \text{Hp} \,.\, \supset :. y \in \beta \,.\, \supset_y \,.\, R`y \subset \alpha : \equiv : \gamma \in R``\beta \,.\, \supset_\gamma \,.\, \gamma \subset \alpha : & \\
[*40{\cdot}151] & \equiv : s`R``\beta \subset \alpha :: \supset \vdash . \text{Prop}
\end{array}
$$

***40·44.** $\vdash :: \mathrm{E}\,!!\, R``\beta . \supset :. \alpha \subset p`R``\beta . \equiv : y \in \beta . \supset_y . \alpha \subset R`y$

Dem.

$\vdash . *37·63 . \supset \vdash :: \mathrm{Hp} . \supset :. y \in \beta . \supset_y . \alpha \subset R`y : \equiv : \gamma \in R``\beta . \supset_\gamma . \alpha \subset \gamma :$ ·

[*40·15] $\equiv : \alpha \subset p`R``\beta :: \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

La siguiente proposición se usa en la prueba de la *84·44.

***40·45.** $\vdash :. y \in \beta . \supset_y . R`y \subset S`y : \supset . s`R``\beta \subset s`S``\beta$

Dem.

$\vdash . *14·21 . \supset \vdash :. \mathrm{Hp} . \supset : \mathrm{E}\,!!\, S``\beta . \mathrm{E}\,!!\, R``\beta :$ (1)

[*37·62.*40·13] $\supset : y \in \beta . \supset_y . S`y \subset s`S``\beta :$

[Hp] $\supset : y \in \beta . \supset_y . R`y \subset s`S``\beta :$

[*40·43.(1)] $\supset : s`R``\beta \subset s`S``\beta :. \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

La siguiente proposición se usa en la prueba de la *94·402.

***40·451.** $\vdash :. y \in \beta . \supset_y . R`y \subset S`y : \supset . p`R``\beta \subset p`S``\beta$

Dem.

$\vdash . *14·21 . *37·62 . *40·12 . \supset \vdash :. \mathrm{Hp} . \supset : y \in \beta . \supset . p`R``\beta \subset R`y .$

[Hp] $\supset . p`R``\beta \subset S`y .$

[*40·44] $\supset : p`R``\beta \subset p`S``\beta :. \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***40·5.** $\vdash . s`\overrightarrow{R}``\beta = R``\beta$

Dem.

$\vdash . *32·12 . *40·4 . \supset \vdash . s`\overrightarrow{R}``\beta = \hat{x}\{(\exists y) . y \in \beta . x \in \overrightarrow{R}`y\}$

[*32·18] $= \hat{x}\{(\exists y) . y \in \beta . xRy\}$

[(*37·01)] $= R``\beta . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***40·51.** $\vdash . p`\overrightarrow{R}``\beta = \hat{x}\{y \in \beta . \supset_y . xRy\}$ [*32·12 . *40·41 . *32·18]

$p`\overrightarrow{R}``\beta$ es la clase de los términos cada uno de los cuales tiene la relación $R$ con *cada* miembro de $\beta$, así, como $R``\beta$ es la clase de los términos cada uno de los cuales tiene la relación R con *algún* miembro de β. En la teoría de series, $p`\overrightarrow{R}``\beta$ juega un importante papel, correlativo al jugado por $R``\beta$ (que es $S`\overrightarrow{R}``\beta$, por la *40·5). Si $\beta$ es una clase contenida en una serie cuya relación generadora es $R$, $p`\overrightarrow{R}``\beta$ serán los predecesores de todos los miembros de β, mientras que $R``\beta$ serán los predecesores de algunos β.

***40·52.** $\vdash . s`\overleftarrow{R}``\beta = \breve{R}``\beta$ [La prueba como en la *40·5]

***40·53.** $\vdash . p`\overleftarrow{R}``\beta = \hat{y}\{x \in \beta . \supset_x . xRy\}$ [La prueba como en la *40·51]

***40·54.** $\vdash . p`\overrightarrow{R}``\beta = \hat{x}(\beta \subset \overleftarrow{R}`x)$ [*40·51 . *32·181]

***40·55.** $\vdash . p`\overleftarrow{R}``\alpha = \hat{y}(\alpha \subset \overrightarrow{R}`y)$ [*40·53 . *32·18]

Desde este punto hasta la *40·69, las proposiciones se insertan debido a su uso en la teoría de series.

***40·56.** $\vdash . s`C``\lambda = F``\lambda \quad [*33·5 . *40·5]$

En la proposición anterior, las condiciones para que sea significante exigen que λ deba ser una clase de relaciones.

***40·57.** $\vdash . s`C``\lambda = s`(D``\lambda \cup \breve{C}``\lambda) = s`D``\lambda \cup s`\breve{C}``\lambda \quad [*40·42 . *33·16]$

***40·6.** $\vdash . p`\overrightarrow{R}``\Lambda = V . p`\overleftarrow{R}``\Lambda = V \quad [*37·29 . *40·2]$

***40·61.** $\vdash : \exists ! \beta . \supset . p`\overrightarrow{R}``\beta \subset R``\beta . p`\overleftarrow{R}``\beta \subset \breve{R}``\beta$

Dem.

$\vdash . *37·73 . \supset \vdash : \text{Hp} . \supset . \exists ! \overrightarrow{R}``\beta .$

$[*40·23] \qquad \supset . p`\overrightarrow{R}``\beta \subset s`\overrightarrow{R}``\beta .$

$[*40·5] \qquad \supset . p`\overrightarrow{R}``\beta \subset R``\beta \qquad (1)$

Similarmente $\vdash : \text{Hp} . \supset . p`\overleftarrow{R}``\beta \subset \breve{R}``\beta \qquad (2)$

$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash . \text{Prop}$

***40·62.** $\vdash : \exists ! \beta . \supset . p`\overrightarrow{R}``\beta \subset C`R . p`\overleftarrow{R}``\beta \subset C`R$

$[*40·61 . *37·15·16 . *33·161]$

Las dos siguientes proposiciones (*40·63·64) se usan para probar la *40·65, la cual se usa en la *204·63.

***40·63.** $\vdash : \exists ! \beta - \breve{C}`R . \supset . p`\overrightarrow{R}``\beta = \Lambda$

Dem.

$\vdash . *33·41 . \text{Transp} . \supset \vdash : x \sim \in \breve{C}`R . \quad \supset . \overrightarrow{R}`x = \Lambda \qquad (1)$

$\vdash . *37·704 . \qquad \supset \vdash : x \in \beta . \quad \supset . \overrightarrow{R}`x \in \overrightarrow{R}``\beta \qquad (2)$

$\vdash . (1) . (2) . *22·32 . \supset \vdash : x \in \beta - \breve{C}`R . \supset . \overrightarrow{R}`x \in \overrightarrow{R}``\beta . \overrightarrow{R}`x = \Lambda .$

$[*20·57] \qquad \supset . \Lambda \in \overrightarrow{R}``\beta .$

$[*40·22] \qquad \supset . p`\overrightarrow{R}``\beta = \Lambda \qquad (3)$

$\vdash . (3) . *10·11·23 . \supset \vdash . \text{Prop}$

***40·64.** $\vdash : \exists ! \beta - D`R . \supset . p`\overleftarrow{R}``\beta = \Lambda \qquad$ [Prueba como en la *40·63]

***40·65.** $\vdash : \exists ! \beta - C`R . \supset . p`\overrightarrow{R}``\beta = \Lambda . p`\overleftarrow{R}``\beta = \Lambda \quad [*40·63·64 . *33·16]$

***40·66.** $\vdash :. \alpha \subset p`\overrightarrow{R}``\beta . \equiv : x \in \alpha . y \in \beta . \supset_{x,y} . xRy$

Dem.

$\vdash . *40·51 . \supset \vdash :: \alpha \subset p`\overrightarrow{R}``\beta . \equiv :. \alpha \subset \hat{x}(y \in \beta . \supset_y . xRy) :.$

$[*20·3] \qquad \equiv :. x \in \alpha . \supset_x : y \in \beta . \supset_y . xRy :.$

$[*11·62] \qquad \equiv :. (x, y) :. x \in \alpha . y \in \beta . \supset . xRy :: \supset \vdash . \text{Prop}$

***40·67.** $\vdash :. \beta \subset p`\overleftarrow{R}``\alpha . \equiv : x \in \alpha . y \in \beta . \supset_{x,y} . xRy : \equiv . \alpha \subset p`\overrightarrow{R}``\beta$

[Prueba como en la *40·66]

***40·68.** $\vdash . \alpha \cap p`\overleftarrow{P}``\alpha \subset \breve{P}``p`\overleftarrow{P}``\alpha$

Dem.

$$\vdash .*40{\cdot}53 . \supset \vdash :. x \in \alpha \cap p`\overleftarrow{P}``\alpha . \supset : x \in \alpha : y \in \alpha . \supset_y . yPx :$$
$$[*10{\cdot}26] \qquad \supset : xPx : y \in \alpha . \supset_y . yPx :$$
$$[*10{\cdot}24] \qquad \supset : (\exists z) : zPx : y \in \alpha . \supset_y . yPz :$$
$$[*40{\cdot}53.*37{\cdot}105] \qquad \supset : x \in \breve{P}``\overleftarrow{P}``\alpha :. \supset \vdash . \text{Prop}$$

Esta proposición se usa en la teoría de series (*206·2).

***40·681.** $\vdash . \alpha \cap p`\overrightarrow{P}``\alpha \subset P``p`\overrightarrow{P}``\alpha$ [Prueba como en la *40·68]

La siguiente proposición se usa en la *211·56.

***40·682.** $\vdash : \exists ! \alpha \cap p`\overleftarrow{P}``\beta . \supset . \beta \subset P``\alpha$

Dem.

$$\vdash .*40{\cdot}53 . \supset \vdash :. \text{Hp} . \supset : (\exists x) : x \in \alpha : y \in \beta . \supset_y . yPx :$$
$$[*5{\cdot}31] \qquad \supset : (\exists x) : y \in \beta . \supset_y . x \in \alpha . yPx :$$
$$[*11{\cdot}61] \qquad \supset : y \in \beta . \supset_y . (\exists x) . x \in \alpha . yPx .$$
$$[*37{\cdot}1] \qquad \supset_y . y \in P``\alpha :. \supset \vdash . \text{Prop}$$

***40·69.** $\vdash : \exists ! C`P \cap p`\overleftarrow{P}``\alpha . \equiv . \dot{\exists} ! P . \exists ! p`\overleftarrow{P}``\alpha$

Dem.

$$\vdash .*33{\cdot}24 .*24{\cdot}561 . \supset \vdash : \exists ! C`P \cap p`\overleftarrow{P}``\alpha . \supset . \dot{\exists} ! P . \exists ! p`\overleftarrow{P}``\alpha \qquad (1)$$
$$\vdash .*40{\cdot}62 . \qquad \supset \vdash : \exists ! \alpha . \exists ! p`\overleftarrow{P}``\alpha . \supset . \exists ! C`P \cap p`\overleftarrow{P}``\alpha \qquad (2)$$
$$\vdash .*40{\cdot}6 . \qquad \supset \vdash :. \alpha = \Lambda . \supset : C`P \cap p`\overleftarrow{P}``\alpha = C`P :$$
$$[*33{\cdot}24] \qquad \supset : \dot{\exists} ! P . \supset . \exists ! C`P \cap p`\overleftarrow{P}``\alpha \qquad (3)$$
$$\vdash .(2).(3).*4{\cdot}83 . \qquad \supset \vdash : \dot{\exists} ! P . \exists ! p`\overleftarrow{P}``\alpha . \supset . \exists ! C`P \cap p`\overleftarrow{P}``\alpha \qquad (4)$$
$$\vdash .(1).(4). \qquad \supset \vdash . \text{Prop}$$

Las últimas proposiciones relativas a $p`R``\beta$ y a $p`\overleftarrow{R}``\beta$ tienen, desde luego, otras análogas para $s`\overrightarrow{R}``\beta$ y para $s`\overleftarrow{R}``\beta$. Debido a la *45·5, estas análogas se expresan más simplemente como propiedades de $R``\beta$ y $\breve{R}``\beta$. Así, por ejemplo, la *37·264 es la análoga de la *40·67. Las últimas proposiciones relativas a $p`\overrightarrow{R}``\beta$ y $p`\overleftarrow{R}``\beta$ se usarán en teoría de series, pero hasta que lleguemos a esa parte raramente nos referiremos a ellas.

***40·7.** $\vdash . s`\alpha \underset{,,}{\varsigma} ``\beta = \hat{z} \{(\exists x, y) . x \in \alpha . y \in \beta . z = x \varsigma y\}$

Dem.

$$\vdash .*40{\cdot}11 .*38{\cdot}3 . \supset$$
$$\vdash . s`\alpha \underset{,,}{\varsigma} ``\beta = \hat{z} \{(\exists \gamma, y) . y \in \beta . \gamma = \varsigma y``\alpha . z \in \gamma\}$$
$$[*38{\cdot}131] \quad = \hat{z} \{(\exists \gamma, x, y) . y \in \beta . \gamma = \varsigma y``\alpha . x \in \alpha . z = x \varsigma y\}$$
$$[*13{\cdot}19] \quad = \hat{z} \{(\exists x, y) . x \in \alpha . y \in \beta . z = x \varsigma y\} . \supset \vdash . \text{Prop}$$

Esta proposición es de considerable importancia, dado que ofrece una forma global para las clases de todos los valores de la función $x \varsigma y$ obtenida tomando x en

la clase α e y en la clase β. Así, por ejemplo, supongamos que α es la clase de los números que son múltiplos de 3, y β la clase de los números que son múltiplos de 5, y $x \times y$ representa el producto aritmético de x e y, entonces $s'\alpha \times ''\beta$ será la clase de los productos de los múltiplos de 3 por los múltiplos de 5, es decir, la clase de los múltiplos de 15. De nuevo supongamos que α y β son clases de relaciones; entonces $s'\alpha|''\beta$ serán todos los productos relativos $R|S$ obtenidos eligiendo a R en la clase α y a S en la clase β.

***40·71.** $\vdash . s' \underset{''}{\wp} y''\kappa = (s'\kappa) \underset{''}{\wp} y = \wp y''s'\kappa$

Dem.

$\vdash . *40·38 . *38·31 . \supset \vdash . s' \underset{''}{\wp} y''\kappa = \wp y''s'\kappa$

[*38·2] $= (s'\kappa) \underset{''}{\wp} y . \supset \vdash .$ Prop

La hipótesis $R''\alpha \subset \beta$, que aparece en las *40·8·81, es una que juega un importante papel en una etapa posterior. En la teoría de la inducción (Parte II, Sección E) ella caracteriza a una clase *hereditaria,* y en la teoría de series, ella caracteriza a una *sección superior* (cuando se combina con $\alpha \subset C'R$).

***40·8.** $\vdash :. \alpha \in \kappa . \supset_\alpha . \breve{R}''\alpha \subset \alpha : \supset . \breve{R}''s'\kappa \subset s'\kappa$

Dem.

$\vdash . *37·171 . \supset \vdash :: \text{Hp} . \supset :. \alpha \in \kappa . \supset_\alpha : x \in \alpha . xRy . \supset_{x,y} . y \in \alpha :.$

[*11·62] $\supset :. \alpha \in \kappa . x \in \alpha . xRy . \supset_{\alpha,x,y} . y \in \alpha :.$

[*40·13] $\supset_{\alpha,x,y} . y \in s'\kappa :.$

[*40·11.*10·23] $\supset :. x \in s'\kappa . xRy . \supset_{x,y} . y \in s'\kappa :.$

[*37·171] $\supset :. \breve{R}''s'\kappa \subset s'\kappa :: \supset \vdash .$ Prop

***40·81.** $\vdash :. \alpha \in \kappa . \supset_\alpha . \breve{R}''\alpha \subset \alpha : \supset . \breve{R}''p'\kappa \subset p'\kappa$

Dem.

$\vdash . *37·171 . \supset \vdash ::. \text{Hp} . \supset :: \alpha \in \kappa . \supset : x \in \alpha . xRy . \supset . y \in \alpha ::$

[Exp.Comm] $\supset :: xRy . \supset :. \alpha \in \kappa . \supset : x \in \alpha . \supset . y \in \alpha :.$

[*2·77] $\supset :. \alpha \in \kappa . \supset . x \in \alpha : \supset : \alpha \in \kappa . \supset . y \in \alpha$ (1)

$\vdash . (1) . *10·11·21·27 . \supset$

$\vdash ::. \text{Hp} . \supset :: xRy . \supset :. \alpha \in \kappa . \supset_\alpha . x \in \alpha : \supset : \alpha \in \kappa . \supset_\alpha . y \in \alpha :.$

$\supset :. x \in p'\kappa . \supset . y \in p'\kappa ::$

[Imp] $\supset :: x \in p'\kappa . xRy . \supset . y \in p'\kappa$ (2)

$\vdash . (2) . *37·171 . \supset \vdash .$ Prop

*41. EL PRODUCTO Y SUMA DE UNA CLASE DE RELACIONES

Sumario del *41.

Las proposiciones que se dan en este número hasta la *41·3 exclusive, son las análogas del *40, excluyendo las que van desde la *40·3 hacia adelante, que no tienen análogas. Las pruebas se darán en este número cuando las proposiciones sean exactamente análogas a aquellas del número *40 que tengan la misma parte decimal. La menor importancia de $\dot{p}$ 'λ y $\dot{s}$'λ, comparativamente con las p'λ y s'λ, queda de manifiesto por el menor número de proposiciones que hay en el *41 en comparación con el *40.

Nuestras definiciones son

*41·01. $\dot{p}\text{`}\lambda = \hat{x}\hat{y}\,(R \in \lambda \,.\, \supset_R \,.\, xRy)$ Df

*41·02. $\dot{s}\text{`}\lambda = \hat{x}\hat{y}\,\{(\exists R) \,.\, R \in \lambda \,.\, xRy\}$ Df

De las proposiciones que preceden a la *41·3, y que son análogas de las proposiciones que hay en el *40, las únicas que se usan frecuentemente son estas dos

*41·13. $\vdash : R \in \lambda \,.\, \supset \,.\, R \subseteq \dot{s}\text{`}\lambda$

*41·151. $\vdash :. \dot{s}\text{`}\lambda \subseteq S \,.\equiv: R \in \lambda \,.\, \supset_R \,.\, R \subseteq S$

De las proposiciones restantes de este número, que no tienen análogas en el *40, las más importantes son las *41·43·44·45, a saber

$$D\text{`}\dot{s}\text{`}\lambda = s\text{`}D\text{``}\lambda, \quad \cap\text{`}\dot{s}\text{`}\lambda = s\text{`}\cap\text{``}\lambda, \quad C\text{`}\dot{s}\text{`}\lambda = s\text{`}C\text{``}\lambda.$$

Estas proposiciones se requieren constantemente en la teoría de selecciones (Parte II, Sección D) y en la relación aritmética. La mayoría de las restantes proposiciones de este número se usan sólo una vez o nunca.

---

*41·01. $\dot{p}\text{`}\lambda = \hat{x}\hat{y}\,(R \in \lambda \,.\, \supset_R \,.\, xRy)$ Df

*41·02. $\dot{s}\text{`}\lambda = \hat{x}\hat{y}\,\{(\exists R) \,.\, R \in \lambda \,.\, xRy\}$ Df

*41·1. $\vdash :. x\,(\dot{p}\text{`}\lambda)\,y \,.\equiv: R \in \lambda \,.\, \supset_R \,.\, xRy$

*41·11. $\vdash : x\,(\dot{s}\text{`}\lambda)\,y \,.\equiv .\, (\exists R) \,.\, R \in \lambda \,.\, xRy$

*41·12. $\vdash : R \in \lambda \,.\, \supset \,.\, \dot{p}\text{`}\lambda \subseteq R$

*41·13. $\vdash : R \in \lambda \,.\, \supset \,.\, R \subseteq \dot{s}\text{`}\lambda$

*41·14. $\vdash : R \in \lambda \,.\, x\,(\dot{p}\text{`}\lambda)\,y \,.\, \supset \,.\, xRy$

*41·141. $\vdash : R \in \lambda \,.\, xRy \,.\, \supset \,.\, x\,(\dot{s}\text{`}\lambda)\,y$

*41·15. $\vdash :. S \subseteq \dot{p}\text{`}\lambda \,.\equiv: R \in \lambda \,.\, \supset_R \,.\, S \subseteq R$

*41·151. $\vdash :. \dot{s}\text{`}\lambda \subseteq S \,.\equiv: R \in \lambda \,.\, \supset_R \,.\, R \subseteq S$

*41·16. $\vdash : \lambda \subset \mu \,.\, \supset \,.\, \dot{p}\text{`}\mu \subseteq \dot{p}\text{`}\lambda$

***41·161.** $\vdash : \lambda \subset \mu . \supset . \dot{s}`\lambda \subseteq \dot{s}`\mu$

***41·17.** $\vdash . \dot{p}`\lambda \cup \dot{p}`\mu \subseteq \dot{p}`(\lambda \cap \mu)$

***41·171.** $\vdash . \dot{s}`\lambda \cup \dot{s}`\mu = \dot{s}`(\lambda \cup \mu)$

***41·18.** $\vdash . \dot{p}`(\lambda \cup \mu) = \dot{p}`\lambda \dot{\cap} \dot{p}`\mu$

***41·181.** $\vdash . \dot{s}`(\lambda \cap \mu) \subseteq \dot{s}`\lambda \dot{\cap} \dot{s}`\mu$

***41·19.** $\vdash :: x (\dot{s}`\lambda) y . \equiv :. R \in \lambda . \supset_R . R \subseteq S : \supset_S . xSy$

***41·2.** $\vdash : \lambda = \Lambda . \supset . \dot{p}`\lambda = \dot{V}$

***41·21.** $\vdash : \lambda = \Lambda . \supset . \dot{s}`\lambda = \dot{\Lambda}$

***41·22.** $\vdash : \dot{\Lambda} \in \lambda . \supset . \dot{p}`\lambda = \dot{\Lambda}$

***41·221.** $\vdash : \dot{V} \in \lambda . \supset . \dot{s}`\lambda = \dot{V}$

***41·23.** $\vdash : \exists ! \lambda . \supset . \dot{p}`\lambda \subseteq \dot{s}`\lambda$

***41·24.** $\vdash :. \exists ! \lambda : R \in \lambda . \supset_R . S \subseteq R : \supset . S \subseteq \dot{s}`\lambda$

***41·25.** $\vdash : x (\dot{s}`\lambda) y . \equiv . \exists ! \lambda \cap \hat{R} (xRy)$

***41·26.** $\vdash : \dot{\exists} ! \dot{s}`\lambda . \equiv . (\exists R) . R \in \lambda . \dot{\exists} ! R$

***41·27.** $\vdash :. P \dot{\cap} \dot{s}`\lambda = \dot{\Lambda} . \equiv : R \in \lambda . \supset_R . P \dot{\cap} R = \dot{\Lambda}$

***41·3.** $\vdash . \mathrm{Cnv}`\dot{p}`\lambda = \dot{p}`\mathrm{Cnv}``\lambda$

Dem.

$\vdash . *31·131 . \supset$
$\vdash :. y (\mathrm{Cnv}`\dot{p}`\lambda) x . \equiv : x (\dot{p}`\lambda) y :$
[*41·1] $\equiv : R \in \lambda . \supset_R . xRy :$
[*31·131] $\equiv : R \in \lambda . \supset_R . y (\mathrm{Cnv}`R) x :$
[*37·63.*31·13] $\equiv : P \in \mathrm{Cnv}``\lambda . \supset_P . yPx :$
[*41·1] $\equiv : y (\dot{p}`\mathrm{Cnv}``\lambda) x :. \supset \vdash .$ Prop

***41·31.** $\vdash . \mathrm{Cnv}`\dot{s}`\lambda = \dot{s}`\mathrm{Cnv}``\lambda$ [Prueba como en la *41·3]

***41·32.** $\vdash . \mathrm{Cnv}``\dot{p}``\kappa = \dot{p}``\mathrm{Cnv}```\kappa$ [*41·3 . *37·354]

***41·33.** $\vdash . \mathrm{Cnv}``\dot{s}``\kappa = \dot{s}``\mathrm{Cnv}```\kappa$ [*41·31 . *37·354]

***41·34.** $\vdash . \dot{s}`\alpha \restriction ``\lambda = \alpha \restriction \dot{s}`\lambda$

Dem.

$\vdash . *41·11 . *38·13 . *13·195 . \supset \vdash :. x (\dot{s}`\alpha \restriction ``\lambda) y . \equiv : (\exists P) . P \in \lambda . x (\alpha \restriction P) y :$
[*35·1] $\equiv : (\exists P) . P \in \lambda . x \in \alpha . xPy :$
[*10·35] $\equiv : x \in \alpha : (\exists P) . P \in \lambda . xPy :$
[*41·11.*35·1] $\equiv : x (\alpha \restriction \dot{s}`\lambda) y :. \supset \vdash .$ Prop

***41·341.** $\vdash . \dot{s}` \lceil \alpha ``\lambda = (\dot{s}`\lambda) \lceil \alpha$ [Prueba como en a *41·34]

***41·342.** $\vdash . \dot{s}` \lfloor \alpha ``\lambda = (\dot{s}`\lambda) \lfloor \alpha$

Dem.

$\vdash . *36·11 . *35·21 . \supset \vdash . \dot{s}` \lfloor \alpha ``\lambda = \dot{s}`\alpha \restriction `` \lceil \alpha ``\lambda$
[*41·34] $= \alpha \restriction (\dot{s}` \lceil \alpha ``\lambda)$
[*41·341] $= \alpha \restriction (\dot{s}`\lambda) \lceil \alpha$
[*36·11] $= (\dot{s}`\lambda) \lfloor \alpha . \supset \vdash .$ Prop

La siguiente proposición se usa en la *85·22.

***41·35.** $\vdash . \dot{s}`M \restriction ``\kappa = M \restriction s`\kappa$

Dem.

$\vdash . *41·11 . *38·13 . \supset \vdash : x (\dot{s}`M \restriction ``\kappa) y . \equiv . (\exists \alpha) . \alpha \in \kappa . x (M \restriction \alpha) y .$
[*35·101] $\equiv . (\exists \alpha) . \alpha \in \kappa . y \in \alpha . xMy .$
[*40·11.*35·101] $\equiv . x (M \restriction s`\kappa) y : \supset \vdash .$ Prop

***41·351.** $\vdash . \dot{s}`\restriction M``\kappa = (s`\kappa) \restriction M$ [Prueba como en la *41·35]

***41·4.** $\vdash . \mathrm{D}`\dot{p}`\lambda \subset p`\mathrm{D}``\lambda$

Dem.

$\vdash . *33·13 . \supset$
$\vdash :: x \in \mathrm{D}`\dot{p}`\lambda . \equiv :. (\exists y) . x (\dot{p}`\lambda) y :.$
[*41·1] $\equiv :. (\exists y) : R \in \lambda . \supset_R . xRy :.$
[*11·61] $\supset :. R \in \lambda . \supset_R . (\exists y) . xRy :.$
[*33·13] $\supset :. R \in \lambda . \supset_R . x \in \mathrm{D}`R :.$
[*40·41.*33·12] $\supset :. x \in p`\mathrm{D}``\lambda :: \supset \vdash .$ Prop

***41·41.** $\vdash . \mathrm{C}`\dot{p}`\lambda \subset p`\mathrm{C}``\lambda$ [Prueba como en la *41·4]

***41·42.** $\vdash . C`\dot{p}`\lambda \subset p`C``\lambda$

Dem.

$\vdash . *33·132 . \supset \vdash :: . x \in C`\dot{p}`\lambda . \equiv :: (\exists y) : x (\dot{p}`\lambda) y . \vee . y (\dot{p}`\lambda) x ::$
[*41·1] $\equiv :: (\exists y) :: R \in \lambda . \supset_R . xRy : \vee : R \in \lambda . \supset_R . yRx ::$
[*10·41·221] $\supset :: (\exists y) :: (R) :. R \in \lambda . \supset . xRy : \vee : R \in \lambda . \supset . yRx ::$
[*4·78] $\supset :: (\exists y) :: (R) :. R \in \lambda . \supset : xRy . \vee . yRx ::$
[*11·61] $\supset :: (R) :: R \in \lambda . \supset : (\exists y) : xRy . \vee . yRx :$
[*33·132] $\supset : x \in C`R ::$
[*40·41.*33·122] $\supset :: x \in p`C``\lambda ::. \supset \vdash .$ Prop

***41·43.** $\vdash . \mathrm{D}`\dot{s}`\lambda = s`\mathrm{D}``\lambda$

Dem.

$\vdash . *33·13 . \supset \vdash :. x \in \mathrm{D}`\dot{s}`\lambda . \equiv : (\exists y) . x (\dot{s}`\lambda) y :$
[*41·11] $\equiv : (\exists y) : (\exists R) . R \in \lambda . xRy :$
[*11·23·55] $\equiv : (\exists R) : R \in \lambda : (\exists y) . xRy :$
[*33·13] $\equiv : (\exists R) . R \in \lambda . x \in \mathrm{D}`R :$
[*40·4.*33·12] $\equiv : x \in s`\mathrm{D}``\lambda :. \supset \vdash .$ Prop

***41·44.** $\vdash . \mathrm{C}`\dot{s}`\lambda = s`\mathrm{C}``\lambda$ [Prueba como en la *41·43]

***41·45.** $\vdash . C`\dot{s}`\lambda = s`C``\lambda$

Dem.

$\vdash . *33·16 . \supset \vdash . C`\dot{s}`\lambda = \mathrm{D}`\dot{s}`\lambda \cup \mathrm{C}`\dot{s}`\lambda$
[*41·43·44] $= s`\mathrm{D}``\lambda \cup s`\mathrm{C}``\lambda$
[*40·57] $= s`C``\lambda . \supset \vdash .$ Prop

***41·5.** $\vdash . \dot{p}`\lambda \mid \dot{p}`\mu \subseteq \dot{p}`s`\lambda_{,,}``\mu$

Dem.

$\vdash .$ *34·1 . $\supset$

$\vdash :: x\,(\dot{p}`\lambda \mid \dot{p}`\mu)\,z . \equiv :. (\exists y) . x\,(\dot{p}`\lambda)\,y . y\,(\dot{p}`\mu)\,z :.$

[*41·1] $\equiv :. (\exists y) :. P \in \lambda . \supset_P . xPy : Q \in \mu . \supset_Q . yQz :.$

[*11·56] $\equiv :. (\exists y) :. (P, Q) : P \in \lambda . \supset . xPy : Q \in \mu . \supset . yQz :.$

[*11·37·39] $\supset :. (\exists y) :. (P, Q) : P \in \lambda . Q \in \mu . \supset . xPy . yQz :.$

[*11·61] $\supset :. (P, Q) :. P \in \lambda . Q \in \mu . \supset . (\exists y) . xPy . yQz .$

[*34·1] $\supset . x\,(P \mid Q)\,z :.$

[*13·191] $\supset :. (P, Q, R) :. P \in \lambda . Q \in \mu . R = P \mid Q . \supset . xRz :.$

[*11·21·35] $\supset :. (R) : (\exists P, Q) . P \in \lambda . Q \in \mu . R = P \mid Q . \supset . xRz :$

[*40·7] $\supset :. (R) : R \in \dot{s}`\lambda_{,,}|``\mu . \supset . xRz :.$

[*41·1] $\supset :. x\,(\dot{p}`\dot{s}`\lambda_{,,}|``\mu)\,z :: \supset \vdash .$ Prop

***41·51.** $\vdash . \dot{s}`\lambda \mid \dot{s}`\mu = \dot{s}`\dot{s}`\lambda_{,,}|``\mu$

Dem.

$\vdash .$ *34·1 . $\supset$

$\vdash :: x\,(\dot{s}`\lambda \mid \dot{s}`\mu)\,z . \equiv :. (\exists y) . x\,(\dot{s}`\lambda)\,y . y\,(\dot{s}`\mu)\,z :.$

[*41·11] $\equiv :. (\exists y) :. (\exists P) . P \in \lambda . xPy : (\exists Q) . Q \in \mu . yQz :.$

[*11·54] $\equiv :. (\exists y) :. (\exists P, Q) : P \in \lambda . xPy . Q \in \mu . yQz :.$

[*11·24·27] $\equiv :. (\exists P, Q) :. (\exists y) . P \in \lambda . xPy . Q \in \mu . yQz :.$

[*10·35] $\equiv :. (\exists P, Q) :. P \in \lambda . Q \in \mu : (\exists y) . xPy . yQz :.$

[*34·1] $\equiv :. (\exists P, Q) : P \in \lambda . Q \in \mu . x\,(P \mid Q)\,z :.$

[*13·195] $\equiv :. (\exists P, Q, R) . P \in \lambda . Q \in \mu . R = P \mid Q . xRz :.$

[*11·24.*40·7] $\equiv :. (\exists R) . R \in \dot{s}`\lambda_{,,}|``\mu . xRz :.$

[*41·11] $\equiv :. x\,(\dot{s}`\dot{s}`\lambda_{,,}|``\mu)\,z :: \supset \vdash .$ Prop

La última proposición, que se usa en la *92·31, expresa que, si λ y μ son clases de relaciones, el producto relativo de la suma relacional de λ y la suma relacional de μ es la suma relacional de todos los productos relativos formados por un miembro de λ y un miembro de μ.

La siguiente proposición se usa en la *96·111.

***41·52.** $\vdash :. \alpha \restriction \dot{s}`\lambda \subseteq Q . \equiv : P \in \lambda . \supset_P . \alpha \restriction P \subseteq Q$

Dem.

$\vdash .$ *35·1 . *41·11 . $\supset$

$\vdash :: \alpha \restriction \dot{s}`\lambda \subseteq Q . \equiv :. x \in \alpha : (\exists P) . P \in \lambda . xPy : \supset_{x,y} . xQy :.$

[*10·35·23] $\equiv :. x \in \alpha . P \in \lambda . xPy . \supset_{P,x,y} . xQy :.$

[*35·1] $\equiv :. P \in \lambda . x\,(\alpha \restriction P)\,y . \supset_{P,x,y} . xQy :.$

[*11·62] $\equiv :. P \in \lambda . \supset_P . \alpha \restriction P \subseteq Q :: \supset \vdash .$ Prop

La siguiente proposición se usa en la *162·32 y en la *166·461.

***41·6.** $\vdash :. y \in \beta . \supset_y . P`y = Q`y \cup R`y : \supset . \dot{s}`P``\beta = \dot{s}`Q``\beta \cup \dot{s}`R``\beta$

Dem.

$\vdash . *37{\cdot}6 . *14{\cdot}21 . *41{\cdot}11 . *13{\cdot}195 . \supset$

$\vdash :: \mathrm{Hp} . \supset :. u\,(\acute{s}`P``\beta)\,v . \equiv : (\exists y) . y \in \beta . u\,(P`y)\,v :$

[Hp] $\equiv : (\exists y) . y \in \beta . u\,(Q`y \cup R`y)\,v :$

[*23·34.*10·42] $\equiv : (\exists y) . y \in \beta . u\,(Q`y)\,v . \vee . (\exists y) . y \in \beta . u\,(R`y)\,v :$

[*37·6.*41·11] $\equiv : u\,(\acute{s}`Q``\beta)\,v . \vee . u\,(\acute{s}`R``\beta)\,v :: \supset \vdash .$ Prop

*42. MISCELANEA DE PROPOSICIONES

Sumario del *42.

Este número contiene varias proposiciones relativas a productos y sumas de clases. Ellas se ocupan principalmente de clases de clases de clases o de relaciones de relaciones de relaciones. Estas se necesitan, respectivamente, en la aritmética cardinal y en la ordinal. Así, la proposición *42·1 se usa en los números *112 y *113, que se relacionan con la suma y multiplicación de números cardinales, mientras que las *42·12·2 se usan en los números *160 y *162, que son los que versan sobre la suma ordinal. La *42·22, aunque explícitamente no hay referencia a ella, es útil por cuanto facilita la comprensión de proposiciones sobre series de series de series, o mejor sobre relaciones entre relaciones entre relaciones, los cuales son necesarios en conexión con la ley asociativa de la multiplicación en la relación aritmética.

***42·1.** $\vdash . s`s``\kappa = s`s`\kappa$

Para que tenga significación, aquí κ debe ser una clase de clases de clases. La proposición expresa que, si tomamos cada miembro α, de κ, y formamos $s`\alpha$, y entonces formamos la suma de todas las clases así obtenidas, el resultado es el mismo que si formamos la suma de la suma de κ. Esta es la ley asociativa para s y es (como aparecerá más adelante) la fuente de la ley asociativa de la adición en la aritmética cardinal. La manera cómo esta proposición viene a ser la ley asociativa para s puede verse como sigue: Supongamos que κ se compone de dos clases, α y β; supongamos que, a su vez, α se compone de otras dos, ξ y η, y β de otras dos clases ξ' y η'. Entonces $s`\alpha = \xi \cup \eta \,.\, s`\beta = \xi' \cup \eta'$. (Esto se probará más adelante). De este modo $s``\kappa$ tiene dos miembros, uno de los cuales es $\xi \cup \eta$, mientras que el otro es $\xi' \cup \eta'$. Así, pues,

$$s`s``\kappa = (\xi \cup \eta) \cup (\xi' \cup \eta').$$

Pero $s`\kappa$ tiene cuatro miembros, a saber $\xi$, $\eta$, $\xi'$, $\eta'$. De este modo $s`s`\kappa = \xi \cup \eta \cup \xi' \cup \eta'$. Por lo tanto, nuestra proposición lleva a

$$(\xi \cup \eta) \cup (\xi' \cup \eta') = \xi \cup \eta \cup \xi' \cup \eta',$$

que, obviamente, es un caso de la ley asociativa.

Nuestra proposición expresa la ley asociativa, en modo general, incluyendo el caso en el que el número de paréntesis, o de sumandos en cualquier paréntesis, sea infinito.

La prueba es como sigue

Dem.

$$\vdash . *40·4 . \supset \vdash :: x \in s`s``\kappa . \equiv :. (\exists \alpha) . \alpha \in \kappa . x \in s`\alpha :.$$

$$[*40{\cdot}11] \qquad \equiv :. (\exists \alpha) : \alpha \in \kappa : (\exists \xi) . \xi \in \alpha . x \in \xi :.$$
$$[*11{\cdot}6] \qquad \equiv :. (\exists \xi) :. (\exists \alpha) . \alpha \in \kappa . \xi \in \alpha : x \in \xi :.$$
$$[*40{\cdot}11] \qquad \equiv :. (\exists \xi) . \xi \in s`\kappa . x \in \xi :.$$
$$[*40{\cdot}11] \qquad \equiv :. x \in s`s`\kappa :: \supset \vdash . \text{Prop}$$

***42·11.** $\vdash . p`p``\kappa = p`s`\kappa$

Dem.

$$\vdash . *40{\cdot}41 . \supset \vdash :. x \in p`p``\kappa . \equiv : \beta \in \kappa . \supset_\beta . x \in p`\beta :$$
$$[*40{\cdot}1.*11{\cdot}62] \qquad \equiv : \beta \in \kappa . \gamma \in \beta . \supset_{\beta,\gamma} . x \in \gamma :$$
$$[*11{\cdot}2.*10{\cdot}23] \qquad \equiv : (\exists \beta) . \beta \in \kappa . \gamma \in \beta . \supset_\gamma . x \in \gamma :$$
$$[*40{\cdot}11] \qquad \equiv : \gamma \in s`\kappa . \supset_\gamma . x \in \gamma :$$
$$[*40{\cdot}1] \qquad \equiv : x \in p`s`\kappa :. \supset \vdash . \text{Prop}$$

Esta es la ley asociativa para productos. Suponiendo de nuevo, como ilustración, que κ se componga de dos clases α, β, mientras que α se componga de las dos clases ξ, η, y β de las dos ξ', η', entonces $p``\kappa$ se compone de las dos clases $\xi \cap \eta$ y $\xi' \cap \eta'$, de suerte que $p`p``\kappa = (\xi \cap \eta) \cap (\xi' \cap \eta')$, mientras que $p`s`\kappa = \xi \cap \eta \cap \xi' \cap \eta'$. De este modo, nuestra proposición viene a ser

$$(\xi \cap \eta) \cap (\xi' \cap \eta') = \xi \cap \eta \cap \xi' \cap \eta'.$$

Una función descriptiva $R`\kappa$ cuyos argumentos son clases o clases de clases puede decirse que obedece a la ley asoceativa ofrecida.

$$R`R``\kappa = R`s`\kappa.$$

Esta ecuación puede interpretarse del modo siguiente: dada una clase α, se divide en un número de clases subordinadas, de manera que ningún miembro quede fuera a la izquierda, aunque un miembro pueda pertenecer a dos o más clases. Hágase que las clases en las que se divide α compongan la clase κ, de forma que κ sea una clase de clases, y $s`\kappa = \alpha$. Entonces, la anterior ecuación afirma que si primero formamos la $R`$s de las varias subclases de α, y a continuación la R de la clase resultante, el resultado es el mismo que si, directamente, hubiésemos formado la R de α.

En algunos casos —por ejemplo, el mencionado de la suma aritmética de cardinales— la ecuación última vale sólo cuando dos miembros de κ no tienen un término común, es decir, cuando las partes en las que se divide α son mútuamente excluyentes.

Para una función descriptiva cuyos argumentos son relaciones de relaciones, encontraremos otra forma para la ley asociativa; esta forma juega en la aritmética ordinal un papel análogo al que desempeñaba la forma anterior en la aritmética cardinal.

***42·12.** $\vdash . \dot{s}`\dot{s}``\lambda = \dot{s}`s`\lambda$

Dem.

$$\vdash . *41{\cdot}11 . \supset \vdash : x (\dot{s}`\dot{s}``\lambda) y . \equiv . (\exists \mu) . \mu \in \lambda . x (\dot{s}`\mu) y .$$
$$[*41{\cdot}11] \qquad \equiv . (\exists \mu, P) . \mu \in \lambda . P \in \mu . xPy .$$
$$[*40{\cdot}11] \qquad \equiv . (\exists P) . P \in s`\lambda . xPy .$$
$$[*41{\cdot}11] \qquad \equiv . x (\dot{s}`s`\lambda) y : \supset \vdash . \text{Prop}$$

***42·13.** $\vdash . \dot{p}`\dot{p}``\lambda = \dot{p}`s`\lambda$

Dem.

$\vdash . *41{\cdot}1 . \supset \vdash :. x(\dot{p}`\dot{p}``\lambda)y . \equiv : \mu \in \lambda . \supset_{\mu} . x(\dot{p}`\mu)y :$

[*41·1] $\equiv : \mu \in \lambda . R \in \mu . \supset_{\mu, R} . xRy :$

[*11·2.*10·23] $\equiv : (\exists \mu) . \mu \in \lambda . R \in \mu . \supset_{R} . xRy :$

[*40·11] $\equiv : R \in s`\lambda . \supset_{R} . xRy :$

[*41·1] $\equiv : x(\dot{p}`s`\lambda)y :. \supset \vdash .$ Prop

***42·2.** $\vdash . C`\dot{s}`C`P = s``C``C`P = F``C`P = \overrightarrow{F^2}`P$

Esta proposición supone que P es una relación entre relaciones. Por ejemplo, supóngase que tenemos una serie de series, cuyas relaciones generatrices están ordenadas por la relación P. Entonces, $C`P$ es la clase de estas relaciones generatrices; $\dot{s}`C`P$ es la relación "una u otra de las relaciones generatrices que componen $C`P$", y $C`\dot{s}`C`P$ es la clase de todos los términos que intervienen en cualquiera de las series. $C``C`P$ es el campo de las diversas series, y $s`C``C`P$ representa de nuevo todos los términos que intervienen en cualquiera de las series. $F``C`P$ representa a todos los términos que pertenecen a los campos de las series que son miembros de $C`P$, y $\overrightarrow{F^2}`P$ representa a todos los miembros de los campos de los miembros del campo de P; cada uno de estos es, de nuevo, todos los términos que intervienen en una cualquiera de las series. La prueba es como sigue:

Dem.

$\vdash . *41{\cdot}45 . \supset \vdash . C`\dot{s}`C`P = s``C``C`P$ (1)

$\vdash . *40{\cdot}56 . \supset \vdash . s``C``C`P = F``C`P$ (2)

$\vdash . *33{\cdot}5 . \supset \vdash . F``C`P = F``\overrightarrow{F}`P$

[*37·38] $= \overrightarrow{F^2}`P$ (3)

$\vdash . (1) . (2) . (3) . \supset \vdash .$ Prop

Las proposiciones siguientes se aplican a una relación de relaciones de relaciones. Estas proposiciones son útiles para probar las leyes asociativas en aritmética ordinal, ya que estas leyes versan sobre series de series de series, y las series de series de series se constituyen simplemente suponiendo a las relaciones generatrices de las series constituyentes, ordenadas por relaciones, que se ordenan a sí mismas por una relación P.

***42·21.** $\vdash . s`C```C``C`P = C``s`C``C`P = C``C`\dot{s}`C`P = C``F``C`P = C``\overrightarrow{F^2}`P$

Dem.

$\vdash . *40{\cdot}38 . \supset \vdash . s`C```C``C`P = C``s`C``C`P$ (1)

$\vdash . (1) . *42{\cdot}2 . \supset \vdash .$ Prop

***42·22.** $\vdash . s`s`C```C``C`P = s`C``s`C``C`P = s`C``C`\dot{s}`C`P$

$= C`\dot{s}`C`\dot{s}`C`P = s`C``F``C`P$

$= F``F``C`P = F``\overrightarrow{F^2}`P = \overrightarrow{F^3}`P$

[*42·21 . *41·45 . *40·56 . *42·2 . *37·3]

Si P, en la última proposición, es una relación que genera una serie de series de series, dicha proposición produce varias formas para la clase de los últimos términos de estas series. Así, pues, supongamos $Q \in C`P$; entonces $Q$ es una relación entre relaciones generatrices de series. Si ahora $R \in C`Q$, R es la relación generatriz de una serie que podemos considerar como compuesta de individuales. La clase de los individuales así obtenidas puede expresarse en una de las formas últimas, tan bien como en otras que no se han ofrecido.

***42·3.** $\vdash . s`s``\overrightarrow{R}``\alpha = s`R``\alpha$

Dem.

$$\vdash . *42{\cdot}1 . \supset \vdash . s`s``\overrightarrow{R}``\alpha = s`s`\overrightarrow{R}``\alpha$$
$$[*40{\cdot}5] \qquad\qquad = s`R``\alpha . \supset \vdash . \text{Prop}$$

***42·31.** $\vdash . s`s``\overleftarrow{R}``\alpha = s`\breve{R}``\alpha$ [Prueba como en la *42·3]

*43. LAS RELACIONES DE UN PRODUCTO RELATIVO CON SUS FACTORES

Sumario del *43.

El objeto de este número es ofrecer ciertas proposiciones sobre la relación que existe entre P y Q siempre que $P = Q|R$, o $P = R|Q$, o $P = R|Q|S$, en donde R y S son fijas. En virtud de las definiciones generales del *38, estas relaciones son respectivamente $|R$, $R|$, y $(R|)|(S|)$. Tales relaciones son de gran utilidad tanto en la aritmética cardinal como en la ordinal; también se usan mucho en la teoría de la inducción (Parte II, Sección E). En lugar de la notación $(R|)|(|S)$ que resulta engorrosa, adoptamos la notación más breve $R\|S$. Si λ es una clase de relaciones, $R|``\lambda$ será la clase de relaciones $R|P$ donde $P \in \lambda$, $|R``\lambda$ será la clase de relaciones $P|R$, donde $P \in \lambda$; y $(R\|S)``\lambda$ será la clase de relaciones $R|P|S$, donde $P \in \lambda$. Estas clases de relaciones se necesitan frecuentemente en lo que sigue del trabajo.

En virtud de nuestras definiciones, tenemos

***43·112.** $\vdash . (R \| S)`Q = R | Q | S$

Las proposiciones más usadas en este número (excepto aquellas que simplemente incorporan definiciones) son las siguientes:

***43·302.** $\vdash . (P) . P \in \Cnv`(R \| S)$

***43·411.** $\vdash . \breve{R}``\Cnv``\lambda = \Cnv``| R``\lambda$

***43·421.** $\vdash . \dot{s}`| R``\lambda = (\dot{s}`\lambda) | R$

Las restantes proposiciones se usan rara vez; pero sus usos, cuando se emplean, son importantes.

***43·01.** $R \| S = (R|)|(|S)$ Df

En un paso posterior (en el *150) introduciremos una notación más sencilla para el caso especial de $R\|\breve{R}$. Las siguientes proposiciones son, en su mayoría, consecuencias inmediatas de las definciones y, por tanto, se omiten las pruebas.

***43·1.** $\vdash : P(R|)Q . \equiv . P = R|Q$

***43·101.** $\vdash : P(|R)Q . \equiv . P = Q|R$

***43·102.** $\vdash : P(R \| S)Q . \equiv . P = R|Q|S$

***43·11.** $\vdash . R|`Q = R|Q$

***43·111.** $\vdash . |R`Q = Q|R$

***43·112.** $\vdash . (R \| S)`Q = R|Q|S$

***43·12.** $\vdash . E ! R|`Q$

***43·121.** $\vdash . E ! |R`Q$

$*43{\cdot}122.\ \vdash . \mathrm{E}!(R \parallel S)`Q$

$*43{\cdot}2.\ \vdash . (R|)|(S|) = (R|S)|$

Dem.

$\vdash . *43{\cdot}1 . \supset \vdash : L \{(R|)|(S|)\} N . \equiv . (\exists M) . L = R|M . M = S|N .$

[$*13{\cdot}195.*34{\cdot}21$] $\equiv . L = R|S|N .$

[$*43{\cdot}1$] $\equiv . L \{(R|S)|\} N : \supset \vdash .$ Prop

$*43{\cdot}201.\ \vdash . (|R)|(|S) = |(S|R)$ [Prueba como en la $*43{\cdot}2$]

$*43{\cdot}202.\ \vdash . (|R)|(S|) = (S|)|(|R) = S \parallel R$ [Prueba como en la $*43{\cdot}2$]

$*43{\cdot}21.\ \vdash . (P \parallel Q)|(R|) = (P|R) \parallel Q$

$*43{\cdot}211.\ \vdash . (R|)|(P \parallel Q) = (R|P) \parallel Q$

$*43{\cdot}212.\ \vdash . (P \parallel Q)|(|R) = P \parallel (R|Q)$

$*43{\cdot}213.\ \vdash . (|R)|(P \parallel Q) = P \parallel (Q|R)$

$*43{\cdot}22.\ \vdash . (P \parallel Q)|(R \parallel S) = (P|R) \parallel (S|Q)$

$*43{\cdot}3.\ \vdash . (P) . P \in \mathrm{Cl}`R|$ [$*43{\cdot}12 . *33{\cdot}43$]

$*43{\cdot}301.\ \vdash . (P) . P \in \mathrm{Cl}`|R$

$*43{\cdot}302.\ \vdash . (P) . P \in \mathrm{Cl}`(R \parallel S)$

$*43{\cdot}31.\ \vdash . P \restriction \mathrm{Cl}`R| = P \restriction C`R| = P$

Dem.

$\vdash . *43{\cdot}12 . *33{\cdot}431 . \supset \vdash . \mathrm{Cl}`P \subset \mathrm{Cl}`R|$ (1)

[$*33{\cdot}161$] $\supset \vdash . \mathrm{Cl}`P \subset C`R|$ (2)

$\vdash . (1) . (2) . *35{\cdot}452 . \supset \vdash .$ Prop

$*43{\cdot}311.\ \vdash . P \restriction \mathrm{Cl}`|R = P \restriction C`|R = P$

$*43{\cdot}312.\ \vdash . P \restriction \mathrm{Cl}`(R \parallel S) = P \restriction C`(R \parallel S) = P$

$*43{\cdot}34.\ \vdash . R|`R = |R`R = R^2$ [$*43{\cdot}11{\cdot}111$]

$*43{\cdot}4.\ \vdash . R``\mathrm{D}`P = \mathrm{D}`R|`P$ [$*37{\cdot}32 . *43{\cdot}1$]

$*43{\cdot}401.\ \vdash . \breve{R}``\mathrm{Cl}`P = \mathrm{Cl}`|R`P$ [$*37{\cdot}32 . *43{\cdot}101$]

$*43{\cdot}41.\ \vdash . R```\mathrm{D}``\lambda = \mathrm{D}``R|``\lambda$ [$*43{\cdot}4 . *37{\cdot}355$]

$*43{\cdot}411.\ \vdash . \breve{R}```\mathrm{Cl}``\lambda = \mathrm{Cl}``|R``\lambda$ [$*43{\cdot}401 . *37{\cdot}355$]

$*43{\cdot}42.\ \vdash . \dot{s}`R|``\lambda = R|\dot{s}`\lambda$

Dem.

$\vdash . *41{\cdot}11 . *37{\cdot}1 . *43{\cdot}1 . \supset$

$\vdash :. x (\dot{s}`R|``\lambda) z . \equiv : (\exists T) . T \in \lambda . x (R|T) z :$

[$*34{\cdot}1$] $\equiv : (\exists T) : T \in \lambda : (\exists y) . xRy . yTz :$

[$*11{\cdot}6$] $\equiv : (\exists y) : xRy : (\exists T) . T \in \lambda . yTz :$

[$*41{\cdot}11 . *34{\cdot}1$] $\equiv : x (R|\dot{s}`\lambda) z :. \supset \vdash .$ Prop

$*43{\cdot}421.\ \vdash . \dot{s}`|R``\lambda = (\dot{s}`\lambda)|R$ [Prueba como en la $*43{\cdot}42$]

$*43{\cdot}43.\ \vdash . \dot{s}`(R \parallel S)``\lambda = (R \parallel S)`\dot{s}`\lambda$

Dem.

$$\vdash .*37{\cdot}33 . \supset \vdash . \dot{s}`(R \| S)``\lambda = \dot{s}`R \mid `` \mid S``\lambda$$
$$[*43{\cdot}42] \qquad = R \mid (\dot{s}` \mid S``\lambda)$$
$$[*43{\cdot}421] \qquad = R \mid \dot{s}`\lambda \restriction S$$
$$[*43{\cdot}112] \qquad = (R \| S)`\dot{s}`\lambda . \supset \vdash . \text{Prop}$$

***43·48.** $\vdash : \mathrm{D}`P \subset \alpha . \supset . Q \mid `P = (Q \restriction \alpha) \mid `P$ [*35·481]

***43·481.** $\vdash : \mathrm{C}`P \subset \beta . \supset . \mid R`P = \mid (\beta \upharpoonright R)`P$ [*35·48]

***43·49.** $\vdash : s`\mathrm{D}``\lambda \subset \alpha . \supset . (Q \mid) \restriction \lambda = \{(Q \restriction \alpha) \mid \} \restriction \lambda$

Dem.

$$\vdash .*40{\cdot}43 . \supset \vdash :. \mathrm{Hp} . \supset : P \in \lambda . \supset . \mathrm{D}`P \subset \alpha .$$
$$[*43{\cdot}48] \qquad \supset . Q \mid `P = \{(Q \restriction \alpha) \mid \}`P \qquad (1)$$
$$\vdash .(1) .*35{\cdot}71 . \supset \vdash . \text{Prop}$$

***43·491.** $\vdash : s`\mathrm{C}``\lambda \subset \beta . \supset . (\mid R) \restriction \lambda = \{\mid (\beta \upharpoonright R)\} \restriction \lambda$ [Prueba como en la *43·49]

***43·5.** $\vdash : \mathrm{D}`P \subset \alpha . \mathrm{C}`P \subset \beta . \supset . (Q \| R)`P = \{(Q \restriction \alpha) \| (\beta \upharpoonright R)\}`P$
[*35·48·481 . *43·112]

***43·51.** $\vdash : s`\mathrm{D}``\lambda \subset \alpha . s`\mathrm{C}``\lambda \subset \beta . \supset . (Q \| R) \restriction \lambda = \{(Q \restriction \alpha) \| (\beta \upharpoonright R)\} \restriction \lambda$

Dem.

$$\vdash .*40{\cdot}43 . \supset \vdash :. \mathrm{Hp} . \supset : P \in \lambda . \supset . \mathrm{D}`P \subset \alpha . \mathrm{C}`P \subset \beta .$$
$$[*43{\cdot}5] \qquad \supset . (Q \| R)`P = \{(Q \restriction \alpha) \| (\beta \upharpoonright R)\}`P \qquad (1)$$
$$\vdash .(1) .*35{\cdot}71 . \supset \vdash . \text{Prop}$$

La última proposición se usa en la prueba de la *74·773.

PARTE II

PROLEGOMENOS AL CARDINAL ARITMETICO

SUMARIO DE LA PARTE II, SECCION A

Las cuestiones a estudiar en esta Parte no difieren apenas de las estudiadas en la Parte I. La diferencia es tan sólo de grado; las cuestiones que se tratan en esta parte son, en cierto modo, de menos importancia general que las de la Parte I, y se estudian más bien a causa de sus incidencias sobre la aritmética cardinal que por sí mismas. Aunque la aritmética cardinal es la meta que determina nuestra marcha en la Parte II, se verá que todas las cuestiones estudiadas también son requeridas en la aritmética ordinal y en la teoría de series.

La Sección A de esta Parte trata de las clases unitarias y de los pares. Una clase *unitaria* es la clase de los términos idénticos a un término dado, esto es, la clase cuyo único miembro es el término dado. (Según se explicó en la Introducción, Cap. III, pp. 135 a 138, la clase cuyo único miembro es x no es idéntico a x), definimos el 1 como la clase de todas las clases unitarias. De igual manera, definimos un par (cardinal y ordinal), y luego definimos el 2 como la clase de todos los pares.

SECCION A

CLASES UNITARIAS Y PARES

Sumario de la Sección A.

En esta sección comenzamos (*50) introduciendo una notación para la *relación* de identidad frente a la *función* "$x = y$"; es decir, llamando I a la relación de identidad, escribimos

$$I = \hat{x}\hat{y}\,(x = y) \quad \text{Df.}$$

El objeto de esta definición es principalmente una conveniencia de notación. La definición nos permite hablar de $\overrightarrow{I}$, D'I, $I|R$, $\alpha\,1\,I$, I"α, etc., que de otra forma no podría hacerse.

Al propio tiempo introducimos la *diversidad,* que se define como la negación de la identidad, y se simboliza por la letra J. Las propiedades de I y de J resultan inmediatamente del *13, dado que

$$xIy\,.\equiv.\,x = y.$$

Seguidamente, introducimos una notación muy importante, debida a Peano, para las clases cuyo único miembro sea x. Si tomamos un punto de vista estricto y puramente extensional de las clases, deberíamos naturalmente suponer a esta clase idéntica a x. Pero en vista de la teoría de clases explicada en el *20, es evidente que x nunca puede ser idéntico a la clase de la que ella es un miembro, aun cuando sea el único miembro de esa clase. Peano usa la notación "ιx" para la clase cuyo único miembro sea x; la cambiaremos por "ι'x", siguiendo nuestra notación general para las funciones descriptivas. De esta forma tenemos

$$\iota\text{'}x = \hat{y}\,(y = x) = \hat{y}\,(yIx) = \overrightarrow{I}\text{'}x.$$

Por tanto, como definición nuestra, adoptamos

$$\iota = \overrightarrow{I} \quad \text{Df,}$$

ya que esta definición da el deseado valor de ι'x. Las propiedades de ι son muchas e importantes.

Es importante observar que "$\check{\iota}$'α" significa "el único miembro de α". Así, pues, el tal existe cuando, y sólo cuando, α tiene un miembro y no más, en cuyo caso α es de la forma ι'x, si x es su único miembro. Así, "$\check{\iota}$'α" significa lo mismo que "$(\exists x)\,(x \in \alpha)$" y "$\check{\iota}$'$\hat{z}\,(\phi z)$" significa lo mismo que "$(\exists x)\,(\phi x)$". Lo que llamamos "$\check{\iota}$'α" se simboliza, empleando la notación de Peano, por "$\exists\alpha$".

Las clases de la forma ι'x se llaman *clases unitarias,* y la clase de dichas clases se llama el 1. Este es el número cardinal 1, de acuerdo con la definición de números

cardinales que se dará en el *100. Las propiedades del 1, en tanto que no dependen de otros números cardinales, o del hecho de que el 1 es un cardinal, se estudiarán en el *52.

Después de un número (*53) que contiene varias proposiciones que implican al 1 o ι, pasamos a la consideración de los pares cardinales (*54) y pares ordinales (*55). Un par cardinal es una clase $\iota`x \cup \iota`y$ en donde $x \neq y$. La clase de tales pares se define como el 2, y se mostrará en una etapa posterior (*101) que es un número cardinal. Un par ordinal que, a diferencia del par cardinal, incorpora un orden entre sus miembros se define como una relación $\iota`x \uparrow \iota`y$ (cf. la *35·04), donde podemos añadir, o no, $x \neq y$. Las propiedades de los pares ordinales son, en parte, análogas a las de las clases unitarias y, en parte, a las de los pares cardinales. En el *56 definimos el número ordinal 2 (que simbolizamos por 2_r para distinguirlo de el cardinal 2) como la clase de todos los pares ordinales $\iota`x \uparrow \iota`y$, en donde $x \neq y$. Se mostrará más adelante que éste es un número ordinal, de acuerdo con nuestra definición de números ordinales (*153 y *251).

*50. LA IDENTIDAD Y LA DIVERSIDAD COMO RELACIONES

Sumario del *50.

El objeto de este número es primordialmente notacional. Por razones de notación, debemos estar capacitados para expresar la identidad y la diversidad como relaciones, y no meramente como funciones proposicionales; esto es, necesitamos una notación para $\hat{x}\hat{y}\,(x=y)$ y para $\hat{x}\hat{y}\,(x\neq y)$. Por lo tanto, proponemos

$$I=\hat{x}\hat{y}\,(x=y) \quad \text{Df,}$$
$$J=\dot{-}\,I \quad \text{Df.}$$

A pesar del hecho de que la diversidad es simplemente la negación de la identidad, los tipos de proposiciones que emplean la diversidad son completamente diferentes de los tipos que emplean la identidad. La identidad como relación se necesita, para comenzar, en la teoría de las clases unitarias, que es lo que nos ha llevado a tratar de ellas aquí. Más adelante se requiere de una manera constante en la teoría de la inducción matemática (Parte II, Sección E). Se requiere también para mostrar que el cardinal y ordinal son reflexivos de manera semejante. Estos son sus principales usos.

Por otra parte, se precisa –de diversas formas– casi exclusivamente en la teoría de series (Parte V), y en el primer capítulo en que la teoría se dedicará a la diversidad. Hasta que llegue esa etapa, rara vez se hará alusión a la diversidad, con una excepción importante, a saber, al probar la ley asociativa de la multiplicación en la relación aritmética (*174).

Las proposiciones más importantes sobre la identidad en este número son las siguientes:

***50·16.** $\vdash .\ I``\alpha=\alpha$

***50·4.** $\vdash .\ R\mid I=I\mid R=R$

***50·5.** $\vdash .\ \alpha\restriction I=I\upharpoonright\alpha=\alpha\restriction I\upharpoonright\alpha$

***50·51.** $\vdash .\ \mathrm{Cnv}`(\alpha\restriction I)=\alpha\restriction I$

***50·52.** $\vdash .\ \mathrm{D}`(\alpha\restriction I)=\mathrm{C}`(\alpha\restriction I)=C`(\alpha\restriction I)=\alpha$

***50·62.** $\vdash :\mathrm{C}`R\subset\alpha .\supset .\ R\mid(I\upharpoonright\alpha)=R$

***50·63.** $\vdash :\mathrm{D}`R\subset\alpha .\supset .\ I\upharpoonright\alpha\mid R=R$

Las más importantes proposiciones sobre la diversidad en este número son las siguientes:

***50·23.** $\vdash :R\subseteq J .\equiv .\ \breve{R}\subseteq J$

***50·24.** $\vdash :R\subseteq J .\equiv .(x).\sim(xRx)$

***50·43.** $\vdash :R^2\subseteq J .\equiv .\ R\dot{\cap}\breve{R}=\dot{\Lambda}$

*50·45. $\vdash : R^2 \subset J . \supset . R \subset J$

*50·47. $\vdash :. R^2 \subset R . \supset : R \subset J . \equiv . R^2 \subset J . \equiv . R \cap \breve{R} = \dot{\Lambda}$

Se observará que todas estas proposiciones se refieren a $R \subset J$ o $R^2 \subset J$, las cuales se satisfacen si R es una relación *serial*. La hipótesis $R^2 \subset J$ o $R \cap \breve{R} = \dot{\Lambda}$ caracteriza una relación *asimétrica*, esto es, una que, si tiene validez entre x e y, no puede tenerla entre y y x.

---

*50·01. $I = \hat{x}\hat{y}(x = y)$ Df

*50·02. $J = \dot{-} I$ Df

Muchas de las proposiciones de este número son evidentes y no precisan ningún comentario.

*50·1. $\vdash : xIy . \equiv . x = y$ [*21·3 . (*50·01)]

*50·11. $\vdash : xJy . \equiv . x \neq y$ [*23·35 . *50·1 . (*50·02)]

*50·12. $\vdash . J = \hat{x}\hat{y}(x \neq y)$ [*50·11 . *21·33]

*50·13. $\vdash . \dot{\exists} ! I$ [*13·19 . *10·24·281 . *50·1]

*50·14. $\vdash . I`y = y$ [*30·3 . *50·1 . *10·11]

*50·15. $\vdash . (y) . \mathrm{E} ! I`y$ [*50·14 . *14·21 . *10·11]

*50·16. $\vdash . I``\alpha = \alpha$

Dem.

$\vdash . *37·1 . \supset \vdash : x \in I``\alpha . \equiv . (\exists y) . y \in \alpha . xIy .$
[*50·1] $\equiv . (\exists y) . y \in \alpha . x = y .$
[*13·195] $\equiv . x \in \alpha : \supset \vdash .$ Prop

*50·17. $\vdash :. x \in \alpha . \supset_x . R`x = x : \supset . R``\alpha = \alpha$

Dem.

$\vdash . *14·21 . \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \supset . \mathrm{E} !! R``\alpha$ (1)
$\vdash . *50·14 . \supset \vdash :. \mathrm{Hp} . \supset : x \in \alpha . \supset_x . R`x = I`x :$
[*37·69.(1)] $\supset : R``\alpha = I``\alpha :$
[*50·16] $\supset : R``\alpha = \alpha :. \supset \vdash .$ Prop

*50·2. $\vdash . I = \breve{I}$

Dem.

$\vdash . *50·1 . \supset \vdash : xIy . \equiv . x = y .$
[*13·16] $\equiv . y = x .$
[*50·1] $\equiv . yIx .$
[*31·11] $\equiv . x\breve{I}y : \supset \vdash .$ Prop

*50·21. $\vdash . J = \breve{J}$

Dem.

$\vdash . *21·2 . (*50·02) . \supset \vdash . J = \dot{-} I$ (1)
[*50·2.*23·83] $= \dot{-} \breve{I}$
[*31·16] $= \mathrm{Cnv}` \dot{-} I$

$$[(1).*31{\cdot}32] \qquad = \breve{J} . \supset \vdash . \text{Prop}$$

***50·22.** $\vdash : R \subseteq I . \equiv . \breve{R} \subseteq I \quad [*31{\cdot}4 . *50{\cdot}2]$

***50·23.** $\vdash : R \subseteq J . \equiv . \breve{R} \subseteq J \quad [*31{\cdot}4 . *50{\cdot}21]$

***50·24.** $\vdash : R \subseteq J . \equiv . (x) . \sim (xRx)$

Dem.

$$\begin{aligned}
&\vdash . *50{\cdot}11 . \supset \vdash :. R \subseteq J . \equiv : xRy . \supset_{x,y} . x \neq y : \\
&[\text{Transp}] \qquad \equiv : x = y . \supset_{x,y} . \sim (xRy) : \\
&[*13{\cdot}191] \qquad \equiv : (x) . \sim (xRx) :. \supset \vdash . \text{Prop}
\end{aligned}$$

***50·3.** $\vdash . (x) . xIx \quad [*50{\cdot}1 . *13{\cdot}15]$

***50·31.** $\vdash . \mathrm{D}`I = \mathrm{V} . \mathrm{C}`I = \mathrm{V}$

Dem.

$$\begin{aligned}
&\vdash . *50{\cdot}3 . *10{\cdot}24 . \supset \vdash :. (x) : (\exists y) . xIy :. (x) : (\exists y) . yIx :. \\
&[*33{\cdot}13{\cdot}131] \qquad \supset \vdash : (x) . x \in \mathrm{D}`I : (x) . x \in \mathrm{C}`I : \\
&[*24{\cdot}14] \qquad \supset \vdash . \mathrm{D}`I = \mathrm{V} . \mathrm{C}`I = \mathrm{V} . \supset \vdash . \text{Prop}
\end{aligned}$$

***50·32.** $\vdash . C`I = \mathrm{V} \quad [*50{\cdot}31 . *33{\cdot}16 . *24{\cdot}27]$

***50·33.** $\vdash : \dot{\exists} ! J . \supset . \mathrm{D}`J = \mathrm{V} . \mathrm{C}`J = \mathrm{V} . C`J = \mathrm{V}$

Dem.

$$\begin{aligned}
&\vdash . *13{\cdot}171 . \text{Transp} . \supset \vdash :. y \neq z . \supset : x \neq y . \vee . x \neq z :. \\
&[*50{\cdot}11] \qquad \supset \vdash :. yJz . \supset : xJy . \vee . xJz : \\
&[*33{\cdot}14] \qquad \supset : x \in \mathrm{D}`J \qquad (1) \\
&\vdash . (1) . *11{\cdot}11{\cdot}35 . \quad \supset \vdash : \dot{\exists} ! J . \supset . x \in \mathrm{D}`J : \\
&[*10{\cdot}11{\cdot}21] \qquad \supset \vdash : \dot{\exists} ! J . \supset . (x) . x \in \mathrm{D}`J . \\
&[*24{\cdot}14] \qquad \supset . \mathrm{D}`J = \mathrm{V} \qquad (2) \\
&\vdash . (2) . *50{\cdot}21 . \supset \vdash . \text{Prop}
\end{aligned}$$

En la última proposición (*50·33), la hipótesis $\dot{\exists} ! J$ es equivalente a la hipótesis de que existe más de un objeto del tipo en cuestión. Esto puede probarse para todos los tipos excepto para el más bajo. Para el tipo más bajo sólo podemos probar la existencia de por lo menos un objeto: esto se prueba en la *24·52. Para el tipo siguiente, podemos probar la existencia de por lo menos dos objetos, a saber Λ y V; estos, por la *24·1, son diferentes. Para el tipo siguiente, podemos probar la existencia de 2^2 objetos; para el siguiente, 2^4, etc. Pero para las clases de individuales no podemos probar, desde nuestras proposiciones primitivas, que haya más de un objeto en el universo y, por lo tanto, no podemos probar $\dot{\exists} ! J$. Desde luego, pudimos haber incluido entre nuestras proposiciones primitivas el supuesto de que existe más de un individual, o algún supuesto desde el que resultase esto, tal como

$$(\exists \phi, x, y) . \phi ! x . \sim \phi ! y.$$

Pero muy pocas de las proposiciones que pudimos desear probar se apoyan en este supuesto y, por lo tanto, hemos de excluirlo. Debe observarse que muchos filósofos monistas niegan este supuesto.

***50·34.** $\vdash . \dot{\exists} ! J \upharpoonright \mathrm{Cls}$

Dem.

$\vdash . *20·41 . *22·38 . (*24·01·02) . \supset \vdash . \Lambda, V \in \mathrm{Cls} .$
$[*24·1] \quad \supset \vdash . \Lambda \neq V . \Lambda, V \in \mathrm{Cls} .$
$[*36·13.*50·11] \quad \supset \vdash . \Lambda \{J \upharpoonright \mathrm{Cls}\} V .$
$[*10·24] \quad \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***50·35.** $\vdash . \dot{\exists} ! J \upharpoonright \mathrm{Rel}$ [La prueba como en la *50·34]

***50·4.** $\vdash . R \mid I = I \mid R = R$

Dem.

$\vdash . *34·1 . \supset \vdash : x (R \mid I) z . \equiv . (\exists y) . xRy . yIz .$
$[*50·1] \quad \equiv . (\exists y) . xRy . y = z .$
$[*13·195] \quad \equiv . xRz \qquad (1)$
$\vdash . *34·1 . \supset \vdash : x (I \mid R) z . \equiv . (\exists y) . xIy . yRz .$
$[*50·1] \quad \equiv . (\exists y) . x = y . yRz .$
$[*13·195] \quad \equiv . xRz \qquad (2)$
$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***50·41.** $\vdash : R \mid \breve{P} \subseteq J . \equiv . \breve{R} \mid P \subseteq J . \equiv . R \mathbin{\dot{\cap}} P = \dot{\Lambda}$

Dem.

$\vdash . *34·1 . *50·11 . \supset \vdash :. R \mid \breve{P} \subseteq J . \equiv : (\exists y) . xRy . y \breve{P} z . \supset_{x,z} . x \neq z :$
$[*13·196] \quad \equiv : (x) : \sim (\exists y) . xRy . y \breve{P} x :$
$[*10·252] \quad \equiv : \sim (\exists x, y) . xRy . y \breve{P} x :$
$[*31·11] \quad \equiv : \sim (\exists x, y) . xRy . xPy :$
$[*23·33.*25·51] \quad \equiv : R \mathbin{\dot{\cap}} P = \dot{\Lambda} : \qquad (1)$
$[*31·14·24] \quad \equiv : \breve{R} \mathbin{\dot{\cap}} \breve{P} = \dot{\Lambda} :$
$\left[(1) \frac{\breve{R}, \breve{P}}{R, P}\right] \quad \equiv : \breve{R} \mid \mathrm{Cnv}' \breve{P} \subseteq J :$
$[*34·203] \quad \equiv : \breve{R} \mid P \subseteq J \qquad (2)$
$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***50·42.** $\vdash . I^2 = I$

Dem.

$\vdash . *34·5 . \supset \vdash : xI^2 z . \equiv . (\exists y) . xIy . yIz .$
$[*50·1] \quad \equiv . (\exists y) . xIy . y = z .$
$[*13·195] \quad \equiv . xIz : \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***50·43.** $\vdash : R^2 \subseteq J . \equiv . R \mathbin{\dot{\cap}} \breve{R} = \dot{\Lambda} \quad \left[*50·41 \frac{\breve{R}}{P}\right]$

Esta proposición es útil en la teoría de series. "$R \cap \breve{R} = \dot{\Lambda}$" es la característica de una relación *asimétrica*.

***50·44.** $\vdash : \dot{\exists} ! (R \mathbin{\dot{\cap}} I) . \supset . \dot{\exists} ! (R^2 \mathbin{\dot{\cap}} I)$

Dem.

$\vdash .*23{\cdot}33 .*50{\cdot}1 . \supset \vdash : \dot{\exists} ! (R \mathbin{\dot\cap} I) . \equiv . (\exists x, y) . xRy . x = y .$

[*13·195*] $\equiv . (\exists x) . xRx .$

[*34·54*] $\supset . (\exists x) . xR^2x .$

[*13·195*] $\supset . (\exists x, y) . xR^2y . x = y .$

[*23·33.*50·1*] $\supset . \dot{\exists} ! (R^2 \mathbin{\dot\cap} I) : \supset \vdash .$ Prop

***50·45.** $\vdash : R^2 \subset J . \supset . R \subset J$ [*50·44 . Transp . *25·311*]

***50·46.** $\vdash : R \mathbin{\dot\cap} \breve{R} = \dot\Lambda . \supset . R \subset J$ [*50·43·45*]

***50·47.** $\vdash :. R^2 \subset R . \supset : R \subset J . \equiv . R^2 \subset J . \equiv . R \mathbin{\dot\cap} \breve{R} = \dot\Lambda$

Dem.

$\vdash .*23{\cdot}44 . \supset \vdash :. \mathrm{Hp} . \supset : R \subset J . \supset . R^2 \subset J$ (1)

$\vdash . (1) .*50{\cdot}45{\cdot}43 . \supset \vdash .$ Prop

Esta proposición se usa en la teoría de series. Si R es una relación serial tendremos $R^2 \subset R$ y $R \subset J$.

***50·5.** $\vdash . \alpha \upharpoonleft I = I \upharpoonright \alpha = \alpha \upharpoonleft I \upharpoonright \alpha$

Dem.

$\vdash .*35{\cdot}1 . \supset \vdash : x (\alpha \upharpoonleft I) y . \equiv . x \in \alpha . xIy .$

[*50·1*] $\equiv . x \in \alpha . x = y .$

[*13·193*] $\equiv . y \in \alpha . x = y .$

[*50·1*] $\equiv . xIy . y \in \alpha .$

[*35·101*] $\equiv . x (I \upharpoonright \alpha) y$ (1)

$\vdash . (1) .*23{\cdot}5 . \supset \vdash . \alpha \upharpoonleft I = \alpha \upharpoonleft I \mathbin{\dot\cap} I \upharpoonright \alpha$

[*35·11*] $= \alpha \upharpoonleft I \upharpoonright \alpha$ (2)

$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash .$ Prop

***50·51.** $\vdash . \mathrm{Cnv}' (\alpha \upharpoonleft I) = \alpha \upharpoonleft I$ [*35·51 . *50·2·5*]

***50·52.** $\vdash . \mathrm{D}' (\alpha \upharpoonleft I) = \mathrm{C}' (\alpha \upharpoonleft I) = C' (\alpha \upharpoonleft I) = \alpha$

Dem.

$\vdash .*35{\cdot}61 . \supset \vdash . \mathrm{D}' (\alpha \upharpoonleft I) = \alpha \cap \mathrm{D}' I$

[*50·31*] $= \alpha \cap \mathrm{V}$

[*24·26*] $= \alpha$ (1)

Similarly $\vdash . \mathrm{C}' (\alpha \upharpoonleft I) = \alpha$ (2)

$\vdash . (1) . (2) .*33{\cdot}18 . \supset \vdash .$ Prop

***50·53.** $\vdash . \alpha \upharpoonleft I \upharpoonright \beta = (\alpha \cap \beta) \upharpoonleft I = I \upharpoonright (\alpha \cap \beta)$

Dem.

$\vdash .*35{\cdot}21 .*50{\cdot}5 . \supset \vdash . \alpha \upharpoonleft I \upharpoonright \beta = \alpha \upharpoonleft (\beta \upharpoonleft I)$

[*35·32*] $= (\alpha \cap \beta) \upharpoonleft I$ (1)

$\vdash . (1) .*50{\cdot}5 . \supset \vdash .$ Prop

***50·54.** $\vdash . (\alpha \upharpoonleft I)^2 = \alpha \upharpoonleft I$

Dem.

$\vdash .*50{\cdot}5 . \supset \vdash . (\alpha \upharpoonleft I)^2 = (\alpha \upharpoonleft I) \mid (I \upharpoonright \alpha)$

$$[*35{\cdot}12] \qquad = \alpha \restriction I^2 \restriction \alpha$$
$$[*50{\cdot}42] \qquad = \alpha \restriction I \restriction \alpha$$
$$[*50{\cdot}5] \qquad = \alpha \restriction I . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$$

***50·55.** $\vdash : \alpha \cap \beta = \Lambda . \equiv . \alpha \uparrow \beta \subseteq J$

Dem.

$$\vdash . *24{\cdot}37 . *50{\cdot}11 . \supset$$
$$\vdash :. \alpha \cap \beta = \Lambda . \equiv : x \in \alpha . y \in \beta . \supset_{x,y} . xJy :$$
$$[*35{\cdot}103] \qquad \equiv : \alpha \uparrow \beta \subseteq J :. \supset \vdash . \mathrm{Prop}$$

***50·56.** $\vdash : \mathfrak{R} ! (\alpha \cap \beta) . \equiv . \dot{\mathfrak{R}} ! \{(\alpha \uparrow \beta) \mathbin{\dot\cap} I\}$

Dem.

$$\vdash . *50{\cdot}55 . \mathrm{Transp} . *24{\cdot}54 . \supset$$
$$\vdash : \mathfrak{R} ! (\alpha \cap \beta) . \qquad \equiv . \sim \{\alpha \uparrow \beta \subseteq J\} .$$
$$[*25{\cdot}55] \qquad \equiv . \dot{\mathfrak{R}} (\alpha \uparrow \beta) \doteq J .$$
$$[*23{\cdot}831.(*50{\cdot}02)] \equiv . \dot{\mathfrak{R}} ! \{(\alpha \uparrow \beta) \mathbin{\dot\cap} I\} : \supset \vdash . \mathrm{Prop}$$

***50·57.** $\vdash . I \mathbin{\dot\cap} \alpha \restriction R = I \mathbin{\dot\cap} R \restriction \alpha = I \mathbin{\dot\cap} \alpha \restriction R \restriction \alpha$

Dem.

$$\vdash . *35{\cdot}16 . \supset \vdash . I \mathbin{\dot\cap} \alpha \restriction R = \alpha \restriction I \mathbin{\dot\cap} R$$
$$[*50{\cdot}5] \qquad = I \restriction \alpha \mathbin{\dot\cap} R$$
$$[*35{\cdot}17] \qquad = I \mathbin{\dot\cap} R \restriction \alpha \qquad (1)$$
$$[*50{\cdot}5] \qquad = \alpha \restriction I \restriction \alpha \mathbin{\dot\cap} R$$
$$[*35{\cdot}16{\cdot}17{\cdot}21] \qquad = I \mathbin{\dot\cap} \alpha \restriction R \restriction \alpha \qquad (2)$$
$$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$$

***50·58.** $\vdash : \alpha \restriction R \subseteq J . \equiv . R \restriction \alpha \subseteq J . \equiv . \alpha \restriction R \restriction \alpha \subseteq J$

Dem.

$$\vdash . *50{\cdot}57 . \supset \vdash : I \mathbin{\dot\cap} \alpha \restriction R = \dot\Lambda . \equiv . I \mathbin{\dot\cap} R \restriction \alpha = \dot\Lambda . \equiv . I \mathbin{\dot\cap} \alpha \restriction R \restriction \alpha = \dot\Lambda \qquad (1)$$
$$\vdash . (1) . *50{\cdot}41 . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$$

***50·59.** $\vdash . (I \restriction \alpha)\text{“}\beta = \alpha \cap \beta$

Dem.

$$\vdash . *37{\cdot}412 . \supset \vdash . (I \restriction \alpha)\text{“}\beta = I\text{“}(\alpha \cap \beta)$$
$$[*50{\cdot}16] \qquad = \alpha \cap \beta . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$$

***50·6.** $\vdash . R \mid (I \restriction \alpha) = R \restriction \alpha$

Dem.

$$\vdash . *35{\cdot}23 . \supset \vdash . R \mid (I \restriction \alpha) = (R \mid I) \restriction \alpha$$
$$[*50{\cdot}4] \qquad = R \restriction \alpha . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$$

***50·61.** $\vdash . I \restriction \alpha \mid R = \alpha \restriction R$

Dem.

$$\vdash . *35{\cdot}354 . \supset \vdash . I \restriction \alpha \mid R = I \mid (\alpha \restriction R)$$
$$[*50{\cdot}4] \qquad = \alpha \restriction R . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$$

***50·62.** $\vdash : \mathrm{D}\text{‘}R \subset \alpha . \supset . R \mid (I \restriction \alpha) = R \qquad [*50{\cdot}6 . *35{\cdot}452]$

***50·63.** $\vdash : \mathrm{D}\text{‘}R \subset \alpha . \supset . I \restriction \alpha \mid R = R \qquad [*50{\cdot}61 . *35{\cdot}451]$

***50·64.** $\vdash . R \mid (I \restriction \mathrm{C}\text{‘}R) = R \mid (I \restriction C\text{‘}R) = R \quad [*50{\cdot}62 . *22{\cdot}42 . *33{\cdot}161]$

***50·65.** $\vdash . I \restriction (\mathrm{D}\text{‘}R) \mid R = I \restriction (C\text{‘}R) \mid R = R \quad [*50{\cdot}63 . *22{\cdot}42 . *33{\cdot}161]$

***50·7.** $\vdash : \mathrm{C}`R \subset \alpha . \supset . R | `I \restriction \alpha = R$ [*50·62 . *43·11]

***50·71.** $\vdash : \mathrm{D}`R \subset \alpha . \supset . | R`I \restriction \alpha = R$ [*50·63 . *43·111]

***50·72.** $\vdash . R | `(I \restriction C`R) = | R`(I \restriction C`R) = R$ [*50·7·71]

***50·73.** $\vdash . R | `I = | R`I = R$ [*50·4 . *43·11·111]

***50·74.** $\vdash . R \| I = R |$

Dem.

$\vdash . *43·112 . \supset \vdash . (R \| I)`Q = R | Q | I$

$[*50·4] \quad = R | Q$

$[*43·11] \quad = R | `Q$ (1)

$\vdash . (1) . *30·41 . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***50·75.** $\vdash . I \| R = | R$ [La prueba como en la *50·74]

***50·76.** $\vdash : P | = R | . \equiv . P = R$

Dem.

$\vdash . *34·27 . *30·41 . \supset \vdash : P = R . \supset . P | = R |$ (1)

$\vdash . *50·73 . *30·36 . \supset \vdash : P | = R | . \supset . P = R$ (2)

$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***50·761.** $\vdash : | P = | R . \equiv . P = R$ [La prueba como en la *50·76]

*51. CLASES UNITARIAS

Sumario del *51.

En este número introducimos una nueva función descriptiva, $\iota'x$, con la significación "la clase de los términos que son idénticos a x", que es lo mismo que "la clase cuyo único miembro es x". De este modo tenemos

$$\iota'x = \hat{y}\,(y = x).$$

Pero $\hat{y}\,(y = x) = \overrightarrow{I}'x$. Por eso logramos lo que requerimos por la siguiente definición:

***51·01.** $\iota = \overrightarrow{I}$ Df

Por lo que respecta a la notación, podría pensarse que $\overrightarrow{I}$ haría lo mismo que ι, y que esta definición es supérflua. Pero necesitamos también la conversa de esta relación, y "Cnv'$\overrightarrow{I}$" no es un símbolo que convenga suficientemente.

Las proposiciones de este número se usan constantemente en lo que sigue. Debe observarse que la clase cuyos miembros son x e y es $\iota'x \cup \iota'y$, la clase cuyos miembros son x, y, z es $\iota'x \cup \iota'y \cup \iota'z$, la clase formada al añadirle x a a es $\alpha \cup \iota'x$, y la clase formada quitando x de α es $\alpha - \iota'x$. (Si x no es un miembro de α, esto es igual a α).

La distinción entre x e $\iota'x$ es uno de los méritos de la lógica simbólica de Peano, así como de la de Frege. Con el apoyo de nuestra teoría de clases, la necesidad en cuanto a la distinción es, desde luego, evidente. Pero, prescindiendo de esto, la siguiente consideración hace aparente la necesidad. Sea α una clase; entonces, la clase cuyo único miembro sea α tiene un solo miembro, a saber, α, mientras que α puede tener muchos miembros. Por tanto, la clase cuyo único miembro es α no puede ser idéntico a α (71).

Las proposiciones de este número que se usan más son las siguientes:

***51·15.** $\vdash : y \in \iota'x . \equiv . y = x$

***51·16.** $\vdash . x \in \iota'x$

***51·2.** $\vdash : x \in \alpha . \equiv . \iota'x \subset \alpha$

Esta proposición es útil porque nos permite sustituir los miembros de una clase ($x \in \alpha$) por la inclusión en la clase ($\iota'x \subset \alpha$).

***51·211.** $\vdash : x \sim\in \alpha . \equiv . \iota'x \cap \alpha = \Lambda$

***51·221.** $\vdash : x \in \alpha . \equiv . (\alpha - \iota'x) \cup \iota'x = \alpha$

(71) Este argumento se debe a Frege. Véase su artículo "Kritische Beleuchtung einiger Punkte in E. Schröder's Voriesungen über die Algebra der Logik", *Archiv für Syst. Phil.*, vol. I. p. 444 (1895).

***51·222.** $\vdash : x \sim\in \alpha . \equiv . \alpha - \iota`x = \alpha$

***51·23.** $\vdash : \iota`x = \iota`y . \equiv . y \in \iota`x . \equiv . x \in \iota`y . \equiv . x = y$

***51·4.** $\vdash : \exists ! \alpha . \alpha \subset \iota`x . \equiv . \alpha = \iota`x$

Esto es, una clase existente contenida en una clase unitaria debe ser idéntica a la clase unitaria. A partir de esta proposición resultará que 0 es el único cardinal que es menor que 1.

***51·51.** $\vdash : \alpha = \iota`x . \equiv . x = \breve{\iota}`\alpha . \equiv . x \breve{\iota} \alpha$

Para clases, $\breve{\iota}`\alpha$ tiene los mismos casos que $(\imath x)(\phi x)$ tiene para las funciones; "$\breve{\iota}`\alpha$" significa "el único miembro de α". Tenemos

***51·59.** $\vdash : \psi \{\breve{\iota}`\hat{z}(\phi z)\} . \equiv . \psi(\imath x)(\phi x)$

***51·01.** $\iota = \overrightarrow{I}$ Df

***51·1.** $\vdash : \alpha \iota x . \equiv . \alpha = \hat{y}(y = x)$

Dem.

$\vdash . *4·2 . (*51·01) . \supset \vdash : \alpha \iota x . \equiv . \alpha \overrightarrow{I} x .$
[*32·1] $\equiv . \alpha = \hat{y}(y I x) .$
[*50·1] $\equiv . \alpha = \hat{y}(y = x) : \supset \vdash .$ Prop

***51·11.** $\vdash . \iota`x = \hat{y}(y = x)$ [*30·3 . *51·1]

***51·12.** $\vdash . \mathrm{E} ! \iota`x$ [*51·11 . *14·21]

***51·13.** $\vdash : \alpha = \iota`x . \equiv . \alpha = \hat{y}(y = x)$ [*20·57·2 . *51·11]

***51·131.** $\vdash : \alpha \iota x . \equiv . \alpha = \iota`x$ [*51·1·13]

***51·14.** $\vdash :. \alpha = \iota`x . \equiv : y \in \alpha . \equiv_y . y = x$ [*51·13 . *20·33]

***51·141.** $\vdash :. \alpha = \iota`x . \equiv : \exists ! \alpha : y \in \alpha . \supset_y . y = x : \equiv : x \in \alpha : y \in \alpha . \supset_y . y = x$
[*51·14 . *14·122]

***51·15.** $\vdash : y \in \iota`x . \equiv . y = x$ [*51·11 . *20·33]

***51·16.** $\vdash . x \in \iota`x$ [*51·15 . *13·15]

***51·161.** $\vdash . \exists ! \iota`x$ [*51·16 . *10·24]

***51·17.** $\vdash . \mathrm{C}`\iota = \mathrm{V}$

Dem.

$\vdash . * 51·1 . *20·2 . \supset \vdash . \{\hat{y}(y = x)\} \iota x .$
[*10·24] $\supset \vdash . (\exists \alpha) . \alpha \iota x .$
[*33·131] $\supset \vdash . x \in \mathrm{C}`\iota .$
[*10·11] $\supset \vdash . (x) . x \in \mathrm{C}`\iota .$
[*24·14] $\supset \vdash . \mathrm{C}`\iota = \mathrm{V}$

La última proposición se usa en la teoría de selecciones (*83·71).

***51·2.** $\vdash : x \in \alpha . \equiv . \iota`x \subset \alpha$

Dem.

$$\vdash .*13{\cdot}191 . \supset \vdash :. x \in \alpha . \equiv : y = x . \supset_y . y \in \alpha :$$
$$[*51{\cdot}15] \qquad \equiv : y \in \iota`x . \supset_y . y \in \alpha :$$
$$[*22{\cdot}1] \qquad \equiv : \iota`x \subset \alpha :. \supset \vdash . \text{Prop}$$

La última proposición enseña cómo sustituir un miembro de una clase por una inclusión en una clase; así, por ejemplo da:

Sócrates es un hombre . ≡ . la clase de términos idénticos a Sócrates está incluida en la clase de los hombres.

Antes de Peano y Frege, la relación de membrecía (ϵ) fue considerada como un nuevo caso particular de la relación de inclusión ($\subset$). Por esta razón, la lógica formal tradicional trató a proposiciones tales como "Sócrates es un hombre" como ejemplos de la universal afirmativa *A*, "Todo *S* es *P*", que es lo que expresamos por "$\alpha \subset \beta$". Esto entraña una confusión de clases de proposiciones fundamentalmente diferentes que en gran manera impidió el desarrollo y utilidad de la lógica simbólica. Pero, por medio de la última proposición (*51·2), podemos obtener siempre una proposición manifestando una inclusión (a saber, "$\iota`x \subset \alpha$"), que es equivalente a una proposición dada afirmando que es miembro de una clase (a saber, "$x \in \alpha$").

***51·21.** $\vdash . x \sim\in \alpha - \iota`x$

Dem.

$$\vdash .*22{\cdot}33{\cdot}35 . \supset \vdash : x \in \alpha - \iota`x . \equiv . x \in \alpha . x \sim\in \iota`x .$$
$$[*3{\cdot}27] \qquad \supset . x \sim\in \iota`x \qquad (1)$$
$$\vdash .(1) . \text{Transp} . *51{\cdot}16 . \supset \vdash . \text{Prop}$$

***51·211.** $\vdash : x \sim\in \alpha . \equiv . \iota`x \cap \alpha = \Lambda$

Dem.

$$\vdash .*24{\cdot}39 . \supset \vdash :. \iota`x \cap \alpha = \Lambda . \equiv : y \in \iota`x . \supset_y . y \sim\in \alpha :$$
$$[*51{\cdot}15] \qquad \equiv : y = x . \supset_y . y \sim\in \alpha :$$
$$[*13{\cdot}191] \qquad \equiv : x \sim\in \alpha :. \supset \vdash . \text{Prop}$$

***51·22.** $\vdash : \alpha \cap \iota`x = \Lambda . \alpha \cup \iota`x = \beta . \equiv . x \in \beta . \alpha = \beta - \iota`x$

Dem.

$$\vdash .*24{\cdot}47 . \supset$$
$$\vdash : \alpha \cap \iota`x = \Lambda . \alpha \cup \iota`x = \beta . \equiv . \iota`x \subset \beta . \alpha = \beta - \iota`x .$$
$$[*51{\cdot}2] \qquad \equiv . x \in \beta . \alpha = \beta - \iota`x : \supset \vdash . \text{Prop}$$

***51·221.** $\vdash : x \in \alpha . \equiv . (\alpha - \iota`x) \cup \iota`x = \alpha$

Dem.

$$\vdash .*51{\cdot}2 . \supset \vdash : x \in \alpha . \equiv . \iota`x \subset \alpha .$$
$$[*22{\cdot}62] \qquad \equiv . \iota`x \cup \alpha = \alpha .$$
$$[*22{\cdot}91] \qquad \equiv . (\alpha - \iota`x) \cup \iota`x = \alpha : \supset \vdash . \text{Prop}$$

***51·222.** $\vdash : x \sim\in \alpha . \equiv . \alpha - \iota`x = \alpha$ [*51·211 . *24·313]

***51·23.** $\vdash : \iota`x = \iota`y . \equiv . y \in \iota`x . \equiv . x \in \iota`y . \equiv . x = y$

Dem.

$\vdash .*20{\cdot}31 .*51{\cdot}15 . \supset$
$\vdash :. \iota`x = \iota`y . \equiv : z = x . \equiv_z . z = y :$
$[*13{\cdot}183] \quad \equiv : x = y :$ (1)
$[*51{\cdot}15] \quad \equiv : x \in \iota`y :$ (2)
$[(1).*13{\cdot}16] \quad \equiv : y \in \iota`x$ (3)
$\vdash .(1).(2).(3). \supset \vdash .$ Prop

***51·231.** $\vdash : \iota`x \cap \iota`y = \Lambda . \equiv . x \neq y$

Dem.

$\vdash .*24{\cdot}311 . \supset \vdash :. \iota`x \cap \iota`y = \Lambda . \equiv : \iota`x \subset -\iota`y :$
$[*51{\cdot}15] \quad \equiv : z = x . \supset_z . z \neq y :$
$[*13{\cdot}191] \quad \equiv : x \neq y :. \supset \vdash .$ Prop

***51·232.** $\vdash :. z \in (\iota`x \cup \iota`y) . \equiv : z = x . \vee . z = y \quad [*22{\cdot}34 . *51{\cdot}15]$

Esta proposición manifiesta que un miembro de $\iota`x \cup \iota`y$ debe ser o x o y, y viceversa, es decir, que $\iota`x \cup \iota`y$ es la clase cuyos únicos miembros son x e y.

***51·233.** $\vdash :: \alpha = \iota`x \cup \iota`y . \supset :. (z) :. z \in \alpha . \equiv : z = x . \vee . z = y$
$[*51{\cdot}232 . *10{\cdot}11 . *20{\cdot}18]$

***51·234.** $\vdash :: \alpha = \iota`x \cup \iota`y . \supset :. z \in \alpha . \supset_z . \phi z : \equiv . \phi x . \phi y$

Dem.

$\vdash .*51{\cdot}233 . \supset \vdash ::. \mathrm{Hp} . \supset :: z \in \alpha . \supset_z . \phi z : \equiv :. z = x . \vee . z = y : \supset_z . \phi z :.$
$[*4{\cdot}77] \quad \equiv :. (z) :. z = x . \supset . \phi z : z = y . \supset . \phi z :.$
$[*10{\cdot}22] \quad \equiv :. z = x . \supset_z . \phi z : z = y . \supset_z . \phi z :.$
$[*13{\cdot}191] \quad \equiv :. \phi x . \phi y ::. \supset \vdash .$ Prop

***51·235.** $\vdash :: \alpha = \iota`x \cup \iota`y . \supset :. (\exists z) . z \in \alpha . \phi z . \equiv : \phi x . \vee . \phi y$

Dem.

$\vdash .*51{\cdot}233 . \supset$
$\vdash :: \mathrm{Hp} . \supset :. (\exists z) . z \in \alpha . \phi z . \equiv : (\exists z) : z = x . \vee . z = y : \phi z :$
$[*4{\cdot}4] \quad \equiv : (\exists z) : z = x . \phi z . \vee . z = y . \phi z :$
$[*10{\cdot}42] \quad \equiv : (\exists z) . z = x . \phi z . \vee . (\exists z) . z = y . \phi z :$
$[*13{\cdot}195] \quad \equiv : \phi x . \vee . \phi y :: \supset \vdash .$ Prop

***51·236.** $\vdash :. z \in \iota`x \cup \beta . \equiv : z = x . \vee . z \in \beta \quad [*22{\cdot}34 . *51{\cdot}15]$

***51·237.** $\vdash :: \alpha = \iota`x \cup \beta . \supset :. (z) :. z \in \alpha . \equiv : z = x . \vee . z \in \beta$
$[*51{\cdot}236 . *10{\cdot}11 . *20{\cdot}18]$

***51·238.** $\vdash :: \alpha = \iota`x \cup \beta . \supset :. z \in \alpha . \supset_z . \phi z : \equiv : \phi x : z \in \beta . \supset_z . \phi z$

Dem.

$\vdash .*51{\cdot}237 . \supset \vdash ::. \mathrm{Hp} . \supset :: z \in \alpha . \supset_z . \phi z : \equiv :. z = x . \vee . z \in \beta : \supset_z . \phi z :.$
$[*4{\cdot}77] \quad \equiv :. (z) :. z = x . \supset . \phi z : z \in \beta . \supset . \phi z :.$
$[*10{\cdot}22] \quad \equiv :. z = x . \supset_z . \phi z : z \in \beta . \supset_z . \phi z :.$
$[*13{\cdot}191] \quad \equiv :. \phi x : z \in \beta . \supset_z . \phi z ::. \supset \vdash .$ Prop

***51·239.** $\vdash :: \alpha = \iota`x \cup \beta . \supset :. (\exists z) . z \in \alpha . \phi z . \equiv : \phi x . \vee . (\exists z) . z \in \beta . \phi z$

Dem.

$\vdash .*51{\cdot}237 . \supset$
$\vdash :: \mathrm{Hp} . \supset :. (\exists z) . z \in \alpha . \phi z . \equiv : (\exists z) : z = x . \vee . z \in \beta : \phi z :$

$[*4{\cdot}4]$ $\equiv : (\exists z) : z = x \,.\, \phi z \,.\, \vee \,.\, z \in \beta \,.\, \phi z :$

$[*10{\cdot}42]$ $\equiv : (\exists z) \,.\, z = x \,.\, \phi z \,.\, \vee \,.\, (\exists z) \,.\, z \in \beta \,.\, \phi z :$

$[*13{\cdot}195]$ $\equiv : \phi x \,.\, \vee \,.\, (\exists z) \,.\, z \in \beta \,.\, \phi z :: \supset \vdash \,.$ Prop

***51·24.** $\vdash :. \iota`y \subset \iota`x \cup \beta \,.\, \equiv : y = x \,.\, \vee \,.\, y \in \beta$

Dem.

$\vdash \,.\, *51{\cdot}236 \,.\, \supset$

$\vdash :: \iota`y \subset \iota`x \cup \beta \,.\, \equiv :. z \in \iota`y \,.\, \supset_z : z = x \,.\, \vee \,.\, z \in \beta :.$

$[*51{\cdot}15]$ $\equiv :. z = y \,.\, \supset_z : z = x \,.\, \vee \,.\, z \in \beta :.$

$[*13{\cdot}191]$ $\equiv :. y = x \,.\, \vee \,.\, y \in \beta :: \supset \vdash \,.$ Prop

***51·25.** $\vdash : \alpha \subset \iota`x \cup \beta \,.\, x \sim\in \alpha \,.\, \supset \,.\, \alpha \subset \beta$ $[*51{\cdot}211 \,.\, *24{\cdot}49]$

***51·3.** $\vdash : y \in \alpha \,.\, y \neq x \,.\, \equiv \,.\, y \in \alpha - \iota`x$ $[*51{\cdot}15 \,.\, *22{\cdot}33{\cdot}35]$

***51·31.** $\vdash : (\exists) \,!\, \alpha \cap \iota`x \,.\, \equiv \,.\, \iota`x \subset \alpha \,.\, \equiv \,.\, \alpha \cap \iota`x = \iota`x \,.\, \equiv \,.\, x \in \alpha$

Dem.

$\vdash \,.\, *22{\cdot}33 \,.\, *51{\cdot}15 \,.\, \supset \vdash : (\exists) \,!\, \alpha \cap \iota`x \,.\, \equiv \,.\, (\exists y) \,.\, y \in \alpha \,.\, y = x \,.$

$[*13{\cdot}195]$ $\equiv \,.\, x \in \alpha \,.$ (1)

$[*51{\cdot}2]$ $\equiv \,.\, \iota`x \subset \alpha \,.$ (2)

$[*22{\cdot}621]$ $\equiv \,.\, \iota`x = \iota`x \cap \alpha$ (3)

$\vdash \,.\, (1) \,.\, (2) \,.\, (3) \,.\, \supset \vdash \,.$ Prop

***51·34.** $\vdash : x \in \alpha \,.\, \equiv \,.\, -\alpha \subset -\iota`x$ $[*51{\cdot}2 \,.\, *22{\cdot}81]$

***51·35.** $\vdash : x \sim\in \alpha \,.\, \equiv \,.\, \iota`x \subset -\alpha$ $[*51{\cdot}2 \,.\, *22{\cdot}35]$

***51·36.** $\vdash : x \sim\in \alpha \,.\, \equiv \,.\, \alpha \subset -\iota`x$ $[*51{\cdot}35 \,.\, *22{\cdot}811]$

La *51·36 se usa frecuentemente

***51·37.** $\vdash \,.\, \alpha = \hat{x} \,(\iota`x \subset \alpha)$ $[*51{\cdot}2 \,.\, *20{\cdot}33]$

***51·4.** $\vdash : (\exists) \,!\, \alpha \,.\, \alpha \subset \iota`x \,.\, \equiv \,.\, \alpha = \iota`x$

Dem.

$\vdash \,.\, *24{\cdot}5 \,.\, *51{\cdot}15 \,.\, \supset \vdash :. (\exists) \,!\, \alpha \,.\, \alpha \subset \iota`x \,.\, \equiv : (\exists y) \,.\, y \in \alpha : y \in \alpha \,.\, \supset_y \,.\, y = x :$

$[*14{\cdot}122]$ $\equiv : y \in \alpha \,.\, \equiv_y \,.\, y = x :$

$[*51{\cdot}11{\cdot}*20{\cdot}33]$ $\equiv : \alpha = \iota`x :. \supset \vdash \,.$ Prop

***51·401.** $\vdash :. \alpha \subset \iota`x \,.\, \equiv : \alpha = \Lambda \,.\, \vee \,.\, \alpha = \iota`x$

Dem.

$\vdash \,.\, *51{\cdot}4 \,.\, *5{\cdot}6 \,.$ $\supset \vdash :. \alpha \subset \iota`x \,.\, \supset : \alpha = \Lambda \,.\, \vee \,.\, \alpha = \iota`x$ (1)

$\vdash \,.\, *24{\cdot}12 \,.\, *22{\cdot}42 \,.\, \supset \vdash :. \alpha = \Lambda \,.\, \vee \,.\, \alpha = \iota`x : \supset \,.\, \alpha \subset \iota`x$ (2)

$\vdash \,.\, (1) \,.\, (2) \,.\, \supset \vdash \,.$ Prop

Esta proposición muestra que las clases unitarias son las más pequeñas de las clases existentes.

***51·41.** $\vdash : \iota`x \cup \iota`y = \iota`x \cup \iota`z \,.\, \equiv \,.\, y = z$

Dem.

$\vdash \,.\, *20{\cdot}2 \,.\, *13{\cdot}13 \,.\, \supset \vdash : y = z \,.\, \supset \,.\, \iota`x \cup \iota`y = \iota`x \cup \iota`z$ (1)

$\vdash \,.\, *22{\cdot}58 \,.\, \supset \vdash :. \iota`x \cup \iota`y = \iota`x \cup \iota`z \,.\, \supset : \iota`y \subset \iota`x \cup \iota`z \,.\, \iota`z \subset \iota`x \cup \iota`y :$

$[*51{\cdot}16{\cdot}232]$ $\quad \supset : y = x \,.\vee.\, y = z : z = x \,.\vee.\, z = y :$

$[*13{\cdot}16.*4{\cdot}41]$ $\quad \supset : y = x \,.\, z = x \,.\vee.\, y = z :$

$[*13{\cdot}172.*2{\cdot}621]$ $\quad \supset : y = z$ (2)

$\vdash .(1).(2).\supset \vdash .$ Prop

Las dos proposiciones siguientes son lemas para la $*51{\cdot}43$.

$*51{\cdot}42$. $\vdash :. \iota'x \cup \iota'y = \iota'z \cup \iota'w \,.\supset : x = z \,.\, y = w \,.\vee.\, x = w \,.\, y = z$

Dem.

$\vdash .*51{\cdot}232 .\supset$

$\vdash :: \iota'x \cup \iota'y = \iota'z \cup \iota'w \,.\equiv :. a = x \,.\vee.\, a = y : \equiv_a : a = z \,.\vee.\, a = w :.$

$[*10{\cdot}1]$ $\quad \supset :. x = x \,.\vee.\, x = y : \equiv : x = z \,.\vee.\, x = w :.$

$[*13{\cdot}15]$ $\quad \supset :. x = z \,.\vee.\, x = w$ (1)

$\vdash .*20{\cdot}2 .*13{\cdot}13 .\supset \vdash : \iota'x \cup \iota'y = \iota'z \cup \iota'w \,.\, x = z \,.\supset . \iota'x \cup \iota'y = \iota'x \cup \iota'w \,.$

$[*51{\cdot}41]$ $\quad \supset . y = w$ (2)

Similarmente $\quad \vdash : \iota'x \cup \iota'y = \iota'z \cup \iota'w \,.\, x = w \,.\supset . y = z$ (3)

$\vdash .(1).(2).(3).\supset \vdash .$ Prop

$*51{\cdot}421$. $\vdash :. x = z \,.\, y = w \,.\vee.\, x = w \,.\, y = z : \supset . \iota'x \cup \iota'y = \iota'z \cup \iota'w$ $[*51{\cdot}41]$

$*51{\cdot}43$. $\vdash :. \iota'x \cup \iota'y = \iota'z \cup \iota'w . \equiv : x = z \,.\, y = w \,.\vee.\, x = w \,.\, y = z$

$[*51{\cdot}42{\cdot}421]$

Las proposiciones siguientes hacen referencia a $\breve{\iota}$, es decir, a la relación del único miembro de una clase unitaria a esa clase. Si α es una clase unitaria, $\breve{\iota}'\alpha$ es su único miembro. $(\imath x)\,(\phi x)$ y $\breve{\iota}'\hat{z}\,(\phi z)$ son iguales siempre que existan, y cualquier proposición acerca de una de ellas es equivalente a la misma proposición acerca de la otra.

$*51{\cdot}51$. $\vdash : \alpha = \iota'x \,.\equiv.\, x = \breve{\iota}'\alpha \,.\equiv.\, x \,\breve{\iota}\, \alpha$

Dem.

$\vdash .*51{\cdot}131 .*31{\cdot}11 .\supset \vdash : \alpha = \iota'x \,.\equiv.\, x \,\breve{\iota}\, \alpha$ (1)

$\vdash .(1).\supset \vdash : x \,\breve{\iota}\, \alpha \,.\, y \,\breve{\iota}\, \alpha \,.\supset . \alpha = \iota'x \,.\, \alpha = \iota'y \,.$

$[*51{\cdot}23.*20{\cdot}57{\cdot}2]$ $\quad \supset . x = y$ (2)

$\vdash .(2).\mathrm{Exp} .*10{\cdot}11 .*4{\cdot}71 .\supset \vdash :. x \,\breve{\iota}\, \alpha \,.\equiv : x \,\breve{\iota}\, \alpha : y \,\breve{\iota}\, \alpha \,.\supset_y . x = y :$

$[*30{\cdot}31]$ $\quad \equiv : x = \breve{\iota}'\alpha$ (3)

$\vdash .(1).(3).\supset \vdash .$ Prop

$*51{\cdot}511$. $\vdash . \breve{\iota}'\iota'x = x$ $\quad \left[*51{\cdot}51\,\frac{\iota'x}{\alpha} .*20{\cdot}2\right]$

$*51{\cdot}52$. $\vdash : \mathrm{E}\,!\,\breve{\iota}'\alpha \,.\equiv.\, \alpha = \iota'\breve{\iota}'\alpha$ $\quad \left[*51{\cdot}51\,\frac{\breve{\iota}'\alpha}{x} .*14{\cdot}21{\cdot}18\right]$

$*51{\cdot}53$. $\vdash : \mathrm{E}\,!\,\breve{\iota}'\alpha \,.\equiv.\, \breve{\iota}'\alpha \in \alpha$ $\quad [*51{\cdot}52{\cdot}16 .*14{\cdot}21{\cdot}18]$

$*51{\cdot}54$. $\vdash : \mathrm{E}\,!\,\breve{\iota}'\alpha \,.\equiv.\, (\exists x) \,.\, \alpha = \iota'x$ $\quad [*51{\cdot}51 .*14{\cdot}204]$

$*51{\cdot}55$. $\vdash : \mathrm{E}\,!\,\breve{\iota}'\alpha \,.\equiv.\, \mathrm{E}\,!\,(\imath x)\,(x \in \alpha)$

Dem.

$$\vdash . *51{\cdot}54{\cdot}14 . \supset \vdash :. \mathrm{E}!\breve{\iota}`\alpha . \equiv : (\exists x) : y \in \alpha . \equiv_y . y = x :$$
$$[*14{\cdot}11] \qquad \equiv : \mathrm{E}!(\imath x)(x \in \alpha) :. \supset \vdash . \mathrm{Prop}$$

***51·56.** $\vdash : b = \breve{\iota}`\hat{y}(\phi y) . \equiv . \hat{y}(\phi y) = \iota`b . \equiv . b = (\imath x)(\phi x)$

Dem.

$$\vdash . *51{\cdot}51 . \supset \vdash :. b = \breve{\iota}`\hat{y}(\phi y) . \equiv : \hat{y}(\phi y) = \iota`b : \qquad (1)$$
$$[*20{\cdot}15.*51{\cdot}11] \qquad \equiv : \phi y . \equiv_y . y = b :$$
$$[*14{\cdot}202] \qquad \equiv : b = (\imath x)(\phi x) \qquad (2)$$
$$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$$

***51·57.** $\vdash : \mathrm{E}!\breve{\iota}`\hat{y}(\phi y) . \equiv . \breve{\iota}`\hat{y}(\phi y) = (\imath x)(\phi x) . \equiv . \mathrm{E}!(\imath x)(\phi x)$

Dem.

$$\vdash . *14{\cdot}204 . *51{\cdot}56 . \supset \vdash : \mathrm{E}!\breve{\iota}`\hat{y}(\phi y) . \equiv . \mathrm{E}!(\imath x)(\phi x) \qquad (1)$$
$$\vdash . *14{\cdot}205 . \supset \vdash : (\imath x)(\phi x) = \breve{\iota}`\hat{y}(\phi y) . \equiv . (\exists b) . b = (\imath x)(\phi x) . b = \breve{\iota}`\hat{y}(\phi y) .$$
$$[*51{\cdot}56.*4{\cdot}71] \qquad \equiv . (\exists b) . b = (\imath x)(\phi x) .$$
$$[*14{\cdot}204{\cdot}13] \qquad \equiv . \mathrm{E}!(\imath x)(\phi x) \qquad (2)$$
$$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$$

***51·58.** $\vdash : \mathrm{E}!\breve{\iota}`\alpha . \equiv . \breve{\iota}`\alpha = (\imath x)(x \in \alpha) \quad [*51{\cdot}57 . *20{\cdot}3 . *14{\cdot}272]$

***51·59.** $\vdash : \psi\{\breve{\iota}`\hat{z}(\phi z)\} . \equiv . \psi(\imath x)(\phi x) \quad [*51{\cdot}56 . *14{\cdot}205]$

*52. EL NUMERO CARDINAL 1

Sumario del *52.

En este número introducimos el número cardinal 1, definido como la clase de todas las clases unitarias. El hecho de que el 1 así definido sea un número cardinal no es relevante por el momento y, desde luego, no puede probarse hasta que se haya definido el "número cardinal". Por ello, de momento, el 1 debe considerarse simplemente como la clase de todas las clases unitarias, siendo tales clases de la forma $\iota`x$ para cualquier x.

Al igual que la Λ y la V, el 1 es ambiguo por lo que respecta al tipo: significa "todas las clases unitarias del tipo en cuestión". El símbolo "1 (α)", donde α es un tipo, significa "todas las clases unitarias cuyos miembros únicos pertenecen al tipo α" (cf. *65). Así, por ejemplo, "$\xi \in 1$ (Indiv)" significa "ξ es una clase que se compone de un individual", si "indiv" representa a la clase de los individuales.

Las propiedades del 1, que se han de probar en este número, son las que podemos llamar *lógicas,* por oposición a las propiedades aritméticas; es decir, no se refieren a las operaciones aritméticas (suma, etc.) que pueden realizarse con el 1, sino a las relaciones del 1 con las clases unitarias. Las propiedades aritméticas del 1 se considerarán más adelante, en la parte III.

Las proposiciones de este número que más se usan son las siguientes:

***52·16.** $\vdash :. \alpha \in 1 . \equiv : \exists ! \alpha : x, y \in \alpha . \supset_{x,y} . x = y$

Esto es, α es una clase unitaria si, y sólo si, no es nula y todos sus miembros son idénticos.

***52·22.** $\vdash . \iota`x \in 1$

***52·4.** $\vdash :. \alpha \in 1 \cup \iota`\Lambda . \equiv : x, y \in \alpha . \supset_{x,y} . x = y$

Definiremos el 0 como $\iota`\Lambda$. Así, pues, la última proposición establece que una clase tiene un miembro o ninguno cuando, y sólo cuando, todos sus miembros sean idénticos.

***52·41.** $\vdash : \exists ! \alpha . \alpha \sim \in 1 . \equiv . (\exists x, y) . x, y \in \alpha . x \neq y$

Esta proposición puede obtenerse de la *52·4, mediante transposición; es decir, negando cada miembro de la equivalencia.

***52·46.** $\vdash :. \alpha, \beta \in 1 . \supset : \alpha \subset \beta . \equiv . \alpha = \beta . \equiv . \exists ! (\alpha \cap \beta)$

Esto es, dos clases unitarias son idénticas cuando, y sólo cuando, una se contiene en la otra, y cuando, y sólo cuando, tienen una parte común.

***52·01.** $1 = \hat{\alpha} \{(\exists x) . \alpha = \iota`x\}$ Df

***52·1.** $\vdash : \alpha \in 1 . \equiv . (\exists x) . \alpha = \iota`x$ [*20·3 . (*52·01)]

***52·11.** $\vdash :. \alpha \in 1 . \equiv : (\exists x) : y \in \alpha . \equiv_y . y = x$ [*52·1 . *51·14]

***52·12.** $\vdash : \hat{z}(\phi z) \in 1 . \equiv . \mathrm{E}!(\imath x)(\phi x)$

Dem.

$\vdash . *52·11 . \supset \vdash :. \hat{z}(\phi z) \in 1 . \equiv : (\exists x) : y \in \hat{z}(\phi z) . \equiv_y . y = x :$
[*20·3] $\equiv : (\exists x) : \phi y . \equiv_y . y = x :$
[*14·11] $\equiv : \mathrm{E}!(\imath x)(\phi x) :. \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***52·13.** $\vdash . 1 = \mathrm{D}`\iota$

Dem.

$\vdash . *51·131 . \supset \vdash : \alpha = \iota`x . \equiv . \alpha \iota x :$
[*10·11·281] $\supset \vdash : (\exists x) . \alpha = \iota`x . \equiv . (\exists x) . \alpha \iota x :$
[*52·1] $\supset \vdash : \alpha \in 1 . \equiv . (\exists x) . \alpha \iota x$
[*33·13] $\equiv . \alpha \in \mathrm{D}`\iota : \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***52·14.** $\vdash . 1 = \iota``\mathrm{V}$ [*52·13 . *37·28]

***52·15.** $\vdash : \alpha \in 1 . \equiv . \mathrm{E}! \breve{\iota}`\alpha$ [*51·54 . *52·1]

***52·16.** $\vdash :. \alpha \in 1 . \equiv : \exists ! \alpha : x, y \in \alpha . \supset_{x,y} . x = y$ [*52·15 . *51·55 . *14·203]

***52·17.** $\vdash : \alpha \in 1 . \equiv . \breve{\iota}`\alpha = (\imath x)(x \in \alpha)$ [*51·58 . *52·15]

***52·171.** $\vdash : \alpha \in 1 . \equiv . \mathrm{E}!(\imath x)(x \in \alpha)$ [*51·55 . *52·15]

***52·172.** $\vdash : \alpha \in 1 . \equiv . \iota` \breve{\iota}`\alpha = \alpha$ [*51·52 . *52·15]

***52·173.** $\vdash : \alpha \in 1 . \equiv . \breve{\iota}`\alpha \in \alpha$ [*51·53 . *52·15]

***52·18.** $\vdash :. \alpha \in 1 . \equiv : (\exists x) : x \in \alpha : y \in \alpha . \supset_y . y = x$

Dem.

$\vdash . *51·141 . \supset \vdash :. (\exists x) . \alpha = \iota`x . \equiv : (\exists x) : x \in \alpha : y \in \alpha . \supset_y . y = x$ (1)
$\vdash . (1) . *52·1 . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***52·181.** $\vdash :. \alpha \sim\in 1 . \equiv : x \in \alpha . \supset_x . (\exists y) . y \in \alpha . y \neq x$ [*52·18 . *10·51]

***52·2.** $\vdash . 1 \subset \mathrm{Cls}$

Dem.

$\vdash . *52·1 . \supset \vdash : \alpha \in 1 . \supset . (\exists x) . \alpha = \iota`x .$
[*51·11] $\supset . (\exists x) . \alpha = \hat{z}(z = x) .$
[*20·54] $\supset . (\exists x, \phi) . \hat{z}(\phi ! z) = \hat{z}(z = x) . \alpha = \hat{z}(\phi ! z) .$
[*10·5] $\supset . (\exists \phi) . \alpha = \hat{z}(\phi ! z) .$
[*20·4] $\supset . \alpha \in \mathrm{Cls} : \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***52·21.** $\vdash . \Lambda \sim\in 1$

Dem.

$\vdash . *52·16 . \supset \vdash : \alpha \in 1 . \supset_\alpha . \exists ! \alpha :$
[*24·63] $\supset \vdash : \Lambda \sim\in 1$

***52·22.** $\vdash . \iota`x \in 1$ [*51·12 . *14·28 . *10·24 . *52·1]

***52·23.** $\vdash . \exists ! 1 . \exists ! - 1$

Dem.

$\vdash . *52{\cdot}22 . *10{\cdot}24 . \supset \vdash . (\exists x) . \iota`x \in 1 .$

[*20·54] $\supset \vdash . (\exists x, \alpha) . \alpha = \iota`x . \alpha \in 1 .$

[*10·5] $\supset \vdash . (\exists \alpha) . \alpha \in 1$ (1)

$\vdash . *52{\cdot}21 . *22{\cdot}35 . \supset \vdash . \Lambda \in - 1 .$

[*10·24] $\supset \vdash . (\exists \alpha) . \alpha \in - 1$ (2)

$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash .$ Prop

***52·24.** $\vdash . 1 \neq \Lambda \cap \mathrm{Cls} . 1 \neq \mathrm{V} \cap \mathrm{Cls}$ [*52·23 . *24·54 . *24·17 . Transp]

***52·3.** $\vdash . \iota``\alpha \subset 1$

Dem.

$\vdash . *52{\cdot}22 . *2{\cdot}02 . \supset \vdash : y \in \alpha . \supset . \iota`y \in 1 :$

[*51·12.*10·11.*37·61] $\supset \vdash . \iota``\alpha \subset 1$

***52·31.** $\vdash : \kappa \subset 1 . \equiv . (\exists \alpha) . \kappa = \iota``\alpha$

Dem.

$\vdash . *52{\cdot}14 . \supset \vdash : \kappa \subset 1 . \equiv . \kappa \subset \iota``\mathrm{V} .$

[*37·66.*51·12] $\equiv . (\exists \alpha) . \alpha \subset \mathrm{V} . \kappa = \iota``\alpha .$

[*24·11] $\equiv . (\exists \alpha) . \kappa = \iota``\alpha : \supset \vdash .$ Prop

***52·4.** $\vdash :. \alpha \in 1 \cup \iota`\Lambda . \equiv : x, y \in \alpha . \supset_{x,y} . x = y$

Dem.

$\vdash . *52{\cdot}16 . *24{\cdot}54 . \supset$

$\vdash :. \alpha \in 1 . \equiv : \alpha \neq \Lambda : x, y \in \alpha . \supset_{x,y} . x = y :.$

[*4·37] $\supset \vdash :: \alpha \in 1 . \vee . \alpha = \Lambda : \equiv :. \alpha = \Lambda :. \vee :. \alpha \neq \Lambda : x, y \in \alpha . \supset_{x,y} . x = y :.$

[*5·63] $\equiv :. \alpha = \Lambda : \vee : x, y \in \alpha . \supset_{x,y} . x = y$ (1)

$\vdash . *24{\cdot}51 . *10{\cdot}53 . *11{\cdot}62 . \supset \vdash :. \alpha = \Lambda . \supset : x, y \in \alpha . \supset_{x,y} . x = y$ (2)

$\vdash . (1) . (2) . *4{\cdot}72 . \supset \vdash :: \alpha \in 1 . \vee . \alpha = \Lambda : \equiv :. x, y \in \alpha . \supset_{x,y} . x = y$ (3)

$\vdash . (3) . *51{\cdot}236 . \supset \vdash .$ Prop

Esta proposición es útil frecuentemente. Debemos definir el número 0 como $\iota`\Lambda$; de este modo, la última proposición declara que una clase tiene un miembro o ninguno cuando, y sólo cuando, todos sus miembros son idénticos. Se observará que $x, y \in \alpha . \supset_{x,y} . x = y$ no implica $\exists ! \alpha$, y que, por lo tanto, admite la posibilidad de que α carezca de miembros.

***52·41.** $\vdash : \exists ! \alpha . \alpha \sim \in 1 . \equiv . (\exists x, y) . x, y \in \alpha . x \neq y$

Dem.

$\vdash . *24{\cdot}54 . \supset \vdash :. \exists ! \alpha . \alpha \sim \in 1 . \equiv : \alpha \neq \Lambda . \alpha \sim \in 1 :$

[*4·56] $\equiv : \sim \{\alpha \in 1 . \vee . \alpha = \Lambda\} :$

[*51·236] $\equiv : \sim (\alpha \in 1 \cup \iota`\Lambda) :$

[*52·4.Transp] $\equiv : \sim \{x, y \in \alpha . \supset_{x,y} . x = y\}$

[*11·52] $\equiv : (\exists x, y) . x, y \in \alpha . x \neq y :. \supset \vdash .$ Prop

***52·42.** $\vdash :. \alpha \in 1 . \supset : \exists ! \alpha \cap \beta . \equiv . \alpha \cap \beta \in 1$

Dem.

$\vdash .*51{\cdot}31 . \quad \supset \vdash :. \exists ! \iota`x \cap \beta . \equiv . \iota`x \cap \beta = \iota`x :.$

$[*20{\cdot}53] \quad \supset \vdash :. \alpha = \iota`x . \supset : \exists ! \alpha \cap \beta . \equiv . \alpha \cap \beta = \iota`x :.$

$[*10{\cdot}11{\cdot}28] \quad \supset \vdash :. (\exists x) . \alpha = \iota`x . \supset : (\exists x) : \exists ! \alpha \cap \beta . \equiv . \alpha \cap \beta = \iota`x :$

$[*10{\cdot}37] \quad \supset : \exists ! \alpha \cap \beta . \supset . (\exists x) . \alpha \cap \beta = \iota`x \qquad (1)$

$\vdash .(1) .*52{\cdot}1 . \supset \vdash :. \alpha \in 1 . \supset : \exists ! \alpha \cap \beta . \supset . \alpha \cap \beta \in 1 \qquad (2)$

$\vdash .*52{\cdot}16 . \quad \supset \vdash : \alpha \cap \beta \in 1 . \supset . \exists ! \alpha \cap \beta \qquad (3)$

$\vdash .(2) .(3) . \quad \supset \vdash . \text{Prop}$

***52·43.** $\vdash : \alpha \in 1 . \exists ! \alpha \cap \beta . \equiv . \alpha \in 1 . \alpha \cap \beta \in 1 \quad [*52{\cdot}42 .*5{\cdot}32]$

***52·44.** $\vdash :. \alpha \in 1 . \supset : \exists ! \alpha \cap \beta . \equiv . \alpha \subset \beta . \equiv . \alpha \cap \beta = \alpha$

Dem.

$\vdash .*51{\cdot}31 . \quad \supset \vdash : \exists ! \iota`x \cap \beta . \equiv . \iota`x \subset \beta :$

$[*13{\cdot}13.\text{Exp}] \quad \supset \vdash :. \alpha = \iota`x . \supset : \exists ! \alpha \cap \beta . \equiv . \alpha \subset \beta :.$

$[*10{\cdot}11{\cdot}23] \quad \supset \vdash :. (\exists x) . \alpha = \iota`x . \supset : \exists ! \alpha \cap \beta . \equiv . \alpha \subset \beta :.$

$[*52{\cdot}1] \quad \supset \vdash :. \alpha \in 1 . \supset : \exists ! \alpha \cap \beta . \equiv . \alpha \subset \beta \qquad (1)$

$\vdash .(1) .*22{\cdot}621 . \supset \vdash . \text{Prop}$

***52·45.** $\vdash :: \alpha, \beta \in 1 . \supset :. \alpha \subset \beta \cup \gamma . \equiv : \alpha = \beta . \vee . \alpha \subset \gamma$

Dem.

$\vdash .*51{\cdot}236 \dfrac{x, y, \gamma}{z, x, \beta} . \supset$

$\vdash :. x \in \iota`y \cup \gamma . \equiv : x = y . \vee . x \in \gamma :.$

$[*51{\cdot}2{\cdot}23] \quad \supset \vdash :. \iota`x \subset \iota`y \cup \gamma . \equiv : \iota`x = \iota`y . \vee . \iota`x \subset \gamma :.$

$[*13{\cdot}21] \quad \supset \vdash :: \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset :. \alpha \subset \beta \cup \gamma . \equiv : \alpha = \beta . \vee . \alpha \subset \gamma ::$

$[*11{\cdot}11{\cdot}35] \quad \supset \vdash :: (\exists x, y) . \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset :. \alpha \subset \beta \cup \gamma . \equiv : \alpha = \beta . \vee . \alpha \subset \gamma \qquad (1)$

$\vdash .(1) .*52{\cdot}1 . \supset \vdash . \text{Prop}$

***52·46.** $\vdash :. \alpha, \beta \in 1 . \supset : \alpha \subset \beta . \equiv . \alpha = \beta . \equiv . \exists ! (\alpha \cap \beta)$

Dem.

$\vdash .*51{\cdot}2{\cdot}23 . \quad \supset \vdash : \iota`x \subset \iota`y . \equiv . \iota`x = \iota`y \qquad (1)$

$\vdash .(1) .*13{\cdot}21 . \quad \supset \vdash :. \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \subset \beta . \equiv . \alpha = \beta \qquad (2)$

$\vdash .(2) .*11{\cdot}11{\cdot}35 .*52{\cdot}1 . \supset \vdash :. \alpha, \beta \in 1 . \supset : \alpha \subset \beta . \equiv . \alpha = \beta \qquad (3)$

$\vdash .(3) .*52{\cdot}44 . \quad \supset \vdash . \text{Prop}$

***52·6.** $\vdash :. \alpha \in 1 . \supset : x \in \alpha . \equiv . \iota`x = \alpha . \equiv . x = \breve{\iota}`\alpha$

Dem.

$\vdash .*51{\cdot}23 . \quad \supset \vdash : x \in \iota`y . \equiv . \iota`x = \iota`y :$

$[*13{\cdot}13.\text{Exp}] \quad \supset \vdash :. \alpha = \iota`y . \supset : x \in \alpha . \equiv . \iota`x = \alpha :.$

$[*10{\cdot}11{\cdot}23.*52{\cdot}1] \supset \vdash :. \alpha \in 1 . \quad \supset : x \in \alpha . \equiv . \iota`x = \alpha . \qquad (1)$

$[*51{\cdot}51] \quad \equiv . x = \breve{\iota}`\alpha \qquad (2)$

$\vdash .(1) .(2) . \supset \vdash . \text{Prop}$

***52·601.** $\vdash :: \alpha \in 1 . \supset :. \phi (\breve{\iota}`\alpha) . \equiv : x \in \alpha . \supset_x . \phi x : \equiv : (\exists x) . x \in \alpha . \phi x$

Dem.

$\vdash .*52{\cdot}15 . \supset \vdash :. \mathrm{Hp} . \supset : \mathrm{E} ! \breve{\iota}`\alpha :$ (1)

[*30·4] $\supset : x \breve{\iota} \alpha . \equiv . x = \breve{\iota}`\alpha .$

[*52·6] $\equiv . x \in \alpha$ (2)

$\vdash .(1) .*30{\cdot}33 . \supset$

$\vdash :: \mathrm{Hp} . \supset :. \phi(\breve{\iota}`\alpha) . \equiv : x \breve{\iota} \alpha . \supset_x . \phi x : \equiv : (\exists x) . x \breve{\iota} \alpha . \phi x$ (3)

$\vdash .(2) .(3) . \supset \vdash .$ Prop

***52·602.** $\vdash :. \hat{z}(\phi z) \in 1 . \supset : \psi(\iota x)(\phi x) . \equiv . \phi x \supset_x \psi x . \equiv . (\exists x) . \phi x . \psi x$ [*52·12 . *14·26]

***52·61.** $\vdash :. \alpha \in 1 . \supset : \breve{\iota}`\alpha \in \beta . \equiv . \alpha \subset \beta . \equiv . \exists ! (\alpha \cap \beta)$ $\left[*52{\cdot}601 \frac{x \in \beta}{\phi x}\right]$

***52·62.** $\vdash :. \alpha, \beta \in 1 . \supset : \alpha = \beta . \equiv . \breve{\iota}`\alpha = \breve{\iota}`\beta$

Dem.

$\vdash .*52{\cdot}601 . \supset \vdash :: \mathrm{Hp} . \supset :. \breve{\iota}`\alpha = \breve{\iota}`\beta . \equiv : x \in \alpha . \supset_x . x = \breve{\iota}`\beta :$

[*52·6] $\equiv : x \in \alpha . \supset_x . x \in \beta :$

[*52·46] $\equiv : \alpha = \beta :: \supset \vdash .$ Prop

***52·63.** $\vdash : \alpha, \beta \in 1 . \alpha \neq \beta . \supset . \alpha \cap \beta = \Lambda$ [*52·46 . Transp]

***52·64.** $\vdash : \alpha \in 1 . \supset . \alpha \cap \beta \in 1 \cup \iota`\Lambda$

Dem.

$\vdash .*52{\cdot}43 . \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \exists ! \alpha \cap \beta . \supset . \alpha \cap \beta \in 1 :$

[*5·6.*24·54] $\supset \vdash :. \mathrm{Hp} . \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda . \vee . \alpha \cap \beta \in 1 :$

[*51·236] $\supset : \alpha \cap \beta \in 1 \cup \iota`\Lambda :. \supset \vdash .$ Prop

***52·7.** $\vdash :. \beta - \alpha \in 1 . \alpha \subset \xi . \xi \subset \beta . \supset : \xi = \alpha . \vee . \xi = \beta$

Dem.

$\vdash .*22{\cdot}41 . \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \xi \subset \alpha . \supset . \xi = \alpha$ (1)

$\vdash .*24{\cdot}55 . \supset \vdash :\sim(\xi \subset \alpha) . \supset . \exists ! \xi - \alpha$ (2)

$\vdash .*22{\cdot}48 . \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \supset . \xi - \alpha \subset \beta - \alpha$ (3)

$\vdash .(2) .(3) . \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \sim(\xi \subset \alpha) . \supset . \exists ! \xi - \alpha . \xi - \alpha \subset \beta - \alpha$ (4)

$\vdash .*52{\cdot}1 . \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \supset . (\exists x) . \beta - \alpha = \iota`x$ (5)

$\vdash .(4) .(5) .*51{\cdot}4 . \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \sim(\xi \subset \alpha) . \supset . \xi - \alpha = \beta - \alpha .$

[*24·411] $\supset . \xi = \beta$ (6)

$\vdash .(1) .(6) . \supset \vdash .$ Prop

*53. MISCELANEA DE PROPOSICIONES EN LAS QUE INTERVIENEN CLASES UNITARIAS

Sumario del *53.

Las proposiciones que se ofrecen en este número son en su mayoría tales que deberían haber venido, naturalmente, en una etapa anterior; pero no pudieron darse tan pronto porque en ellas intervienen las clases unitarias. Debe observarse que $\iota`x \cup \iota`y$ es la clase constituida por los miembros x e y, mientras que $\iota`x \uparrow \iota`y$ es la relación que existe sólo entre x e y. Si α y β son clases, $\iota`\alpha \cup \iota`\beta$ es una clase de clases, siendo sus miembros α y β. Si R y S son relaciones, $\iota`R \uparrow \iota`S$ es una relación de relaciones; y así sucesivamente.

Este número comienza por conectar productos y sumas $p`\kappa$, $s`\kappa$, $\dot{p}`\lambda$, $\dot{s}`\lambda$, en los casos donde se especifican los miembros de κ o de λ, con los productos o sumas $\alpha \cap \beta$, $\alpha \cup \beta$, $R \dot{\cap} S$, $R \dot{\cup} S$. Tenemos

***53·01.** $\vdash . p`\iota`\alpha = \alpha$

***53·1.** $\vdash . p`(\iota`\alpha \cup \iota`\beta) = \alpha \cap \beta$

***53·14.** $\vdash . p`(\kappa \cup \iota`\alpha) = p`\kappa \cap \alpha$

con proposiciones similares para s, $\dot{p}$ y $\dot{s}$.

A continuación tenemos un conjunto de proposiciones sobre sumas y productos de clases de clases unitarias. La más importante de éstas es

***53·22.** $\vdash . s`\iota``\alpha = \alpha$

Seguidamente, tenemos una proposición que muestra que la suma de κ es nula cuando, y sólo cuando, κ es nula o tiene a la clase nula como único elemento; esto es

***53·24.** $\vdash :. s`\kappa = \Lambda . \equiv : \kappa = \Lambda \cap \mathrm{Cls} . \vee . \kappa = \iota`\Lambda$

(Aquí escribimos "$\Lambda \cap \mathrm{Cls}$" para enseñar que la "$\Lambda$" en cuestión es del tipo inmediato superior a las de las otras dos $\Lambda`s$).

Tenemos a continuación varias proposiciones sobre las relaciones de $\overrightarrow{R}`x$ y $R`x$ y $R``\alpha$ en varios casos, primero para una relación general R, y después para la relación particular s definida en el *40. Tres de estas proposiciones se usan muy frecuentemente, a saber:

***53·3.** $\vdash : \mathrm{E}\,!\, R`x . \equiv . \overrightarrow{R}`x \in 1$

***53·301.** $\vdash . R``\iota`x = \overrightarrow{R}`x$

***53·31.** $\vdash : \mathrm{E}\,!\, R`x . \supset . R``\iota`x = \iota`R`x = \overrightarrow{R}`x$

Las restantes proposiciones de este número son de escasa importancia, y rara vez haremos referencia a ellas.

***53·01.** $\vdash . p`\iota`z = \alpha$

Dem.

$$\vdash . *40{\cdot}1 . \supset \vdash :. x \in p``\iota`\alpha . \equiv : \beta \in \iota`\alpha . \supset_\beta . x \in \beta :$$
$$[*51{\cdot}15] \qquad \equiv : \beta = \alpha . \supset_\beta . x \in \beta :$$
$$[*13{\cdot}191] \qquad \equiv : x \in \alpha :. \supset \vdash . \text{Prop}$$

***53·02.** $\vdash . s`\iota`\alpha = \alpha$

Dem.

$$\vdash . *40{\cdot}11 . \supset \vdash : x \in s`\iota`\alpha . \equiv . (\exists \beta) . \beta \in \iota`\alpha . x \in \beta .$$
$$[*51{\cdot}15] \qquad \equiv . (\exists \beta) . \beta = \alpha . x \in \beta .$$
$$[*13{\cdot}195] \qquad \equiv . x \in \alpha : \supset \vdash . \text{Prop}$$

***53·03.** $\vdash . \dot{p}`\iota`R = R$ [Proof as in *53·01]

***53·04.** $\vdash . \dot{s}`\iota`R = R$ [Proof as in *53·02]

***53·1.** $\vdash . p`(\iota`\alpha \cup \iota`\beta) = \alpha \cap \beta$

Dem.

$$\vdash . *40{\cdot}18 . \supset \vdash . p`(\iota`\alpha \cup \iota`\beta) = p`\iota`\alpha \cap p`\iota`\beta$$
$$[*53{\cdot}01] \qquad = \alpha \cap \beta . \supset \vdash . \text{Prop}$$

Esta proposición puede extenderse a $\iota`\alpha \cup \iota`\beta \cup \iota`\gamma$, etc. Muestra la conexión (para clases finitas de clases) entre el producto $p`\kappa$ y el producto de los miembros $\alpha \cap \beta \cap \gamma \cap \ldots$

***53·11.** $\vdash . s`(\iota`\alpha \cup \iota`\beta) = \alpha \cup \beta$

Dem.

$$\vdash . *40{\cdot}171 . \supset \vdash . s`(\iota`\alpha \cup \iota`\beta) = s`\iota`\alpha \cup s`\iota`\beta$$
$$[*53{\cdot}02] \qquad = \alpha \cup \beta . \supset \vdash . \text{Prop}$$

Aplicamos a esta proposición observaciones similares a las de la *53·1.

***53·12.** $\vdash . \dot{p}`(\iota`\dot{R} \cup \iota`S) = \dot{R} \dot{\cap} S$ [*41·18 . *53·03]

Esta proposición muestra la conexión entre el producto $\dot{p}`\kappa$ para una clase κ que consta de dos relaciones R y S, y el producto $\dot{R} \dot{\cap} S$. La proposición puede extenderse al producto de cualquier clase finita de relaciones

***53·13.** $\vdash . \dot{s}`(\iota`\dot{R} \cup \iota`S) = \dot{R} \cup S$ [*41·171 . *53·04]

Aplicamos a esta proposición observaciones similares a las de la *53·12.

***53·14.** $\vdash . p`(\kappa \cup \iota`\alpha) = p`\kappa \cap \alpha$

Dem.

$$\vdash . *40{\cdot}18 . \supset \vdash . p`(\kappa \cup \iota`\alpha) = p`\kappa \cap p`\iota`\alpha$$
$$[*53{\cdot}01] \qquad = p`\kappa \cap \alpha$$

***53·15.** $\vdash . s`(\kappa \cup \iota`\alpha) = s`\kappa \cup \alpha$ [Prueba como en la *53·14]

***53·16.** $\vdash . \dot{p}`(\lambda \cup \iota`\dot{R}) = \dot{p}`\lambda \dot{\cap} \dot{R}$ [Prueba como en la *53·14]

***53·17.** $\vdash . \dot{s}`(\lambda \cup \iota`\dot{R}) = \dot{s}`\lambda \cup \dot{R}$ [Prueba como en la *53·14]

La última proposición y la siguiente se usan en conexión con la inducción matemática (*91·55 y *97·46, respectivamente).

***53·18.** $\vdash . s`(\alpha - \iota`\Lambda) = s`\alpha$

Dem.

$\vdash . *51·221 . \supset \vdash : \Lambda \in \alpha . \quad \supset . (\alpha - \iota`\Lambda) \cup \iota`\Lambda = \alpha .$

[*53·15] $\supset . s`(\alpha - \iota`\Lambda) \cup \Lambda = s`\alpha .$

[*24·24] $\supset . s`(\alpha - \iota`\Lambda) = s`\alpha$ (1)

$\vdash . *51·222 . \supset \vdash : \Lambda \sim \in \alpha . \supset . \quad \alpha - \iota`\Lambda = \alpha .$

[*30·37] $\supset . s`(\alpha - \iota`\Lambda) = s`\alpha$ (2)

$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash .$ Prop

***53·181.** $\vdash . \dot{s}`(\lambda - \iota`\dot{\Lambda}) = \dot{s}`\lambda$ [Prueba como en la *53·18]

***53·2.** $\vdash : \kappa \in 1 . \supset . \breve{\iota}`\kappa = p`\kappa = s`\kappa$

Esta proposición requiere, para que sea significativa, que κ deba ser una clase de clases. Se usa en la *88·47, en el número sobre la existencia de relaciones y el axioma multiplicativo.

Dem.

$\vdash . *52·601 . \supset \vdash :: \mathrm{Hp} . \supset :. x \in \breve{\iota}`\kappa : \equiv : \alpha \in \kappa . \supset_\alpha . x \in \alpha : \equiv : (\exists \alpha) . \alpha \in \kappa . x \in \alpha$ (1)

$\vdash . (1) . *40·1·11 . \quad \supset \vdash .$ Prop

***53·21.** $\vdash : \lambda \in 1 . \supset . \breve{\iota}`\lambda = \dot{p}`\lambda = \dot{s}`\lambda$ [Prueba similar]

Esta proposición requiere, para que sea significativa, que λ sea una clase de relaciones.

***53·22.** $\vdash . s`\iota``\alpha = \alpha$

Dem.

$\vdash . *40·11 . \supset \vdash : x \in s`\iota``\alpha . \equiv . (\exists \gamma) . \gamma \in \iota``\alpha . x \in \gamma .$

[*37·64.*51·12] $\equiv . (\exists y) . y \in \alpha . x \in \iota`y .$

[*51·15] $\equiv . (\exists y) . y \in \alpha . x = y .$

[*13·195] $\equiv . x \in \alpha : \supset \vdash .$ Prop

***53·221.** $\vdash . \iota``(\iota`x \cup \iota`y) = \iota`\iota`x \cup \iota`\iota`y$

Dem.

$\vdash . *37·1 . \supset \vdash :. \alpha \in \iota``(\iota`x \cup \iota`y) . \equiv : (\exists z) . z \in (\iota`x \cup \iota`y) . \alpha \iota z :$

[*51·131] $\equiv : (\exists z) . z \in (\iota`x \cup \iota`y) . \alpha = \iota`z :$

[*51·235] $\equiv : \alpha = \iota`x . \vee . \alpha = \iota`y :$

[*51·232] $\equiv : \alpha \in (\iota`\iota`x \cup \iota`\iota`y) :. \supset \vdash .$ Prop

***53·222.** $\vdash : \kappa = \iota``\alpha . \supset . \alpha = \breve{\iota}``\kappa$

Dem.

$\vdash . *13·12 . *20·2 . \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \supset . \breve{\iota}``\kappa = \breve{\iota}``\iota``\alpha$

[*51·511.*14·21.*37·67] $= \hat{x} \{(\exists y) . y \in \alpha . x = \breve{\iota}`\iota`y\}$

[*51·511] $= \hat{x} \{(\exists y) . y \in \alpha . x = y\}$

[*13·195] $= \alpha : \supset \vdash .$ Prop

***53·23.** $\vdash : \kappa \subset 1 . \supset . s`\kappa = \breve{\iota}``\kappa$

Dem.

$\vdash . *52{\cdot}31 . \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \equiv . (\exists \alpha) . \kappa = \iota``\alpha$ (1)

$\vdash . *53{\cdot}22 . \supset \vdash : \kappa = \iota``\alpha . \supset . s`\kappa = \alpha$

$[*53{\cdot}222] \qquad = \breve{\iota}``\kappa$ (2)

$\vdash . (1) . (2) . *10{\cdot}11{\cdot}23 . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***53·231.** $\vdash :. x \in \alpha . \supset_x . x = y : \equiv : \alpha = \Lambda . \vee . \alpha = \iota`y$

Dem.

$\vdash . *51{\cdot}141 . \supset \vdash :. \exists ! \alpha : x \in \alpha . \supset_x . x = y : \equiv : \alpha = \iota`y$ (1)

$\vdash . *10{\cdot}53 . \quad \supset \vdash :. \sim \exists ! \alpha . \supset : x \in \alpha . \supset_x . x = y :.$

$[*4{\cdot}71] \qquad \supset \vdash :. \sim \exists ! \alpha : x \in \alpha . \supset_x . x = y : \equiv . \sim \exists ! \alpha .$

$[*24{\cdot}51] \qquad \equiv . \alpha = \Lambda$ (2)

$\vdash . (1) . (2) . *4{\cdot}42{\cdot}39 . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***53·24.** $\vdash :. s`\kappa = \Lambda . \equiv : \kappa = \Lambda \cap \mathrm{Cls} . \vee . \kappa = \iota`\Lambda$

Dem.

$\vdash . *24{\cdot}15 . *40{\cdot}11 . \supset$

$\vdash :. s`\kappa = \Lambda . \quad \equiv : (x) : \sim \{(\exists \alpha) . \alpha \in \kappa . x \in \alpha\} :$

$[*10{\cdot}51] \qquad \equiv : (x, \alpha) : x \in \alpha . \supset . \alpha \sim \in \kappa :$

$[*11{\cdot}2.*10{\cdot}23] \equiv : (\exists x) . x \in \alpha . \supset_\alpha . \alpha \sim \in \kappa :$

$[*24{\cdot}54] \qquad \equiv : \alpha \neq \Lambda . \supset_\alpha . \alpha \sim \in \kappa :$

$[\mathrm{Transp}] \qquad \equiv : \alpha \in \kappa . \supset_\alpha . \alpha = \Lambda :$

$[*53{\cdot}231] \qquad \equiv : \kappa = \Lambda \cap \mathrm{Cls} . \vee . \kappa = \iota`\Lambda :. \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

En la enunciación y en la última línea de la prueba de la última proposición, escribimos "$\kappa = \Lambda \cap \mathrm{Cls}$" mejor que "$\kappa = \Lambda$" porque esta Λ debe ser del tipo inmediatamente superior al de Λ en "$\kappa = \iota`\Lambda$".

La proposición siguiente se usa en la teoría de selecciones (*83·73).

***53·25.** $\vdash :. s`\kappa \cap s`\lambda = \Lambda . \supset : \kappa \cap \lambda = \Lambda \cap \mathrm{Cls} . \vee . \kappa \cap \lambda = \iota`\Lambda$

Dem.

$\vdash . *40\,181 . \supset \vdash :. \mathrm{Hp} . \supset : s`(\kappa \cap \lambda) = \Lambda :$

$[*53{\cdot}24] \qquad \supset : \kappa \cap \lambda = \Lambda \cap \mathrm{Cls} . \vee . \kappa \cap \lambda = \iota`\Lambda :. \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***53·3.** $\vdash : \mathrm{E} ! R`x . \equiv . \overrightarrow{R}`x \in 1$

Dem.

$\vdash . *30{\cdot}2 . \supset \vdash :. \mathrm{E} ! R`x . \equiv : (\exists b) : yRx . \equiv_y . y = b :$

$[*32{\cdot}18.*51{\cdot}15] \qquad \equiv : (\exists b) : y \in \overrightarrow{R}`x . \equiv_y . y \in \iota`b :$

$[*20{\cdot}31] \qquad \equiv : (\exists b) . \overrightarrow{R}`x = \iota`b :$

$[*52{\cdot}1] \qquad \equiv : \overrightarrow{R}`x \in 1 :. \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

Esta última proposición se usa muy frecuentemente.

***53·301.** $\vdash . R``\iota`x = \overrightarrow{R}`x$

Dem.

$\vdash . *37{\cdot}1 . *51{\cdot}15 . \supset \vdash : y \in R``\iota`x . \equiv . (\exists z) . z = x . yRz .$

$$[*13{\cdot}195] \qquad \equiv . yRx .$$

$$[*32{\cdot}18] \qquad \equiv . y \in \overrightarrow{R}`x : \supset \vdash . \text{Prop}$$

***53·302.** $\vdash . R``(\iota`x \cup \iota`y) = \overrightarrow{R}`x \cup \overrightarrow{R}`y \quad [*37{\cdot}22 . *53{\cdot}301]$

Esta proposición se usa en la fundamental teoría de la exponenciación (*116·71).

***53·31.** $\vdash : \text{E} ! R`x . \supset . R``\iota`x = \iota`R`x = \overrightarrow{R}`x$

Esta proposición es una de las de uso más frecuente en lo que sigue.

Dem.

$$\vdash . *51{\cdot}11 . *14{\cdot}18 . \supset \vdash : \text{Hp} . \supset . \iota`R`x = \hat{y}\,(y = R`x)$$

$$[*30{\cdot}4] \qquad = \hat{y}\,(yRx)$$

$$[*32{\cdot}13] \qquad = \overrightarrow{R}`x \qquad (1)$$

$$\vdash . (1) . *53{\cdot}301 . \quad \supset \vdash . \text{Prop}$$

***53·32.** $\vdash : \text{E} ! R`x . \text{E} ! R`y . \supset . R``(\iota`x \cup \iota`y) = \iota`R`x \cup \iota`R`y$

Dem.

$$\vdash . *37{\cdot}22 . \supset \vdash . R``(\iota`x \cup \iota`y) = R``\iota`x \cup R``\iota`y \qquad (1)$$

$$\vdash . (1) . *53{\cdot}31 . \supset \vdash . \text{Prop}$$

***53·33.** $\vdash . s``\iota`\kappa = \iota`s`\kappa \qquad \left[*53{\cdot}31\,\frac{s}{R}\right]$

***53·34.** $\vdash . s``(\iota`\kappa \cup \iota`\lambda) = \iota`s`\kappa \cup \iota`s`\lambda \qquad \left[*53{\cdot}32\,\frac{s}{R}\right]$

***53·35.** $\vdash . s`s``(\iota`\kappa \cup \iota`\lambda) = s`\kappa \cup s`\lambda = s`(\kappa \cup \lambda)$

Dem.

$$\vdash . *53{\cdot}34 . \supset \vdash . s`s``(\iota`\kappa \cup \iota`\lambda) = s`(\iota`s`\kappa \cup \iota`s`\lambda)$$

$$[*53{\cdot}11] \qquad = s`\kappa \cup s`\lambda$$

$$[*40{\cdot}171] \qquad = s`(\kappa \cup \lambda) . \supset \vdash . \text{Prop}$$

La última proposición también puede probarse así:

$$\vdash . *42{\cdot}1 . \supset \vdash . s`s``(\iota`\kappa \cup \iota`\lambda) = s`s`(\iota`\kappa \cup \iota`\lambda)$$

$$[*53{\cdot}11] \qquad = s`(\kappa \cup \lambda)$$

$$[*40{\cdot}171] \qquad = s`\kappa \cup s`\lambda . \supset \vdash . \text{Prop}$$

***53·4.** $\vdash : x = R`y . \equiv . \overrightarrow{R}`y \in 1 . x \in \overrightarrow{R}`y . \equiv . \iota`x = \overrightarrow{R}`y . \equiv . x = \breve{\iota}`\overrightarrow{R}`y$

Dem.

$$\vdash . *14{\cdot}21 . *4{\cdot}71 . \supset \vdash : x = R`y . \equiv . \text{E} ! R`y . x = R`y .$$

$$[*30{\cdot}4 . *5{\cdot}32] \qquad \equiv . \text{E} ! R`y . xRy .$$

$$[*53{\cdot}3 . *32{\cdot}18] \qquad \equiv . \overrightarrow{R}`y \in 1 . x \in \overrightarrow{R}`y . \qquad (1)$$

$$[*52{\cdot}6 . *5{\cdot}32] \qquad \equiv . \overrightarrow{R}`y \in 1 . \iota`x = \overrightarrow{R}`y .$$

$$[*52{\cdot}22] \qquad \equiv . \iota`x = \overrightarrow{R}`y . \qquad (2)$$

$$[*51{\cdot}51] \qquad \equiv . x = \breve{\iota}`\overrightarrow{R}`y \qquad (3)$$

$$\vdash . (1) . (2) . (3) . \quad \supset \vdash . \text{Prop}$$

***53·5.** $\vdash : \exists ! \alpha . \equiv . \alpha \in \mathrm{Cls} - \iota`\Lambda$

Dem.

$$\vdash . *20{\cdot}41 . \supset \vdash : \exists ! \hat{z}(\phi z) . \equiv . \hat{z}(\phi z) \in \mathrm{Cls} . \exists ! \hat{z}(\phi z) .$$
$$[*24{\cdot}54] \qquad \equiv . \hat{z}(\phi z) \in \mathrm{Cls} . \hat{z}(\phi z) \neq \Lambda .$$
$$[*51{\cdot}3] \qquad \equiv . \hat{z}(\phi z) \in \mathrm{Cls} - \iota`\Lambda : \supset \vdash . \mathrm{Prop}$$

En la última prueba, así como donde usualmente se presentan "Cls" u otro tipo de símbolos, es preciso abandonar la notación con letras griegas y volver a la notación explícita.

***53·51.** $\vdash : \dot{\exists} ! R . \equiv . R \in \mathrm{Rel} - \iota`\dot{\Lambda}$ [Prueba como en la *53·5]

***53·52.** $\vdash : \alpha \in \kappa . \exists ! \alpha . \equiv . \alpha \in \kappa - \iota`\Lambda$

Dem.

$$\vdash . *24{\cdot}54 . \supset \vdash : \alpha \in \kappa . \exists ! \alpha . \equiv . \alpha \in \kappa . \alpha \neq \Lambda .$$
$$[*51{\cdot}3] \qquad \equiv . \alpha \in \kappa - \iota`\Lambda : \supset \vdash . \mathrm{Prop}$$

***53·53.** $\vdash : R \in \lambda . \dot{\exists} ! R . \equiv . R \in \lambda - \iota`\dot{\Lambda}$ [Prueba como en la *53·52]

Las proposiciones siguientes se incluyen aquí debido a su conexión con la definición de $\alpha \to \beta$ en el *70. $\overrightarrow{R}``\mathrm{C}`R$ y $\overrightarrow{R}``\mathrm{V}$ son clases importantes.

***53·6.** $\vdash : R = \dot{\Lambda} . \exists ! \alpha . \supset . \overrightarrow{R}``\alpha = \iota`\Lambda . \overleftarrow{R}``\alpha = \iota`\Lambda$

Dem.

$$\vdash . *33{\cdot}15{\cdot}241 . *24{\cdot}13 . \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \supset . \overrightarrow{R}`x = \Lambda \qquad (1)$$
$$\vdash . (1) . *37{\cdot}7 . \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \supset . \overrightarrow{R}``\alpha = \hat{\beta}\{(\exists x) . x \in \alpha . \beta = \Lambda\}$$
$$[*10{\cdot}35] \qquad = \hat{\beta}\{\exists ! \alpha . \beta = \Lambda\}$$
$$[*4{\cdot}73] \qquad = \hat{\beta}(\beta = \Lambda)$$
$$[*51{\cdot}11] \qquad = \iota`\Lambda \qquad (2)$$
$$\text{Similarly} \qquad \vdash : \mathrm{Hp} . \supset . \overleftarrow{R}``\alpha = \iota`\Lambda \qquad (3)$$
$$\vdash . (2) . (3) . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$$

***53·601.** $\vdash : \exists ! \alpha . \alpha \cap \mathrm{C}`R = \Lambda . \supset . \overrightarrow{R}``\alpha = \iota`\Lambda$

Dem.

$$\vdash . *33{\cdot}41 . \qquad \supset \vdash : \mathrm{Hp} . x \in \alpha . \supset . \overrightarrow{R}`x = \Lambda \qquad (1)$$
$$\vdash . (1) . *37{\cdot}7 . \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \supset . \overrightarrow{R}``\alpha = \hat{\beta}\{(\exists x) . x \in \alpha . \beta = \Lambda\}$$
$$[*10{\cdot}35] \qquad = \hat{\beta}\{\exists ! \alpha . \beta = \Lambda\}$$
$$[*4{\cdot}73.*51{\cdot}11] \qquad = \iota`\Lambda : \supset \vdash . \mathrm{Prop}$$

***53·602.** $\vdash : \exists ! \alpha . \alpha \cap \mathrm{D}`R = \Lambda . \supset . \overleftarrow{R}``\alpha = \iota`\Lambda$ [Prueba como en la *53·601]

***53·603.** $\vdash : \exists ! - \mathrm{C}`R . \supset . \overrightarrow{R}``(- \mathrm{C}`R) = \iota`\Lambda$ [*24·21 . *53·601]

***53·604.** $\vdash : \exists ! - \mathrm{D}`R . \supset . \overleftarrow{R}``(- \mathrm{D}`R) = \iota`\Lambda$ [*24·21 . *53·602]

***53·61.** $\vdash : \mathrm{C}`R \subset \alpha . \mathrm{C}`R \neq \alpha . \supset . \overrightarrow{R}``\alpha = \overrightarrow{R}``\mathrm{C}`R \cup \iota`\Lambda$

Dem.

$$\vdash . *22{\cdot}92 . \qquad \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \supset . \alpha = \mathrm{C}`R \cup (\alpha - \mathrm{C}`R) \qquad (1)$$

$\vdash .*24{\cdot}6 . \quad \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \supset . \exists ! \alpha - \mathrm{C}`R .$

$[*24{\cdot}21.*53{\cdot}601] \quad \supset . \overrightarrow{R}`` (\alpha - \mathrm{C}`R) = \iota`\Lambda \qquad (2)$

$\vdash .(1) .*37{\cdot}22 . \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \supset . \overrightarrow{R}``\alpha = \overrightarrow{R}``\mathrm{C}`R \cup \overrightarrow{R}``(\alpha - \mathrm{C}`R)$

$[(2)] \quad = \overrightarrow{R}``\mathrm{C}`R \cup \iota`\Lambda : \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***53·611.** $\vdash : \mathrm{D}`R \subset \alpha . \mathrm{D}`R \neq \alpha . \supset . \overleftarrow{R}``\alpha = \overleftarrow{R}``\mathrm{D}`R \cup \iota`\Lambda$ [Prueba como en la *53·61]

***53·612.** $\vdash : \mathrm{C}`R \neq \mathrm{V} . \supset . \overrightarrow{R}``\mathrm{V} = \overrightarrow{R}``\mathrm{C}`R \cup \iota`\Lambda$ [*53·61 . *24·11]

***53·613.** $\vdash : \mathrm{D}`R \neq \mathrm{V} . \supset . \overleftarrow{R}``\mathrm{V} = \overleftarrow{R}``\mathrm{D}`R \cup \iota`\Lambda$ [*53·611 . *24·11]

***53·614.** $\vdash . \overrightarrow{R}``\mathrm{C}`R = \overrightarrow{R}``\mathrm{V} - \iota`\Lambda$

Dem.

$\vdash .*53{\cdot}612 .*22{\cdot}68 .*24{\cdot}21 . \supset$

$\vdash : \mathrm{C}`R \neq \mathrm{V} . \supset . \overrightarrow{R}``\mathrm{V} - \iota`\Lambda = \overrightarrow{R}``\mathrm{C}`R - \iota`\Lambda \qquad (1)$

$\vdash .*22{\cdot}481 . \supset \vdash : \mathrm{C}`R = \mathrm{V} . \supset . \overrightarrow{R}``\mathrm{V} - \iota`\Lambda = \overrightarrow{R}``\mathrm{C}`R - \iota`\Lambda \qquad (2)$

$\vdash .*37{\cdot}772 .*51{\cdot}36 .*22{\cdot}621 . \supset \vdash . \overrightarrow{R}``\mathrm{C}`R - \iota`\Lambda = \overrightarrow{R}``\mathrm{C}`R \qquad (3)$

$\vdash .(1) .(2) .(3) . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***53·615.** $\vdash . \overleftarrow{R}``\mathrm{D}`R = \overleftarrow{R}``\mathrm{V} - \iota`\Lambda$ [Prueba como en la *53·614]

Las dos siguientes proposiciones se usan en la *70·12.

***53·62.** $\vdash : \overrightarrow{R}``\mathrm{C}`R \subset \gamma . \equiv . \overrightarrow{R}``\mathrm{V} \subset \gamma \cup \iota`\Lambda$

Dem.

$\vdash .*53{\cdot}614 . \supset \vdash : \overrightarrow{R}``\mathrm{C}`R \subset \gamma . \equiv . \overrightarrow{R}``\mathrm{V} - \iota`\Lambda \subset \gamma .$

$[*24{\cdot}43] \quad \equiv . \overrightarrow{R}``\mathrm{V} \subset \gamma \cup \iota`\Lambda : \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***53·621.** $\vdash : \overleftarrow{R}``\mathrm{D}`R \subset \gamma . \equiv . \overleftarrow{R}``\mathrm{V} \subset \gamma \cup \iota`\Lambda$ [Prueba como en la *53·62]

***53·63.** $\vdash : \mathrm{C}`R \neq \mathrm{V} . \supset . \mathrm{D}`\overrightarrow{R} = \overrightarrow{R}``\mathrm{C}`R \cup \iota`\Lambda$ [*37·78 . *53·612]

***53·631.** $\vdash : \mathrm{D}`R \neq \mathrm{V} . \supset . \mathrm{D}`\overleftarrow{R} = \overleftarrow{R}``\mathrm{D}`R \cup \iota`\Lambda$ [*37·781 . *53·613]

***53·64.** $\vdash : \mathrm{C}`R = \mathrm{V} . \supset . \mathrm{D}`\overrightarrow{R} = \overrightarrow{R}``\mathrm{C}`R$ [*37·78]

***53·641.** $\vdash : \mathrm{D}`R = \mathrm{V} . \supset . \mathrm{D}`\overleftarrow{R} = \overleftarrow{R}``\mathrm{D}`R$ [*37·781]

*54. PARES CARDINALES

Sumario del *54.

Los pares son de dos tipos, a saber 1) $\iota'x \cup \iota'y$, en el cual no existe un orden entre la x y la y, y 2) $\iota'x \uparrow \iota'y$, en el que hay un orden. Podemos diferenciar entre estos dos tipos de pares como cardinales y ordinales, respectivamente, ya que (como se verá más adelante) la clase de todos los pares de la forma $\iota'x \cup \iota'y$ (en donde $x \neq y$) es el número cardinal 2, mientras que la clase de todos los pares de la forma $\iota'x \uparrow \iota'y$ (en donde $x \neq y$) es el número ordinal 2, al que, con objeto de distinguirlo, le asignamos el símbolo "2_r", en donde el sufijo "r" significa "relacional", dado que el ordinal 2 es una clase de relaciones. En éste y en los siguientes números, definiremos el 2 y el 2_r como las clases de pares cardinales y ordinales, respectivamente, dejando para más adelante el mostrar que 2 y 2_r, tal como se definieron son, respectivamente, un número cardinal y ordinal. A un par ordinal también se le llamará *par ordenado* o bien *par con un sentido.* Así, pues, un par con un sentido es un par del cual uno viene primero y el otro segundo.

Introducimos aquí el número cardinal 0, definido como $\iota'\Lambda$. Que el 0 así definido sea un número cardinal se probará en una etapa posterior; por el momento, posponemos la prueba de que el 0 así definido goza de las propiedades aritméticas del cero.

Los pares cardinales son mucho menos importantes, aún en la aritmética cardinal, que los pares ordinales, que se considerarán en los números siguientes (*55 y *56). Es preciso, sin embargo, probar algunas de las propiedades de los pares cardinales, cosa que se hará en este número. Algunas propiedades de los pares cardinales que ya han sido probados se repiten aquí por conveniencia de la referencia. Las definiciones del 0 y del 2 son:

***54·01.** $0 = \iota'\Lambda$ Df

***54·02.** $2 = \hat{\alpha}\{(\exists x, y) . x \neq y . \alpha = \iota'x \cup \iota'y\}$ Df

Muchas de las proposiciones de este número, excepto aquellas que únicamente incorporan las definiciones (*54·1·101·102) se usan muy pocas veces. Entre las más importantes están las que vienen a continuación

***54·26.** $\vdash : \iota'x \cup \iota'y \in 2 . \equiv . x \neq y$

***54·3.** $\vdash . 2 = \hat{\alpha}\{(\exists x) . x \in \alpha . \alpha - \iota'x \in 1\}$

***54·4.** $\vdash :. \beta \subset \iota'x \cup \iota'y . \equiv : \beta = \Lambda . \vee . \beta = \iota'x . \vee . \beta = \iota'y . \vee . \beta = \iota'x \cup \iota'y$

***54·53.** $\vdash : \alpha \in 2 . x, y \in \alpha . x \neq y . \supset . \alpha = \iota'x \cup \iota'y$

***54·56.** $\vdash : \alpha \sim \in 0 \cup 1 \cup 2 . \equiv . (\exists x, y, z) . x, y, z \in \alpha . x \neq y . x \neq z . y \neq z$

***54·01.** $0 = \iota'\Lambda$ Df

***54·02.** $2 = \hat{\alpha}\{(\exists x, y) . x \neq y . \alpha = \iota'x \cup \iota'y\}$ Df

***54·1.** $\vdash . 0 = \iota'\Lambda$ [(*54·01)]

***54·101.** $\vdash : \alpha \in 2 . \equiv . (\exists x, y) . x \neq y . \alpha = \iota'x \cup \iota'y$ [(*54·02)]

***54·102.** $\vdash : \alpha \in 0 . \equiv . \alpha = \Lambda$ [*54·1]

Las dos proposiciones siguientes ya aparecieron en el *51, pero se repiten aquí porque pertenecen al objeto de este número.

***54·21.** $\vdash : \iota'x \cup \iota'y = \iota'x \cup \iota'z . \equiv . y = z$ [*51·41]

***54·22.** $\vdash :. \iota'x \cup \iota'y = \iota'z \cup \iota'w . \equiv : x = z . y = w . \vee . x = w . y = z$ [*51·43]

***54·25.** $\vdash : \iota'x \cup \iota'y \in 1 . \equiv . x = y$

Dem.

$\vdash . *52·46·1 . *22·58 . \supset \vdash : \iota'x \cup \iota'y \in 1 . \supset . \iota'x \cup \iota'y = \iota'x . \iota'x \cup \iota'y = \iota'y .$

[*20·23] $\supset . \iota'x = \iota'y$ (1)

$\vdash . *22·56 . \supset \vdash : \iota'x = \iota'y . \supset . \iota'x \cup \iota'y = \iota'x .$

[*52·22] $\supset . \iota'x \cup \iota'y \in 1$ (2)

$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash : \iota'x \cup \iota'y \in 1 . \equiv . \iota'x = \iota'y .$

[*51·23] $\equiv . x = y : \supset \vdash .$ Prop

***54·26.** $\vdash : \iota'x \cup \iota'y \in 2 . \equiv . x \neq y$

Dem.

$\vdash . *54·101 . \supset \vdash :: \iota'x \cup \iota'y \in 2 .$

$\equiv :. (\exists z, w) . z \neq w . \iota'x \cup \iota'y = \iota'z \cup \iota'w :.$

[*54·22] $\equiv :. (\exists z, w) : z \neq w : x = z . y = w . \vee . x = w . y = z :.$

[*4·4.*11·41] $\equiv :. (\exists z, w) . z \neq w . x = z . y = w . \vee . (\exists z, w) . z \neq w . x = w . y = z :.$

[*13·22] $\equiv :. x \neq y . \vee . y \neq x :.$

[*13·16] $\equiv :. x \neq y :: \supset \vdash .$ Prop

***54·27.** $\vdash . \iota'x \cup \iota'y \in 1 \cup 2$ [*54·25·26]

***54·271.** $\vdash . 1 \cup 2 = \hat{\alpha}\{(\exists x, y) . \alpha = \iota'x \cup \iota'y\}$

Dem.

$\vdash . *4·42 . \supset$

$\vdash :. \alpha = \iota'x \cup \iota'y . \equiv : x = y . \alpha = \iota'x \cup \iota'y . \vee . x \neq y . \alpha = \iota'x \cup \iota'y$ (1)

$\vdash . (1) . *11·11·341·41 . \supset \vdash :. (\exists x, y) . \alpha = \iota'x \cup \iota'y .$

$\equiv : (\exists x, y) . x = y . \alpha = \iota'x \cup \iota'y . \vee . (\exists x, y) . x \neq y . \alpha = \iota'x \cup \iota'y :$

[*13·195] $\equiv : (\exists x) . \alpha = \iota'x \cup \iota'x . \vee . (\exists x, y) . x \neq y . \alpha = \iota'x \cup \iota'y :$

[*22·56] $\equiv : (\exists x) . \alpha = \iota'x . \vee . (\exists x, y) . x \neq y . \alpha = \iota'x \cup \iota'y :$

[*52·1.*54·101] $\equiv : \alpha \in 1 . \vee . \alpha \in 2 :$

[*22·34] $\equiv : \alpha \in 1 \cup 2 :. \supset \vdash .$ Prop

***54·3.** $\vdash . 2 = \hat{\alpha}\{(\exists x) . x \in \alpha . \alpha - \iota'x \in 1\}$

Dem.

$\vdash .*52{\cdot}1 . *10{\cdot}35 . \supset$

$\vdash : (\exists x) . x \in \alpha . \alpha - \iota`x \in 1 . \equiv . (\exists x, y) . x \in \alpha . \alpha - \iota`x = \iota`y .$

$\left[*51{\cdot}22 \frac{\iota`y, \alpha}{\alpha, \beta}\right] \qquad \equiv . (\exists x, y) . \iota`x \cap \iota`y = \Lambda . \iota`x \cup \iota`y = \alpha .$

[*51·231.*54·101] $\qquad \equiv . \alpha \in 2 : \supset \vdash . \text{Prop}$

***54·4.** $\vdash :. \beta \subset \iota`x \cup \iota`y . \equiv : \beta = \Lambda . \vee . \beta = \iota`x . \vee . \beta = \iota`y . \vee . \beta = \iota`x \cup \iota`y$

Dem.

$\vdash . *51{\cdot}2 . \quad \supset \vdash : x, y \in \beta . \supset . \iota`x \cup \iota`y \subset \beta :$

[Fact] $\quad \supset \vdash : \beta \subset \iota`x \cup \iota`y . x, y \in \beta . \supset . \beta \subset \iota`x \cup \iota`y . \iota`x \cup \iota`y \subset \beta .$

[*22·41] $\qquad \supset . \beta = \iota`x \cup \iota`y \qquad (1)$

$\vdash . *51{\cdot}25 . \supset \vdash :. \beta \subset \iota`x \cup \iota`y . y \sim \in \beta . \supset : \beta \subset \iota`x :$

[*51·401] $\qquad \supset : \beta = \Lambda . \vee . \beta = \iota`x \qquad (2)$

Similarmente $\quad \vdash :. \beta \subset \iota`x \cup \iota`y . x \sim \in \beta . \supset : \beta = \Lambda . \vee . \beta = \iota`y \qquad (3)$

$\vdash . (2) . (3) . *3{\cdot}48 . \supset$

$\vdash :. \beta \subset \iota`x \cup \iota`y . \sim (x, y \in \beta) . \supset : \beta = \Lambda . \vee . \beta = \iota`x . \vee . \beta = \iota`y \qquad (4)$

$\vdash . (1) . (4) . *34{\cdot}8 . \supset$

$\vdash :. \beta \subset \iota`x \cup \iota`y . \supset : \beta = \Lambda . \vee . \beta = \iota`x . \vee . \beta = \iota`y . \vee . \beta = \iota`x \cup \iota`y \qquad (5)$

$\vdash . *24{\cdot}12 . *22{\cdot}58{\cdot}42 . \supset$

$\vdash :. \beta = \Lambda . \vee . \beta = \iota`x . \vee . \beta = \iota`y . \vee . \beta = \iota`x \cup \iota`y : \supset . \beta \subset \iota`x \cup \iota`y \qquad (6)$

$\vdash . (5) . (6) . \supset \vdash . \text{Prop}$

Esta proposición muestra que una clase contenida en un par o es una clase nula, o la clase unitaria, o el par mismo; de lo cual resulta que el 0 y el 1 son los únicos números que son menores que 2.

***54·41.** $\vdash :: \alpha \in 2 . \supset :. \beta \subset \alpha . \supset : \beta = \Lambda . \vee . \beta \in 1 . \vee . \beta \in 2$

Dem.

$\vdash . *52{\cdot}1 . \quad \supset \vdash :. \beta = \iota`x . \vee . \beta = \iota`y : \supset . \beta \in 1$

$\vdash . *54{\cdot}26 . \supset \vdash :. x \neq y . \supset : \beta = \iota`x \cup \iota`y . \supset . \beta \in 2 \qquad (1)$

$\vdash . (1) . (2) . *54{\cdot}4 . \supset \qquad (2)$

$\vdash :: x \neq y . \supset :. \beta \subset \iota`x \cup \iota`y . \supset : \beta = \Lambda . \vee . \beta \in 1 . \vee . \beta \in 2 ::$

[*13·12] $\supset \vdash :: \alpha = \iota`x \cup \iota`y . x \neq y . \supset :. \beta \subset \alpha . \supset : \beta = \Lambda . \vee . \beta \in 1 . \vee . \beta \in 2 ::$

[11·11·35] $\supset$

$\vdash :. (\exists x, y) . \alpha = \iota`x \cup \iota`y . x \neq y . \supset :. \beta \subset \alpha : \beta = \Lambda . \vee . \beta \in 1 . \vee . \beta \in 2$

$\vdash . (3) . *54{\cdot}101 . \supset \vdash . \text{Prop} \qquad (3)$

54·411. $\vdash :. \alpha \in 2 . \supset : \beta \subset \alpha . \supset . \beta \in 0 \cup 1 \cup 2 \quad [*54{\cdot}41{\cdot}102]$

***54·42.** $\vdash :: \alpha \in 2 . \supset :. \beta \subset \alpha . \exists ! \beta . \beta \neq \alpha . \equiv . \beta \in \iota``\alpha$

Dem.

$\vdash . *54{\cdot}4 . \quad \supset \vdash :: \alpha = \iota`x \cup \iota`y . \supset :.$

$\beta \subset \alpha . \exists ! \beta . \equiv : \beta = \Lambda . \vee . \beta = \iota`x . \vee . \beta = \iota`y . \vee . \beta = \alpha : \exists ! \beta :$

[*24·53·56.*51·161] $\qquad \equiv : \beta = \iota`x . \vee . \beta = \iota`y . \vee . \beta = \alpha \qquad (1)$

$\vdash .$ *54·25 . Transp . *52·22 . $\supset \vdash : x \neq y . \supset . \iota'x \cup \iota'y \neq \iota'x . \iota'x \cup \iota'y \neq \iota'y :$

[*13·12] $\supset \vdash : \alpha = \iota'x \cup \iota'y . x \neq y . \supset . \alpha \neq \iota'x . \alpha \neq \iota'y$ (2)

$\vdash .(1).(2). \supset \vdash :: \alpha = \iota'x \cup \iota'y . x \neq y . \supset :.$

$\beta \subset \alpha . \exists ! \beta . \beta \neq \alpha . \equiv : \beta = \iota'x . \vee . \beta = \iota'y :$

[*51·235] $\equiv : (\exists z) . z \in \alpha . \beta = \iota'z :$

[*37·6] $\equiv : \beta \in \iota''\alpha$ (3)

$\vdash .(3). *11·11·35 . *54·101 . \supset \vdash .$ Prop

***54·43.** $\vdash :. \alpha, \beta \in 1 . \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda . \equiv . \alpha \cup \beta \in 2$

Dem.

$\vdash . *54·26 . \supset \vdash :. \alpha = \iota'x . \beta = \iota'y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . x \neq y .$

[*51·231] $\equiv . \iota'x \cap \iota'y = \Lambda .$

[*13·12] $\equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda$ (1)

$\vdash .(1). *11·11·35 . \supset$

$\vdash :. (\exists x, y) . \alpha = \iota'x . \beta = \iota'y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda$ (2)

$\vdash .(2). *11·54 . *52·1 . \supset \vdash .$ Prop

A partir de esta proposición resulta, cuando se haya definido la suma aritmética, que $1 + 1 = 2$.

***54·44.** $\vdash :. z, w \in \iota'x \cup \iota'y . \supset_{z,w} . \phi(z,w) : \equiv . \phi(x,x) . \phi(x,y) . \phi(y,x) . \phi(y,y)$

Dem.

$\vdash . *51·234 . *11·62 . \supset \vdash :. z, w \in \iota'x \cup \iota'y . \supset_{z,w} . \phi(z,w) : \equiv :$

$z \in \iota'x \cup \iota'y . \supset_z . \phi(z,z) . \phi(z,y) :$

[*51·234.*10·29] $\equiv : \phi(x,x) . \phi(x,y) . \phi(y,x) . \phi(y,y) :. \supset \vdash .$ Prop

***54·441.** $\vdash :: z, w \in \iota'x \cup \iota'y . z \neq w . \supset_{z,w} . \phi(z,w) : \equiv :. x = y : \vee : \phi(x,y) . \phi(y,x)$

Dem.

$\vdash . *5·6 . \supset \vdash :: z, w \in \iota'x \cup \iota'y . z \neq w . \supset_{z,w} . \phi(z,w) : \equiv :.$

$z, w \in \iota'x \cup \iota'y . \supset_{z,w} : z = w . \vee . \phi(z,w) :.$

[*54·44] $\equiv : x = x . \vee . \phi(x,x) : x = y . \vee . \phi(x,y) :$

$y = x . \vee . \phi(y,x) : y = y . \vee . \phi(y,y) :$

[*13·15] $\equiv : x = y . \vee . \phi(x,y) : y = x . \vee . \phi(y,x) :$

[*13·16.*4·41] $\equiv : x = y . \vee . \phi(x,y) . \phi(y,x)$

Esta proposición se usa en la *163·42, en la teoría de relaciones de relaciones mútuamente exclusivas.

***54·442.** $\vdash :: x \neq y . \supset :. z, w \in \iota'x \cup \iota'y . z \neq w . \supset_{z,w} . \phi(z,w) : \equiv . \phi(x,y) . \phi(y,x)$ [*54·441]

***54·443.** $\vdash :: x \neq y : \phi(x,y) . \equiv . \phi(y,x) : \supset :.$

$z, w \in \iota'x \cup \iota'y . z \neq w . \supset_{z,w} . \phi(z,w) : \equiv . \phi(x,y)$ [*54·442]

***54·45.** $\vdash :. (\exists z, w) . z, w \in \iota'x \cup \iota'y . \phi(z,w) .$

$\equiv : \phi(x,x) . \vee . \phi(x,y) . \vee . \phi(y,x) . \vee . \phi(y,y)$ [*51·235]

***54·451.** $\vdash :: \sim\phi(x,x) . \sim\phi(y,y) . \supset :. (\exists z, w) . z, w \in \iota'x \cup \iota'y . \phi(z,w) .$

$\equiv : \phi(x,y) . \vee . \phi(y,x)$ [*54·45]

***54·452.** $\vdash :: \sim \phi(x,x) . \sim \phi(y,y) : \phi(x,y) . \equiv . \phi(y,x) : \supset :$
$(\exists z, w) . z, w \in \iota`x \cup \iota`y . \phi(z,w) . \equiv . \phi(x,y)$ [*54·451]

***54·46.** $\vdash : (\exists z, w) . z, w \in \iota`x \cup \iota`y . z \neq w . \equiv . x \neq y$ [*54·452 . *13·15·16]

***54·5.** $\vdash :. \alpha \in 2 . \supset : \alpha \subset \iota`z \cup \iota`w . \equiv . \alpha = \iota`z \cup \iota`w$

Dem.

$\vdash . *54·4 . \supset$
$\vdash :. \alpha \subset \iota`z \cup \iota`w . \supset : \alpha = \Lambda . \vee . \alpha = \iota`z . \vee . \alpha = \iota`w . \vee . \alpha = \iota`z \cup \iota`w$ (1)
$\vdash . *54·3 . *24·54 . \quad \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \supset . \alpha \neq \Lambda$ (2)
$\vdash . *54·26 \frac{z,z}{x,y} . *13·15 . \quad \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \supset . \alpha \neq \iota`z$ (3)
$\vdash . (3) \frac{w}{z} . \quad \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \supset . \alpha \neq \iota`w$ (4)
$\vdash . (1) . (2) . (3) . (4) . *2·53 . \supset \vdash :. \mathrm{Hp} . \supset : \alpha \subset \iota`z \cup \iota`w . \supset . \alpha = \iota`z \cup \iota`w$ (5)
$\vdash . *22·42 . \quad \supset \vdash : \alpha = \iota`z \cup \iota`w . \supset . \alpha \subset \iota`z \cup \iota`w$ (6)
$\vdash . (5) . (6) . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***54·51.** $\vdash :. \alpha \in 2 . \beta \in 1 \cup 2 . \supset : \alpha \subset \beta . \equiv . \alpha = \beta$

Dem.

$\vdash . *54·5 . \supset \vdash :. \alpha \in 2 . \beta = \iota`z \cup \iota`w . \supset : \alpha \subset \beta . \equiv . \alpha = \beta$ (1)
$\vdash . (1) . *11·11·35·45 . \supset$
$\vdash :. \alpha \in 2 : (\exists z, w) . \beta = \iota`z \cup \iota`w : \supset : \alpha \subset \beta . \equiv . \alpha = \beta$ (2)
$\vdash . (2) . *54·271 . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***54·52.** $\vdash :. \alpha, \beta \in 2 . \supset : \alpha \subset \beta . \equiv . \alpha = \beta . \equiv . \beta \subset \alpha$ [*54·51]

***54·53.** $\vdash : \alpha \in 2 . x, y \in \alpha . x \neq y . \supset . \alpha = \iota`x \cup \iota`y$

Dem.

$\vdash . *51·2 . \quad \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \supset . \iota`x \subset \alpha . \iota`y \subset \alpha .$
[*22·59] $\supset . \iota`x \cup \iota`y \subset \alpha$ (1)
$\vdash . *54·26 . \quad \supset \vdash : \mathrm{Hp} . \supset . \iota`x \cup \iota`y \in 2$ (2)
$\vdash . (1) . (2) . *54·52 . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***54·531.** $\vdash :. \alpha \in 2 . \supset : x, y \in \alpha . x \neq y . \equiv . \alpha = \iota`x \cup \iota`y$

Dem.

$\vdash . *54·53 . \mathrm{Exp} . \supset \vdash :. \alpha \in 2 . \supset : x, y \in \alpha . x \neq y . \supset . \alpha = \iota`x \cup \iota`y$ (1)
$\vdash . *54·26 . \quad \supset \vdash :. \alpha \in 2 . \supset : \alpha = \iota`x \cup \iota`y . \supset . x \neq y$ (2)
$\vdash . *51·16 . \quad \supset \vdash : \alpha = \iota`x \cup \iota`y . \supset . x, y \in \alpha$ (3)
$\vdash . (2) . (3) . \quad \supset \vdash :. \alpha \in 2 . \supset : \alpha = \iota`x \cup \iota`y . \supset . x, y \in \alpha . x \neq y$ (4)
$\vdash . (1) . (4) . \quad \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***54·54.** $\vdash :. \alpha \in 2 . \equiv : x, y \in \alpha . x \neq y . \supset_{x,y} . \alpha = \iota`x \cup \iota`y : (\exists x, y) . x, y \in \alpha . x \neq y$

Dem.

$\vdash . *54·531 . *11·11·3 . \supset \vdash :. \alpha \in 2 . \supset : x, y \in \alpha . x \neq y . \supset_{x,y} . \alpha = \iota`x \cup \iota`y$ (1)
$\vdash . *51·16 . *54·101 . \quad \supset \vdash : \alpha \in 2 . \supset . (\exists x, y) . x, y \in \alpha . x \neq y$ (2)
$\vdash . *5·3 . *3·27 . \quad \supset \vdash :. x, y \in \alpha . x \neq y . \supset . \alpha = \iota`x \cup \iota`y : \supset :$
$x, y \in \alpha . x \neq y . \supset . x \neq y . \alpha = \iota`x \cup \iota`y :.$

$$[*11{\cdot}11{\cdot}32{\cdot}34] \qquad \supset \vdash :. x, y \in \alpha \,.\, x \neq y \,.\, \supset_{x,y} \,.\, \alpha = \iota`x \cup \iota`y : \supset :$$
$$(\exists x, y) \,.\, x, y \in \alpha \,.\, x \neq y \,.\, \supset \,.\, (\exists x, y) \,.\, x \neq y \,.\, \alpha = \iota`x \cup \iota`y \tag{3}$$
$$\vdash .(3) .\mathrm{Imp} .*54{\cdot}101 .\supset \vdash :. x, y \in \alpha \,.\, x \neq y \,.\, \supset_{x,y} \,.\, \alpha = \iota`x \cup \iota`y :$$
$$(\exists x, y) \,.\, x, y \in \alpha \,.\, x \neq y : \supset \,.\, \alpha \in 2 \tag{4}$$
$$\vdash .(1) .(2) .(4) . \qquad \supset \vdash .\mathrm{Prop}$$

En la última proposición, "$x, y \in \alpha \,.\, x \neq y \,.\, \supset_{x,y} \,.\, \alpha = \iota`x \cup \iota`y$" asegura que α no tiene *más* que dos miembros, mientras que "$(\exists x, y) \,.\, x, y \in \alpha \,.\, x \neq y$" asegura que α no tiene *menos* que dos miembros.

***54·55.** $\vdash .0 \cup 1 \cup 2 = \hat{\alpha}\{x, y \in \alpha \,.\, x \neq y \,.\, \supset_{x,y} \,.\, \alpha = \iota`x \cup \iota`y\}$

Dem.

$$\vdash .*4{\cdot}42 . \quad \supset \vdash :: x, y \in \alpha \,.\, x \neq y \,.\, \supset_{x,y} \,.\, \alpha = \iota`x \cup \iota`y : \equiv :.$$
$$x, y \in \alpha \,.\, x \neq y \,.\, \supset_{x,y} \,.\, \alpha = \iota`x \cup \iota`y : \sim (\exists x, y) \,.\, x, y \in \alpha \,.\, x \neq y :.$$
$$\vee :. x, y \in \alpha \,.\, x \neq y \,.\, \supset_{x,y} \,.\, \alpha = \iota`x \cup \iota`y : (\exists x, y) \,.\, x, y \in \alpha \,.\, x \neq y \tag{1}$$
$$\vdash .*11{\cdot}63 .\supset \vdash :. \sim (\exists x, y) \,.\, x, y \in \alpha \,.\, x \neq y \,.\, \supset : x, y \in \alpha \,.\, x \neq y \,.\, \supset_{x,y} \,.\, \alpha = \iota`x \cup \iota`y :.$$
$$[*4{\cdot}71] \qquad \supset \vdash :. x, y \in \alpha \,.\, x \neq y \,.\, \supset_{x,y} \,.\, \alpha = \iota`x \cup \iota`y : \sim (\exists x, y) \,.\, x, y \in \alpha \,.\, x \neq y : \equiv :$$
$$\sim (\exists x, y) \,.\, x, y \in \alpha \,.\, x \neq y :$$
$$[*11{\cdot}521] \qquad \equiv : x, y \in \alpha \,.\, \supset_{x,y} \,.\, x = y :$$
$$[*52{\cdot}4] \qquad \equiv : \alpha \in 0 \cup 1 \tag{2}$$
$$\vdash .(1) .(2) .*54{\cdot}54 .\supset$$
$$\vdash :. x, y \in \alpha \,.\, x \neq y \,.\, \supset_{x,y} \,.\, \alpha = \iota`x \cup \iota`y : \equiv : \alpha \in 0 \cup 1 \,.\, \vee \,.\, \alpha \in 2 :$$
$$[*22{\cdot}34] \qquad \equiv : \alpha \in 0 \cup 1 \cup 2 :. \supset \vdash .\mathrm{Prop}$$

***54·56.** $\vdash : \alpha \sim \epsilon 0 \cup 1 \cup 2 \,.\equiv.\, (\exists x, y, z) \,.\, x, y, z \in \alpha \,.\, x \neq y \,.\, x \neq z \,.\, y \neq z$

Dem.

$$\vdash .*54{\cdot}55 .*11{\cdot}52 .\supset$$
$$\vdash :. \alpha \sim \epsilon 0 \cup 1 \cup 2 .\equiv : (\exists x, y) \,.\, x, y \in \alpha \,.\, x \neq y \,.\, \alpha \neq \iota`x \cup \iota`y :$$
$$[*51{\cdot}2.*22{\cdot}59] \qquad \equiv : (\exists x, y) \,.\, \iota`x \cup \iota`y \subset \alpha \,.\, x \neq y \,.\, \alpha \neq \iota`x \cup \iota`y :$$
$$[*24{\cdot}6] \qquad \equiv : (\exists x, y) \,.\, \iota`x \cup \iota`y \subset \alpha \,.\, x \neq y \,.\, \exists\, ! \,\alpha - (\iota`x \cup \iota`y) :$$
$$[*51{\cdot}232.\mathrm{Transp}] \qquad \equiv : (\exists x, y) : \iota`x \cup \iota`y \subset \alpha \,.\, x \neq y : (\exists z) \,.\, z \in \alpha \,.\, z \neq x \,.\, z \neq y :$$
$$[*51{\cdot}2.*22{\cdot}59] \qquad \equiv : (\exists x, y, z) \,.\, x, y, z \in \alpha \,.\, x \neq y \,.\, x \neq z \,.\, y \neq z :. \supset \vdash .\mathrm{Prop}$$

En virtud de esta proposición, una clase que ni es nula, ni una clase unitaria, ni un par, contiene por lo menos tres miembros distintos. Por lo tanto, resulta que un número cardinal distinto del 0, 1, ó 2, es igual o mayor que tres. La última proposición se usa en la *104·43, que es un teorema de existencia de considerable importancia en la aritmética cardinal.

***54·6.** $\vdash :. \alpha \cap \beta = \Lambda \,.\, x, x' \in \alpha \,.\, y, y' \in \beta \,.\, \supset :$

Dem.

$$\iota`x \cup \iota`y = \iota`x' \cup \iota`y' \,.\equiv.\, x = x' \,.\, y = y'$$
$$\vdash .*51{\cdot}2 .\supset \vdash :. \mathrm{Hp} .\supset : \iota`x \subset \alpha \,.\, \iota`x' \subset \alpha \,.\, \iota`y \subset \beta \,.\, \iota`y' \subset \beta \,.\, \alpha \cap \beta = \Lambda :$$
$$[*24{\cdot}48] \qquad \supset : \iota`x \cup \iota`y = \iota`x' \cup \iota`y' \,.\equiv.\, \iota`x = \iota`x' \,.\, \iota`y = \iota`y' \,.$$
$$[*51{\cdot}23] \qquad \equiv \,.\, x = x' \,.\, y = y' :. \supset \vdash .\mathrm{Prop}$$

La última proposición es útil tratándose de conjuntos de pares formados por un miembro de una clase α y otro miembro de una clase β, en donde α y β no tienen miembros en común. Se usa en la teoría de la multiplicación cardinal (*113·148).

*55. PARES ORDINALES

Sumario del *55.

Los pares ordinales, que ahora se consideran, son mucho más importantes, aún en aritmética cardinal, que los pares cardinales. Sus propiedades son en parte análogas a los de los pares cardinales, pero, en parte también, a las de las clases unitarias; pues ellas son las relaciones existentes más pequeñas, del mismo modo que las clases unitarias son las clases existentes más pequeñas. Las propiedades que son análogas a las de las clases unitarias no exige que los dos términos del par deban ser diferentes, es decir, son válidas para $\iota'x \uparrow \iota'x$ así como para $\iota'x \uparrow \iota'y$ (donde $x \neq y$); por otra parte, las propiedades que son análogas a las de los pares cardinales exigen, en general, que los dos términos del par ordinal deban ser distintos.

La notación $\iota'x \uparrow \iota'y$ es engorrosa y no nos proporciona una ayuda fácil para mostrar al par como una función descriptiva de x para el argumento y, o viceversa. Por tanto, introducimos un nuevo símbolo, "$x \downarrow y$", para el par. En un par $x \downarrow y$ llamaremos a x el relacionante del par, y a y el relacionado. En virtud de las definiciones dadas en el *38, esto da origen a las dos relaciones $x \downarrow$ y $y \downarrow$; por tanto, obtenemos las notaciones $x \downarrow$"β, $\downarrow y$"α, $\alpha \underset{"}{\downarrow} y$, $\alpha \underset{"}{\downarrow}$"$\beta$ y así sucesivamente, las cuales se usarán mucho en lo que sigue. Debe observarse que $x \downarrow$"β significa la clase de pares en los que x es el relacionante y un miembro de β es el relacionado, mientras que $\downarrow y$"α o $\alpha \underset{"}{\downarrow} y$ simboliza la clase de pares que tiene y como relacionado y a un miembro de α como relacionante; $\alpha \underset{"}{\downarrow}$"$\beta$ representa a todas las clases de pares del tipo como $\downarrow y$"α, en donde y es un miembro cualquiera de β; y en virtud del *40·7, $s'\alpha \underset{"}{\downarrow}$"$\beta$ simboliza a todos los pares ordinales de los cuales el relacionante es un miembro de α, mientras que el relacionado es un miembro de β. Esta es una clase muy importante, que se usará para definir el producto de dos números cardinales; pues es evidente que el número de miembros de $s'\alpha \underset{"}{\downarrow}$"$\beta$ es el producto del número de miembros de α y el número de miembros de β.

Las pocas proposiciones que vienen a continuación son consecuencias inmediatas de la definición de $x \downarrow y$ y de las notaciones introducidas en el *38. Entonces llegábamos a varias propiedades elementales de la relación $x \downarrow y$, de las que las más empleadas son las siguientes:

***55·13.** $\vdash : z(x \downarrow y)\, w . \equiv . z = x . w = y$

***55·15.** $\vdash . \mathrm{D}'(x \downarrow y) = \iota'x . \mathrm{C}'(x \downarrow y) = \iota'y . C'(x \downarrow y) = \iota'x \cup \iota'y$

***55·16.** $\vdash : \mathrm{D}'R = \iota'x . \mathrm{C}'R = \iota'y . \equiv . R = x \downarrow y$

***55·202.** $\vdash : x \downarrow y = z \downarrow w . \equiv . x = z . y = w . \equiv . y \downarrow x = w \downarrow z$

Esta proposición debe contrastarse con la *54·22 para dar una razón del por qué los pares ordinales son más útiles en aritmética que los pares cardinales. En virtud de la proposición anterior, cuando dos pares ordinales son idénticos, sus relacionantes son idénticos, y sus relacionados son idénticos.

A continuación nos ocupamos de varias propiedades de las relaciones $x \downarrow$ y $\downarrow x$. Estas proposiciones juegan un importante papel en aritmética. Se observará que si dos términos tienen la relación $x \downarrow$, el relacionante es un par cuyo relacionado es el relacionado en la relación $x \downarrow$, es decir, cuando tenemos $R\ (x \downarrow)\ y$, tenemos $R = x \downarrow y$ (cf. *55·122). Observaciones semejantes son aplicables a la relación $\downarrow x$. La clase $\downarrow x$"α, que está constituida por todos los pares cuyo relacionante es un miembro de α, mientras que el relacionado es x, es importante. Tenemos

***55·232.** $\vdash : \exists\,!\downarrow x\text{``}\alpha \cap \downarrow y\text{``}\beta . \equiv . x = y . \exists\,!\,\alpha \cap \beta$

Esta proposición es frecuentemente útil.

A continuación (*55·3–·51) procedemos a dar varias propiedades de $x \downarrow y$ que son análogas a las propiedades de la clase unitaria. Entre las más importantes de estas propiedades están las siguientes:

***55·3.** $\vdash : xRy . \equiv . x \downarrow y \subseteq R . \equiv . \dot{\exists}\,!\,(x \downarrow y) \mathrel{\dot\cap} R$

Esta es la análoga de la *51·31.

***55·34.** $\vdash : \dot{\exists}\,!\,R . R \subseteq x \downarrow y . \equiv . R = x \downarrow y$

Esta es la análoga de la *51·4.

***55·5.** $\vdash :. R \subseteq x \downarrow y \cup z \downarrow w . \equiv :$
$R = \dot\Lambda . \vee . R = x \downarrow y . \vee . R = z \downarrow w . \vee . R = x \downarrow y \cup z \downarrow w$

Esta es la análoga de la *54·4.

Ahora proseguimos con aquellas propiedades de los pares ordinales que no son análogas a las de las clases unitarias. A fin de conectar el número cardinal 2 con el número ordinal 2_r, tenemos la proposición

***55·54.** $\vdash :: x \neq y . \supset :. C\text{`}R = \iota\text{`}x \cup \iota\text{`}y . R \mathrel{\dot\cap} \breve{R} = \dot\Lambda . \equiv : R = x \downarrow y . \vee . R = y \downarrow x$

Esta proposición muestra que las únicas relaciones asimétricas que tienen un par cardinal dado $\iota\text{`}x \cup \iota\text{`}y$ con respecto a su campo son los correspondientes pares ordinales $x \downarrow y$ e $y \downarrow x$. Tenemos a continuación un conjunto de relaciones sobre los productos relativos de pares con otras relaciones, esto es, sobre $R \mid (x \downarrow y)$, $(x \downarrow y) \mid S$, y $R \mid (x \downarrow y) \mid S$. Estas proposiciones son muy útiles en aritmética. La principal de ellas es

***55·61.** $\vdash : \mathrm{E}\,!\,R\text{`}z . \mathrm{E}\,!\,S\text{`}w . \supset . (R \parallel \breve{S})\text{`}(z \downarrow w) = (R\text{`}z) \downarrow (S\text{`}w)$

Finalmente, tenemos cuatro proposiciones que pertenecen, por su objeto, al *43, pero que no pudieron darse allí debido a que las pruebas necesitan el uso de pares ordinales.

***55·01.** $x \downarrow y = \iota\text{`}x \uparrow \iota\text{`}y$ Df

$*55{\cdot}02.\quad R`x \downarrow y = R`(x \downarrow y) \quad \text{Df}$

Esta definición sirve únicamente para evitar los paréntesis.

$*55{\cdot}1.\quad \vdash . x \downarrow y = (\iota`x) \uparrow (\iota`y) \quad [(*55{\cdot}01)]$

$*55{\cdot}11.\quad \vdash . x \downarrow `y = \downarrow y`x = x \downarrow y = \iota`x \uparrow \iota`y \quad [*38{\cdot}11 . *55{\cdot}1]$

$*55{\cdot}12.\quad \vdash . \mathrm{E}\,! x \downarrow `y \quad [*55{\cdot}11 . *14{\cdot}21]$

$*55{\cdot}121.\quad \vdash . \dot{\mathrm{E}}\,! \downarrow y`x$

$*55{\cdot}122.\quad \vdash : R(x \downarrow) y . \equiv . R = x \downarrow y \quad [*55{\cdot}11]$

$*55{\cdot}123.\quad \vdash : R(\downarrow y) x . \equiv . R = x \downarrow y \quad [*55{\cdot}11]$

$*55{\cdot}13.\quad \vdash : z (x \downarrow y) w . \equiv . z = x . w = y$

Dem.

$\vdash . *35{\cdot}103 . *55{\cdot}1 . \supset \vdash : z (x \downarrow y) w . \equiv . z \in \iota`x . w \in \iota`y .$
$[*51{\cdot}15] \qquad \equiv . z = x . w = y : \supset \vdash . \text{Prop}$

$*55{\cdot}132.\quad \vdash . x (x \downarrow y) y \quad [*55{\cdot}13]$

$*55{\cdot}134.\quad \vdash . \dot{\exists}\,! (x \downarrow y) \quad [*55{\cdot}132]$

$*55{\cdot}14.\quad \vdash . x \downarrow y = \mathrm{Cnv}`y \downarrow x \quad [*55{\cdot}13 . *31{\cdot}131]$

$*55{\cdot}15.\quad \vdash . \mathrm{D}`x \downarrow y = \iota`x . \mathrm{C}`x \downarrow y = \iota`y . C`x \downarrow y = \iota`x \cup \iota`y$
$[*35{\cdot}85{\cdot}86 . *51{\cdot}161]$

$*55{\cdot}16.\quad \vdash : \mathrm{D}`R = \iota`x . \mathrm{C}`R = \iota`y . \equiv . R = x \downarrow y$

Dem.

$\vdash . *33{\cdot}13{\cdot}131 . *51{\cdot}15 . \supset$
$\vdash :: \mathrm{D}`R = \iota`x . \mathrm{C}`R = \iota`y . \equiv :. (\exists w) . zRw . \equiv_z . z = x : (\exists z) . zRw . \equiv_w . w = y :.$
$[*14{\cdot}122] \qquad \equiv :. (\exists z, w) . zRw : (\exists w) . zRw . \supset_z . z = x :$
$(\exists w, z) . zRw : (\exists z) . zRw . \supset_w . w = y :.$
$[*11{\cdot}23.*4{\cdot}71] \equiv :. (\exists z, w) . zRw : (\exists w) . zRw . \supset_z . z = x : (\exists z) . zRw . \supset_w . w = y :.$
$[*10{\cdot}23] \qquad \equiv :. (\exists z, w) . zRw : zRw . \supset_{z,w} . z = x : zRw . \supset_{z,w} . w = y :.$
$[*11{\cdot}391] \qquad \equiv :. (\exists z, w) . zRw : zRw . \supset_{z,w} . z = x . w = y :.$
$[*14{\cdot}123] \qquad \equiv :. zRw . \equiv_{z,w} . z = x . w = y :.$
$[*55{\cdot}13] \qquad \equiv :. zRw . \equiv_{z,w} . z (x \downarrow y) w :.$
$[*21{\cdot}43] \qquad \equiv :. R = x \downarrow y :: \supset \vdash . \text{Prop}$

La última proposición es importante, y se utilizará con frecuencia.

$*55{\cdot}161.\quad \vdash . x \downarrow y = \breve{\iota}`\hat{R} (\mathrm{D}`R = \iota`x . \mathrm{C}`R = \iota`y)$

Dem.

$\vdash . *55{\cdot}16 . *20{\cdot}15 . \supset$
$\vdash . \hat{R} (\mathrm{D}`R = \iota`x . \mathrm{C}`R = \iota`y) = \hat{R} (R = x \downarrow y)$
$[*51{\cdot}11] \qquad = \iota`(x \downarrow y) \qquad (1)$
$\vdash . (1) . *51{\cdot}51 . \supset \vdash . \text{Prop}$

$*55{\cdot}17.\quad \vdash . x \downarrow y = \breve{\iota}`(\overleftarrow{\mathrm{D}}`\iota`x \cap \overleftarrow{\mathrm{C}}`\iota`y) \quad [*55{\cdot}161 . *33{\cdot}6{\cdot}61]$

$*55{\cdot}2.\quad \vdash : x \downarrow y = x \downarrow z . \equiv . y = z$

Dem.

$\vdash .*30{\cdot}37 . *55{\cdot}11{\cdot}12 . \supset \vdash : y = z . \supset . x \downarrow y = x \downarrow z$ (1)

$\vdash .*30{\cdot}37 . *33{\cdot}121 . \supset$

$\vdash : x \downarrow y = x \downarrow z . \supset . \mathrm{C}`x \downarrow y = \mathrm{C}`x \downarrow z .$

$[*55{\cdot}15] \quad \supset . \iota`y = \iota`z .$

$[*51{\cdot}23] \quad \supset . y = z$ (2)

$\vdash .(1).(2). \supset \vdash .$ Prop

***55·201.** $\vdash : x \downarrow z = y \downarrow z . \equiv . x = y$

***55·202.** $\vdash : x \downarrow y = z \downarrow w . \equiv . x = z . y = w . \equiv . y \downarrow x = w \downarrow z$

Dem.

$\vdash .*55{\cdot}2{\cdot}201 . \supset$

$\vdash : x = z . y = w . \supset . x \downarrow y = z \downarrow y . z \downarrow y = z \downarrow w .$

$[*13{\cdot}17] \quad \supset . x \downarrow y = z \downarrow w$ (1)

$\vdash .*30{\cdot}37 . *33{\cdot}12{\cdot}121 . \supset$

$\vdash : x \downarrow y = z \downarrow w . \supset . \mathrm{D}`x \downarrow y = \mathrm{D}`z \downarrow w . \mathrm{C}`x \downarrow y = \mathrm{C}`z \downarrow w .$

$[*55{\cdot}15] \quad \supset . \iota`x = \iota`z . \iota`y = \iota`w .$

$[*51{\cdot}23] \quad \supset . x = z . y = w$ (2)

$\vdash .(1).(2). \supset$

$\vdash : x \downarrow y = z \downarrow w . \equiv . x = z . y = w$ (3)

Similarmente

$\vdash : y \downarrow x = w \downarrow z . \equiv . x = z . y = w$ (4)

$\vdash .(3).(4). \supset \vdash .$ Prop

La última proposición es importante

***55·21.** $\vdash . \mathrm{C}`x \downarrow = \mathrm{V} . \mathrm{C}` \downarrow x = \mathrm{V}$ [*33·432 . *55·12·121]

***55·22.** $\vdash . \mathrm{D}`x \downarrow = \hat{R} \{(\exists y) . R = x \downarrow y\}$ [*55·122]

***55·221.** $\vdash . \mathrm{D}` \downarrow x = \hat{R} \{(\exists y) . R = y \downarrow x\}$ [*55·123]

***55·222.** $\vdash : R \in \mathrm{D}`x \downarrow . \equiv . \mathrm{D}`R = \iota`x . \mathrm{C}`R \in 1$

Dem.

$\vdash .*55{\cdot}22{\cdot}16 . \supset \vdash :. R \in \mathrm{D}`x \downarrow . \equiv : (\exists y) . \mathrm{D}`R = \iota`x . \mathrm{C}`R = \iota`y :$

$[*10{\cdot}35] \quad \equiv : \mathrm{D}`R = \iota`x : (\exists y) . \mathrm{C}`R = \iota`y :$

$[*52{\cdot}1] \quad \equiv : \mathrm{D}`R = \iota`x . \mathrm{C}`R \in 1 :. \supset \vdash .$ Prop

***55·223.** $\vdash : R \in \mathrm{D}` \downarrow x . \equiv . \mathrm{C}`R = \iota`x . \mathrm{D}`R \in 1$ [La prueba como en la *55·222]

***55·224.** $\vdash . \mathrm{D}`x \downarrow \cap \mathrm{D}` \downarrow y = \iota`(x \downarrow y)$

Dem.

$\vdash .*55{\cdot}222{\cdot}223 . \supset$

$\vdash : R \in \mathrm{D}`x \downarrow \cap \mathrm{D}` \downarrow y . \equiv . \mathrm{D}`R = \iota`x . \mathrm{C}`R \in 1 . \mathrm{C}`R = \iota`y . \mathrm{D}`R \in 1 .$

$[*52{\cdot}22.*4{\cdot}71] \quad \equiv . \mathrm{D}`R = \iota`x . \mathrm{C}`R = \iota`y .$

$[*55{\cdot}16] \quad \equiv . R = x \downarrow y .$

$[*51{\cdot}15] \quad \equiv . R \in \iota`(x \downarrow y) : \supset \vdash .$ Prop

***55·23.** $\vdash . x \downarrow ``\alpha = \hat{R}\{(\exists y) . y \in \alpha . R = x \downarrow y\}$ [*38·13]

***55·231.** $\vdash . \downarrow x ``\alpha = \hat{R}\{(\exists y) . y \in \alpha . R = y \downarrow x\}$ [*38·131]

***55·232.** $\vdash : \exists ! \downarrow x ``\alpha \cap \downarrow y ``\beta . \equiv . x = y . \exists ! \alpha \cap \beta$

Dem.

$\vdash . *55·231 . *11·55 . \supset$

$\vdash :. \exists ! \downarrow x ``\alpha \cap \downarrow y ``\beta . \equiv : (\exists R) : (\exists z, w) . z \in \alpha . R = z \downarrow x . w \in \beta . R = w \downarrow y :$

[*13·195] $\equiv : (\exists z, w) . z \in \alpha . w \in \beta . z \downarrow x = w \downarrow y :$

[*55·202] $\equiv : (\exists z, w) . z \in \alpha . w \in \beta . x = y . z = w :$

[*13·195] $\equiv : (\exists z) . z \in \alpha \cap \beta . x = y :$

[*10·35] $\equiv : \exists ! \alpha \cap \beta . x = y :. \supset \vdash .$ Prop

***55·233.** $\vdash : x \neq y . \supset . \downarrow x ``\alpha \cap \downarrow y ``\beta = \Lambda$ [*55·232 . Transp]

Las dos últimas proposiciones se usan frecuentemente en aritmética.

***55·24.** $\vdash . \dot{s}`x \downarrow ``\alpha = \iota`x \uparrow \alpha$

Dem.

$\vdash . *41·11 . \supset$

$\vdash :. z (\dot{s}`x \downarrow ``\alpha) w . \equiv . (\exists R) . R \in x \downarrow ``\alpha . zRw .$

[*55·23] $\equiv . (\exists R, y) . y \in \alpha . R = x \downarrow y . zRw .$

[*13·195] $\equiv . (\exists y) . y \in \alpha . z (x \downarrow y) w .$

[*55·13] $\equiv . (\exists y) . y \in \alpha . z = x . w = y .$

[*13·195] $\equiv . z = x . w \in \alpha .$

[*51·15.*35·103] $\equiv . z (\iota`x \uparrow \alpha) w :. \supset \vdash .$ Prop

***55·241.** $\vdash . \dot{s}`\downarrow x ``\alpha = \alpha \uparrow \iota`x$ [La prueba como en la *55·24]

***55·25.** $\vdash : \exists ! \alpha . \supset . \mathrm{D} ``x \downarrow ``\alpha = \iota`\iota`x$

Dem.

$\vdash . *37·67 . *33·12 . *55·12 . \supset$

$\vdash : \beta \in \mathrm{D} ``x \downarrow ``\alpha . \equiv . (\exists y) . y \in \alpha . \beta = \mathrm{D}`x \downarrow y .$

[*55·15] $\equiv . (\exists y) . y \in \alpha . \beta = \iota`x .$

[*10·35] $\equiv . \exists ! \alpha . \beta = \iota`x$ (1)

$\vdash . (1) . \supset \vdash :. \mathrm{Hp} . \supset : \beta \in \mathrm{D} ``x \downarrow ``\alpha . \equiv . \beta = \iota`x .$

[*51·15] $\equiv . \beta \in \iota`\iota`x :. \supset \vdash .$ Prop

***55·251.** $\vdash : \exists ! \alpha . \supset . \mathrm{C} `` \downarrow x ``\alpha = \iota`\iota`x$ [La prueba como en la *55·25]

Esta proposición se usa en la teoría de la multiplicación cardinal (*113·142)

***55·26.** $\vdash . \mathrm{C} ``x \downarrow ``\alpha = \iota ``\alpha$ [*55·15 . *37·35]

***55·261.** $\vdash . \mathrm{D} `` \downarrow x ``\alpha = \iota ``\alpha$ [*55·15 . *37·35]

***55·262.** $\vdash : \downarrow x ``\alpha = \downarrow y ``\beta . \supset . \alpha = \beta$ [*55·261 . *53·22]

***55·27.** $\vdash . C `` \downarrow x ``\alpha = C ``x \downarrow ``\alpha = \hat{\beta}\{(\exists y) . y \in \alpha . \beta = \iota`x \cup \iota`y\}$ [*55·15]

***55·28.** $\vdash : \mathrm{C}`x \downarrow y = \mathrm{C}`x \downarrow z . \equiv . y = z . \equiv . x \downarrow y = x \downarrow z$

[*55·15 . *51·23 . *55·2]

***55·281.** $\vdash : \mathrm{D}`y \downarrow x = \mathrm{D}`z \downarrow x . \equiv . y = z . \equiv . y \downarrow x = z \downarrow x$

***55·282.** $\vdash : C'x \downarrow y = C'x \downarrow z . \equiv . y = z . \equiv . x \downarrow y = x \downarrow z$
[*55·15·2 . *54·21]

***55·283.** $\vdash : C'y \downarrow x = C'z \downarrow x . \equiv . y = z . \equiv . y \downarrow x = z \downarrow x$

***55·29.** $\vdash . \breve{\mathrm{C}} \mid (x \downarrow) = \iota$ [*55·15 . *34·42]

***55·291.** $\vdash . \mathrm{D} \mid (\downarrow x) = \iota$ [*55·15 . *34·42]

***55·292.** $\vdash . C \mid (x \downarrow) = C \mid (\downarrow x) = \hat{\alpha}\hat{y}\,(\alpha = \iota'x \cup \iota'y)$ [*55·15 . *34·41]

Las proposiciones siguientes, hasta la *55·51 inclusive, ofrecen las propiedades de los pares ordinales que son análogas a las propiedades de las clases unitarias.

***55·3.** $\vdash : xRy . \equiv . x \downarrow y \subset R . \equiv . \dot{\exists} ! (x \downarrow y) \cap R$ [*13·21·22 . *55·13]

La primera mitad de esta proposición es la análoga de la *51·2; al igual que esta proposición, proporcionà un medio de reducir proposiciones a la forma de inclusiones. Con respecto a la segunda mitad, compárese con la *51·31.

***55·31.** $\vdash : x \downarrow y = z \downarrow w . \equiv . z (x \downarrow y) w . \equiv . x (z \downarrow w) y . \equiv . x = z . y = w$

Esta proposición es la análoga de la *51·23.

Dem.

$\vdash . *55·16 . \supset \vdash : x \downarrow y = z \downarrow w . \equiv . \mathrm{D}'x \downarrow y = \iota'z . \breve{\mathrm{C}}'x \downarrow y = \iota'w .$

[*55·15] $\equiv . \iota'x = \iota'z . \iota'y = \iota'w .$

[*51·23] $\equiv . x = z . y = w .$ (1)

[*55·13] $\equiv . x (z \downarrow w) y .$ (2)

[(1).*13·16] $\equiv . z = x . w = y .$

[*55·13] $\equiv . z (x \downarrow y) w$ (3)

$\vdash . (1) . (2) . (3) . \supset \vdash .$ Prop

***55·32.** $\vdash :. x \downarrow y \cap z \downarrow w = \Lambda . \equiv : x \neq z . \vee . y \neq w$

Dem.

$\vdash . *55·3 . \supset \vdash : \dot{\exists} ! x \downarrow y \cap z \downarrow w . \equiv . x (z \downarrow w) y .$

[*55·13] $\equiv . x = z . y = w$ (1)

$\vdash . (1) . \mathrm{Transp} . \supset \vdash .$ Prop

***55·33.** $\vdash : xRy . \equiv . x \downarrow y \cap R = x \downarrow y$ [*55·3 . *23·621]

***55·34.** $\vdash : \dot{\exists} ! R . R \subset x \downarrow y . \equiv . R = x \downarrow y$

Dem.

$\vdash . *55·13 . \supset \vdash :. \dot{\exists} ! R . R \subset x \downarrow y . \equiv : (\exists z, w) . zRw : zRw . \supset_{z,w} . z = x . w = y :$

[*14·123] $\equiv : zRw . \equiv_{z,w} . z = x . w = y :$

[*55·13] $\equiv : zRw . \equiv_{z,w} . z (x \downarrow y) w :. \supset \vdash .$ Prop

***55·341.** $\vdash :. R \subset x \downarrow y . \equiv : R = \Lambda . \vee . R = x \downarrow y$

Dem.

$\vdash . *4·42 . \supset \vdash :. R \subset x \downarrow y . \equiv : R \subset x \downarrow y . R = \Lambda . \vee . R \subset x \downarrow y . R \neq \Lambda :$

[*25·54] $\equiv : R \subset x \downarrow y . R = \Lambda . \vee . R \subset x \downarrow y . \dot{\exists} ! R :$

[*55·34] $\equiv : R \subset x \downarrow y . R = \Lambda . \vee . R = x \downarrow y :$

[*25·12] $\equiv : R = \Lambda . \vee . R = x \downarrow y :. \supset \vdash .$ Prop

***55·35.** $\vdash : R \mathbin{\dot\cap} x \downarrow y = \dot\Lambda \,.\, R \cup x \downarrow y = S \,.\equiv.\, xSy \,.\, R = S \dot- x \downarrow y$

Dem.

$\vdash .$ *25·47 $. \supset$

$\vdash : R \mathbin{\dot\cap} x \downarrow y = \dot\Lambda \,.\, R \cup x \downarrow y = S \,.\equiv.\, x \downarrow y \subseteq S \,.\, R = S \dot- x \downarrow y \,.$

[*55·3] $\equiv . xSy \,.\, R = S \dot- x \downarrow y : \supset \vdash .$ Prop

***55·36.** $\vdash : xRy \,.\equiv:\, (R \dot- x \downarrow y) \cup x \downarrow y = R$

Dem.

$\vdash .$ *55·3 $. \supset \vdash : xRy \,.\equiv.\, x \downarrow y \subseteq R \,.$

[*23·62] $\equiv . x \downarrow y \cup R = R \,.$

[*23·91] $\equiv . (R \dot- x \downarrow y) \cup x \downarrow y = R : \supset \vdash .$ Prop

***55·37.** $\vdash : x \in \alpha \,.\, y \in \beta \,.\equiv. x \downarrow y \subseteq \alpha \uparrow \beta$

Dem.

$\vdash .$ *35·103 $. \supset \vdash : x \in \alpha \,.\, y \in \beta \,.\equiv. x\,(\alpha \uparrow \beta)\,y \,.$

[*55·3] $\equiv . x \downarrow y \subseteq \alpha \uparrow \beta : \supset \vdash .$ Prop

La siguiente proposición es la análoga de la *51·232

***55·4.** $\vdash :. a\,\{x \downarrow y \cup z \downarrow w\}\,b \,.\equiv: a = x \,.\, b = y \,.\vee.\, a = z \,.\, b = w$

[*55·13 . *23·34]

***55·41.** $\vdash :: R = x \downarrow y \cup z \downarrow w \,.\supset:. aRb \,.\supset_{a,b} . \phi(a,b) :\equiv. \phi(x,y) \,.\, \phi(z,w)$

Dem.

$\vdash .$ *55·4 $. \supset \vdash ::.$ Hp $. \supset :: aRb \,.\supset_{a,b} . \phi(a,b) :\equiv:$

$a = x \,.\, b = y \,.\vee.\, a = z \,.\, b = w : \supset_{a,b} . \phi(a,b) :.$

[*4·77] $\equiv :. (a,b) :. a = x \,.\, b = y \,.\supset. \phi(a,b) : a = z \,.\, b = w \,.\supset. \phi(a,b) :.$

[*11·31] $\equiv :. (a,b) : a = x \,.\, b = y \,.\supset. \phi(a,b) :. (a,b) : a = z \,.\, b = w \,.\supset. \phi(a,b) :.$

[*13·21] $\equiv :. \phi(x,y) \,.\, \phi(z,w) ::. \supset \vdash .$ Prop

La última proposición es la análoga de la *51·234. La siguiente proposición (*55·42) es la análoga de la *51·235.

***55·42.** $\vdash :: R = x \downarrow y \cup z \downarrow w \,.\supset:. (\exists a,b) \,.\, aRb \,.\, \phi(a,b) \,.\equiv: \phi(x,y) \,.\vee.\, \phi(z,w)$

Dem.

$\vdash .$ *55·4 $. \supset \vdash ::.$ Hp $. \supset :: (\exists a,b) \,.\, aRb \,.\, \phi(a,b) \,.\equiv:.$

$(\exists a,b) :. a = x \,.\, b = y \,.\vee.\, a = z \,.\, b = w : \phi(a,b) :.$

[*4·4] $\equiv :. (\exists a,b) : a = x \,.\, b = y \,.\, \phi(a,b) :\vee: a = z \,.\, b = w \,.\, \phi(a,b) :.$

[*11·41] $\equiv :. (\exists a,b) \,.\, a = x \,.\, b = y \,.\, \phi(a,b) \,.\vee.\, (\exists a,b) \,.\, a = z \,.\, b = w \,.\, \phi(a,b) :.$

[*13·22] $\equiv :. \phi(x,y) \,.\vee.\, \phi(z,w) ::. \supset \vdash .$ Prop

***55·43.** $\vdash : x \downarrow y \cup z \downarrow w = x \downarrow y \cup c \downarrow d \,.\equiv. z = c \,.\, w = d \,.\equiv. z \downarrow w = c \downarrow d$

Esta proposición es la análoga de la *51·41.

Dem.

$\vdash .$ *55·202 $. \supset \vdash : z = c \,.\, w = d \,.\supset. z \downarrow w = c \downarrow d \,.$

[*23·551] $\supset . x \downarrow y \cup z \downarrow w = x \downarrow y \cup c \downarrow d$ (1)

$\vdash .$ *23·58 $. \supset \vdash :. x \downarrow y \cup z \downarrow w = x \downarrow y \cup c \downarrow d \,.\supset:$

$z \downarrow w \subseteq x \downarrow y \cup c \downarrow d \,.\, c \downarrow d \subseteq x \downarrow y \cup z \downarrow w :$

$[*55{\cdot}3{\cdot}13.*23{\cdot}34]\supset :z=x\,.\,w=y\,.\,\vee\,.\,z=c\,.\,w=d : c=x\,.\,d=y\,.\,\vee\,.\,c=z\,.\,d=w :$

$[*13{\cdot}16]\qquad \supset :z=x\,.\,w=y\,.\,\vee\,.\,z=c\,.\,w=d : c=x\,.\,d=y\,.\,\vee\,.\,z=c\,.\,w=d :$

$[*4{\cdot}41]\qquad \supset :z=x\,.\,w=y\,.\,c=x\,.\,d=y\,.\,\vee\,.\,z=c\,.\,w=d :$

$[*13{\cdot}172]\qquad \supset :z=c\,.\,w=d \qquad (2)$

$\vdash .(1).(2).\supset \vdash : x\downarrow y\cup z\downarrow w=x\downarrow y\cup c\downarrow d\,.\equiv .\,z=c\,.\,w=d \qquad (3)$

$\vdash .(3).*55{\cdot}202\,.\supset \vdash .\ \mathrm{Prop}$

***55·431.** $\vdash :. x\downarrow y\cup z\downarrow w=a\downarrow b\cup c\downarrow d\,.\supset :$

$$x=a\,.\,y=b\,.\,z=c\,.\,w=d\,.\,\vee\,.\,x=c\,.\,y=d\,.\,z=a\,.\,w=b$$

Dem.

$\vdash .*55{\cdot}4\,.\quad \supset \vdash :: \mathrm{Hp}\,.\equiv :. u=x\,.\,v=y\,.\,\vee\,.\,u=z\,.\,v=w :$

$$\equiv_{u,v} : u=a\,.\,v=b\,.\,\vee\,.\,u=c\,.\,v=d :.$$

$[*11{\cdot}1]\qquad \supset :. x=x\,.\,y=y\,.\,\vee\,.\,x=z\,.\,y=w :$

$$\equiv : x=a\,.\,y=b\,.\,\vee\,.\,x=c\,.\,y=d :. \qquad (1)$$

$\vdash .*55{\cdot}43\,.\supset \vdash :. x=a\,.\,y=b\,.\supset : x\downarrow y\cup z\downarrow w=a\downarrow b\cup z\downarrow w :$

$[*13{\cdot}171]\qquad \supset : \mathrm{Hp}\,.\supset .\,a\downarrow b\cup z\downarrow w=a\downarrow b\cup c\downarrow d\,.$

$[*55{\cdot}43]\qquad \supset .\,z=c\,.\,w=d \qquad (2)$

$\vdash .(2).\mathrm{Comm}.*4{\cdot}7.\supset \vdash :. \mathrm{Hp}.\supset : x=a\,.\,y=b\,.\supset .\,x=a\,.\,y=b\,.\,z=c\,.\,w=d \qquad (3)$

Similarmente $\quad \vdash :. \mathrm{Hp}.\supset : x=c\,.\,y=d\,.\supset .\,x=c\,.\,y=d\,.\,z=a\,.\,w=b \qquad (4)$

$\vdash .(1).(3).(4).\supset \vdash .\ \mathrm{Prop}$

***55·44.** $\vdash :. x\downarrow y\cup z\downarrow w=a\downarrow b\cup c\downarrow d\,.$

$$\equiv : x=a\,.\,y=b\,.\,z=c\,.\,w=d\,.\,\vee\,.\,x=c\,.\,y=d\,.\,z=a\,.\,w=b :$$

$$\equiv : x\downarrow y=a\downarrow b\,.\,z\downarrow w=c\downarrow d\,.\,\vee\,.\,x\downarrow y=c\downarrow d\,.\,z\downarrow w=a\downarrow b$$

Dem.

$\vdash .*55{\cdot}43\,.\quad \supset \vdash : x=a\,.\,y=b\,.\supset .\,x\downarrow y\cup z\downarrow w=a\downarrow b\cup z\downarrow w :$

$$z=c\,.\,w=d\,.\supset .\,a\downarrow b\cup z\downarrow w=a\downarrow b\cup c\downarrow d :$$

$[*3{\cdot}47.*13{\cdot}17]\supset \vdash : x=a\,.\,y=b\,.\,z=c\,.\,w=d\,.$

$$\supset .\,x\downarrow y\cup z\downarrow w=a\downarrow b\cup c\downarrow d \qquad (1)$$

Similarmente $\quad \vdash : x=c\,.\,y=d\,.\,z=a\,.\,w=b\,.$

$$\supset .\,x\downarrow y\cup z\downarrow w=a\downarrow b\cup c\downarrow d \qquad (2)$$

$\vdash .(1).(2).*55{\cdot}431{\cdot}202\,.\supset \vdash .\ \mathrm{Prop}$

La última proposición es la análoga de la *51·43

***55·5.** $\vdash :. R\subset x\downarrow y\cup z\downarrow w\,.$

$$\equiv : R=\dot{\Lambda}\,.\,\vee\,.\,R=x\downarrow y\,.\,\vee\,.\,R=z\downarrow w\,.\,\vee\,.\,R=x\downarrow y\cup z\downarrow w$$

Dem.

$\vdash .*25{\cdot}12\,.*23{\cdot}58{\cdot}42\,.\supset$

$\vdash :. R=\dot{\Lambda}\,.\,\vee\,.\,R=x\downarrow y\,.\,\vee\,.\,R=z\downarrow w\,.\,\vee\,.\,R=x\downarrow y\cup z\downarrow w :$

$$\supset .\,R\subset x\downarrow y\cup z\downarrow w \qquad (1)$$

$\vdash .*25{\cdot}49\,.\quad \supset \vdash :. R\subset x\downarrow y\cup z\downarrow w\,.\,R\mathbin{\dot{\cap}} x\downarrow y=\dot{\Lambda}\,.\supset : R\subset z\downarrow w :$

$[*55{\cdot}341]\qquad \supset : R=\dot{\Lambda}\,.\,\vee\,.\,R=z\downarrow w \qquad (2)$

$\vdash .*25{\cdot}43\,.\quad \supset \vdash :. R\subset x\downarrow y\cup z\downarrow w\,.\supset : R\doteq x\downarrow y\subset z\downarrow w :$

$$[*55{\cdot}341] \qquad \supset : R \doteq x \downarrow y = \dot{\Lambda} . \vee . R \doteq x \downarrow y = z \downarrow w :$$

$$[*25{\cdot}24.*23{\cdot}551] \qquad \supset : (R \doteq x \downarrow y) \cup x \downarrow y = x \downarrow y . \vee .$$

$$(R \doteq x \downarrow y) \cup x \downarrow y = x \downarrow y \cup z \downarrow w \tag{3}$$

$$\vdash . *55{\cdot}3{\cdot}36 . \supset \vdash : \dot{\exists} ! (R \mathbin{\dot{\cap}} x \downarrow y) . \supset . (R \doteq x \downarrow y) \cup x \downarrow y = R \tag{4}$$

$$\vdash . (3) . (4) . \supset \vdash :. R \subset x \downarrow y \cup z \downarrow w . \dot{\exists} ! (R \mathbin{\dot{\cap}} x \downarrow y) . \supset :$$

$$R = x \downarrow y . \vee . R = x \downarrow y \cup z \downarrow w \tag{5}$$

$$\vdash . (2) . (5) . \supset \vdash :. R \subset x \downarrow y \cup z \downarrow w . \supset :$$

$$R = \dot{\Lambda} . \vee . R = x \downarrow y . \vee . R = z \downarrow w . \vee . R = x \downarrow y \cup z \downarrow w \tag{6}$$

$$\vdash . (1) . (6) . \supset \vdash . \text{Prop}$$

La última proposición es la análoga de la $*54{\cdot}4$

$*55{\cdot}51$. $\vdash :. R \subset x \downarrow y \cup S . \supset : xRy . \vee . R \subset S$

Dem.

$$\vdash . *55{\cdot}3 . \quad \supset \vdash : \dot{\exists} ! (R \mathbin{\dot{\cap}} x \downarrow y) . \supset . xRy \tag{1}$$

$$\vdash . *25{\cdot}49 . \supset \vdash : \text{Hp} . \sim \dot{\exists} ! (R \mathbin{\dot{\cap}} x \downarrow y) . \supset . R \subset S \tag{2}$$

$$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash . \text{Prop}$$

En lo que resta de este número, trataremos acerca de las propiedades de los pares ordinales que no tienen análogas en las clases unitarias.

$*55{\cdot}52$. $\vdash . (\iota`x \cup \iota`y) \uparrow (\iota`z \cup \iota`w) = x \downarrow z \cup x \downarrow w \cup y \downarrow z \cup y \downarrow w$ $[*35{\cdot}82{\cdot}413]$

$*55{\cdot}521$. $\vdash : x \neq y . \equiv . x \downarrow y \subset J$ $[*55{\cdot}3 . *50{\cdot}11]$

$*55{\cdot}53$. $\vdash :. x \neq y . \supset : C`R = \iota`x \cup \iota`y . R \subset J . \equiv . \dot{\exists} ! R . R \subset x \downarrow y \cup y \downarrow x$

Dem.

$$\vdash . *55{\cdot}5 . \supset \vdash :. \dot{\exists} ! R . R \subset x \downarrow y \cup y \downarrow x . \equiv :$$

$$R = x \downarrow y . \vee . R = y \downarrow x . \vee . R = x \downarrow y \cup y \downarrow x \tag{1}$$

$$\vdash . *55{\cdot}15 . \quad \supset \vdash . C`x \downarrow y = \iota`x \cup \iota`y . C`y \downarrow x = \iota`x \cup \iota`y \tag{2}$$

$$\vdash . (2) . *33{\cdot}262 . \supset \vdash . C`(x \downarrow y \cup y \downarrow x) = \iota`x \cup \iota`y \tag{3}$$

$$\vdash . *55{\cdot}521 . \quad \supset \vdash : x \neq y . \supset . x \downarrow y \subset J . y \downarrow x \subset J . \tag{4}$$

$$[*23{\cdot}59] \qquad \supset . x \downarrow y \cup y \downarrow x \subset J \tag{5}$$

$$\vdash . (1) . (2) . (3) . (4) . (5) . \supset \vdash :.$$

$$x \neq y . \supset : \dot{\exists} ! R . R \subset x \downarrow y \cup y \downarrow x . \supset . C`R = \iota`x \cup \iota`y . R \subset J \tag{6}$$

$$\vdash . *35{\cdot}91 . \supset \vdash : C`R = \iota`x \cup \iota`y . \supset . R \subset (\iota`x \cup \iota`y) \uparrow (\iota`x \cup \iota`y) .$$

$$[*55{\cdot}52] \qquad \supset . R \subset x \downarrow x \cup x \downarrow y \cup y \downarrow x \cup y \downarrow y \tag{7}$$

$$\vdash . *50{\cdot}24 . \supset \vdash : R \subset J . \supset . \sim (xRx) . \sim (yRy) .$$

$$[*55{\cdot}3.\text{Transp}] \qquad \supset . R \mathbin{\dot{\cap}} x \downarrow x = \dot{\Lambda} . R \mathbin{\dot{\cap}} y \downarrow y = \dot{\Lambda} \tag{8}$$

$$\vdash . (7) . (8) . *25{\cdot}49 . \supset \vdash : C`R = \iota`x \cup \iota`y . R \subset J . \supset . R \subset x \downarrow y \cup y \downarrow x \tag{9}$$

$$\vdash . *33{\cdot}24.*51{\cdot}161 . \supset \vdash : C`R = \iota`x \cup \iota`y . \supset . \dot{\exists} ! R \tag{10}$$

$$\vdash . (9) . (10) . \supset \vdash : C`R = \iota`x \cup \iota`y . R \subset J . \supset . \dot{\exists} ! R . R \subset x \downarrow y \cup y \downarrow x \tag{11}$$

$$\vdash . (6) . (11) . \supset \vdash . \text{Prop}$$

$*55{\cdot}54$. $\vdash :: x \neq y . \supset :. C`R = \iota`x \cup \iota`y . R \mathbin{\dot{\cap}} \breve{R} = \dot{\Lambda} . \equiv : R = x \downarrow y . \vee . R = y \downarrow x$

Dem.

$$\vdash . *50{\cdot}46 . *4{\cdot}71 . \supset \vdash : R \mathbin{\dot{\cap}} \breve{R} = \dot{\Lambda} . \equiv . R \subset J . R \mathbin{\dot{\cap}} \breve{R} = \dot{\Lambda} \tag{1}$$

$\vdash .(1).*55{\cdot}53.\supset\vdash::x\neq y.\supset:.C`R=\iota`x\cup\iota`y.R\mathbin{\dot\cap}\breve{R}=\dot\Lambda.$

$\equiv:\dot\exists!R.R\subseteq x\downarrow y\cup y\downarrow x.R\mathbin{\dot\cap}\breve{R}=\dot\Lambda:$

$[*55{\cdot}5{\cdot}134]\quad\equiv:R=x\downarrow y.\vee.R=y\downarrow x.\vee.R=x\downarrow y\cup y\downarrow x:R\mathbin{\dot\cap}\breve{R}=\dot\Lambda \qquad (2)$

$\vdash .*55{\cdot}32.\supset\vdash:.x\neq y.\supset:x\downarrow y\mathbin{\dot\cap}y\downarrow x=\dot\Lambda:$

$[*55{\cdot}14]\qquad\supset:R=x\downarrow y.\supset.R\mathbin{\dot\cap}\breve{R}=\dot\Lambda:$

$R=y\downarrow x.\supset.R\mathbin{\dot\cap}\breve{R}=\dot\Lambda \qquad (3)$

$\vdash .*55{\cdot}14.*31{\cdot}15{\cdot}33.\supset\vdash:R=x\downarrow y\cup y\downarrow x.\supset.R=\breve{R}.$

$[*23{\cdot}5]\qquad\supset.R\mathbin{\dot\cap}\breve{R}=R.$

$[*55{\cdot}134]\qquad\supset.\dot\exists!R\mathbin{\dot\cap}\breve{R} \qquad (4)$

$\vdash .(3).(4).*4{\cdot}71.*5{\cdot}71.\supset$

$\vdash::x\neq y.\supset:.R=x\downarrow y.\vee.R=y\downarrow x.\vee.R=x\downarrow y\cup y\downarrow x:R\mathbin{\dot\cap}\breve{R}=\dot\Lambda:$

$\equiv:R=x\downarrow y.\vee.R=y\downarrow x \qquad (5)$

$\vdash .(2).(5).\supset\vdash.\text{Prop}$

***55·57.** $\vdash .R|(x\downarrow y)=\overrightarrow{R}`x\uparrow\iota`y \qquad [*37{\cdot}81.*55{\cdot}1.*53{\cdot}301]$

***55·571.** $\vdash .(x\downarrow y)|S=\iota`x\uparrow\overleftarrow{S}`y$

***55·572.** $\vdash .R|(x\downarrow y)|S=\overrightarrow{R}`x\uparrow\overleftarrow{S}`y \qquad [*55{\cdot}571.*37{\cdot}81]$

***55·573.** $\vdash .R|(x\downarrow y)|\breve{S}=\overrightarrow{R}`x\uparrow\overrightarrow{S}`y \qquad \left[*55{\cdot}572\,\frac{\breve{S}}{S}\right]$

***55·58.** $\vdash:\text{E}!R`x.\supset.R|(x\downarrow y)=(R`x)\downarrow y \qquad [*55{\cdot}57.*53{\cdot}31.*55{\cdot}1]$

***55·581.** $\vdash:\text{E}!\breve{S}`y.\supset.(x\downarrow y)|S=x\downarrow(\breve{S}`y)$

***55·582.** $\vdash:\text{E}!R`x.\text{E}!\breve{S}`y.\supset.R|(x\downarrow y)|S=(R`x)\downarrow(\breve{S}`y) \qquad [*55{\cdot}58{\cdot}581]$

***55·583.** $\vdash:\text{E}!R`x.\text{E}!S`y.\supset.R|(x\downarrow y)|\breve{S}=(R`x)\downarrow(S`y) \qquad \left[*55{\cdot}582\,\frac{\breve{S}}{\breve{S}}\right]$

Las proposiciones anteriores son, con frecuencia, útiles en aritmética. Su empleo se realiza de la siguiente manera. Sean $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ clases de las cuales α se correlaciona con γ mediante la relación R, y β con δ por la relación S. Entonces, si $x\in\gamma.y\in\delta$, el par que se compone del correlato de x y del correlato de y es $(R`x)\downarrow(S`y)$; esto es, por lo anterior, $R|(x\downarrow y)|\breve{S}$, es decir, $(R\,||\,\breve{S})`(x\downarrow y)$. De esta manera, la relación $R\,||\,\breve{S}$ correlaciona los pares, en α y β, compuestos de los correlatos de los términos en γ y δ. La forma más útil, en la práctica, de la *55·583, es la que se da más abajo, en la *55·61.

***55·6.** $\vdash .(R\,||\,\breve{S})`(z\downarrow w)=\overrightarrow{R}`z\uparrow\overrightarrow{S}`w \qquad [*55{\cdot}573.*43{\cdot}112]$

***55·61.** $\vdash:\text{E}!R`z.\text{E}!S`w.\supset.(R\,||\,\breve{S})`(z\downarrow w)=(R`z)\downarrow(S`w)$
$[*55{\cdot}583.*43{\cdot}112]$

***55·62.** $\vdash:z\neq w.S=x\downarrow z\cup y\downarrow w.\supset.S`z=x.S`w=y$

Dem.

$\vdash .*55{\cdot}13.\qquad\supset\vdash::\text{Hp}.\supset:.uSz.\equiv:u=x.z=z.\vee.u=y.z=w \qquad (1)$

$\vdash .(1) .*13{\cdot}15 . \supset \vdash :. \mathrm{Hp} . \supset : uSz . \equiv . u = x$ (2)
Similarmente $\vdash :. \mathrm{Hp} . \supset : uSw . \equiv . u = y$ (3)
$\vdash .(2) .(3) .*30{\cdot}3 . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***55·621.** $\vdash : x \neq y . S = x \downarrow z \cup y \downarrow w . \supset . \breve{S}`x = z . \breve{S}`y = w$

[La prueba como en la *55·62]

Las cuatro proposiciones siguientes pertenecen al *43, pero se insertan aquí porque la prueba utiliza la *55·13

***55·63.** $\vdash : \dot{\exists} ! Q \mathbin{\dot{\cap}} S . P \,|\, Q = R \,|\, S . \supset . P = R$

Dem.

$\vdash .*43{\cdot}112 . \supset \vdash :: \mathrm{Hp} . \supset :. P \,|\, (y \downarrow z) \,|\, Q = R \,|\, (y \downarrow z) \,|\, S :.$
[*34·1] $\supset :. (\exists u, v) . xPu . u (y \downarrow z) v . vQw . \equiv_{x,w} .$
$(\exists u, v) . xRu . u (y \downarrow z) v . vSw :.$
[*55·13.*13·22] $\supset :. xPy . zQw . \equiv_{x,w} . xRy . zSw :.$
[*4·73] $\supset :. zQw . zSw . \supset_w : xPy . \equiv_x . xRy$ (1)
$\vdash .(1) .*10{\cdot}11 .*11{\cdot}35 . \supset \vdash :. \mathrm{Hp} . \supset : xPy . \equiv_x . xRy$ (2)
$\vdash .(2) .*10{\cdot}11{\cdot}21 . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***55·631.** $\vdash : \dot{\exists} ! P \mathbin{\dot{\cap}} R . P \,\|\, Q = R \,\|\, S . \supset . Q = S$ [La prueba como en la *55·63]

***55·632.** $\vdash : P \,\|\, Q = R \,\|\, S . \dot{\exists} ! P . \dot{\exists} ! Q . \supset . \dot{\exists} ! P \mathbin{\dot{\cap}} R . \dot{\exists} ! Q \mathbin{\dot{\cap}} S$

Dem.

$\vdash .*55{\cdot}13 . \quad \supset \vdash : xPy . zQw . \supset . x \{P \,|\, (y \downarrow z) \,|\, Q\} w .$
[*43·112] $\supset . x \{(P \,\|\, Q)`(y \downarrow z)\} w$ (1)
$\vdash .(1) . \supset \vdash :. \mathrm{Hp} . \supset : xPy . zQw . \supset . x \{(R \,\|\, S)`(y \downarrow z)\} w .$
[*43·112] $\supset . x \{R \,|\, (y \downarrow z) \,|\, S\} w .$
[*34·1] $\supset . (\exists u, v) . xRu . u (y \downarrow z) v . vSw .$
[*55·13.*13·22] $\supset . xRy . zSw .$
[*4·7] $\supset . x (P \mathbin{\dot{\cap}} R) y . z (Q \mathbin{\dot{\cap}} S) w :. \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***55·64.** $\vdash :. \dot{\exists} ! P . \dot{\exists} ! Q . \vee . \dot{\exists} ! R . \dot{\exists} ! S : \supset : P \,\|\, Q = R \,\|\, S . \equiv . P = R . Q = S$
[*55·63·631·632]

*56. EL NUMERO ORDINAL 2_r

Sumario del *56.

En este número hemos de considerar la clase de aquellas relaciones tales que cada una está constituida por un par. En el caso de que los dos miembros de este par no sean idénticos, la clase de tales relaciones es (como se verá más adelante) el número ordinal 2 que, para distinguirlo del número cardinal 2, lo simbolizamos por "2_r". (Aquí el sufijo está puesto para sugerir "relacional"). La clase de todas las relaciones que se componen de un par único, sin la restricción de que los dos miembros del par sean diferentes, se simbolizará por "$\dot{2}$". Esto no es un número ordinal. Se observará que no hay número ordinal 1, porque los números ordinales conciernen a las series, y las series deben tener más de un miembro, en el caso de que tengan miembros. Esto se verá con más amplitud cuando tratemos de las series.

Las propiedades del $\dot{2}$ tienen una gran analogía con las del 1, en tanto que las propiedades del 2_r, son más parecidas a las del 2.

De muchas de las proposiciones de este número raramente se aludirá a ellas en lo sucesivo, pero tales referencias, cuando tengan lugar, son importantes. Las proposiciones más útiles en este número son las siguientes:

***56·111.** $\vdash : R \in 2_r . \equiv . \mathrm{D}`R, \mathrm{C}`R \in 1 . \mathrm{D}`R \cap \mathrm{C}`R = \Lambda$

***56·112.** $\vdash : R \in 2_r . \equiv . \mathrm{D}`R, \mathrm{C}`R \in 1 . C`R \in 2$

***56·113.** $\vdash . 2_r = \dot{2} \cap \breve{C}``2$

Obsérvese que "$\breve{C}``2$" significa "relaciones cuyos campos tienen dos términos".

***56·13.** $\vdash . \dot{2} - 2_r = \hat{R}\{(\exists a) . R = a \downarrow a\}$

***56·37.** $\vdash : R \in 2_r . \equiv . C`R \in 2 . R \dot{\cap} \breve{R} = \dot{\Lambda}$

Esto es, 2_r es la clase de las relaciones aritméticas cuyos campos tienen dos términos.

***56·381.** $\vdash : C`R = \iota`x . \equiv . R = x \downarrow x$

***56·39.** $\vdash . \dot{2} - 2_r = \breve{C}``1$

Esto es, las relaciones que son pares cuyos relacionantes y relacionados son idénticos son las relaciones cuyos campos contienen un término único.

***56·01.** $\dot{2} = \hat{R}\{(\exists x, y) . R = x \downarrow y\}$ Df

***56·02.** $2_r = \hat{R}\{(\exists x, y) . x \neq y . R = x \downarrow y\}$ Df

***56·03.** $0_r = \iota`\dot{\Lambda}$ Df

***56·1.** $\vdash : R \in \dot{2} . \equiv . (\exists x, y) . R = x \downarrow y$ [*20·3 . (*56·01)]

***56·101.** $\vdash : R \in \dot{2} . \equiv . \mathrm{D}`R, \mathrm{C}`R \in 1$

Dem.

$\vdash . *55·16 . *11·11·341 . \supset$

$\vdash :. (\exists x, y) . R = x \downarrow y . \equiv : (\exists x, y) . \mathrm{D}`R = \iota`x . \mathrm{C}`R = \iota`y :$

[*11·54] $\equiv : (\exists x) . \mathrm{D}`R = \iota`x : (\exists y) . \mathrm{C}`R = \iota`y :$

[*52·1] $\equiv : \mathrm{D}`R, \mathrm{C}`R \in 1$ (1)

$\vdash . (1) . *56·1 . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***56·102.** $\vdash . \dot{2} = \breve{\mathrm{D}}``1 \cap \breve{\mathrm{C}}``1$

Dem.

$\vdash . *56·101 . *37·106 . \supset$

$\vdash : R \in \dot{2} . \equiv . R \in \breve{\mathrm{D}}``1 . R \in \breve{\mathrm{C}}``1 .$

[*22·33] $\equiv . R \in \breve{\mathrm{D}}``1 \cap \breve{\mathrm{C}}``1 : \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***56·103.** $\vdash : R \in \dot{2} . \supset . \dot{\exists} ! R$

Dem.

$\vdash . *56·101 . \supset \vdash : R \in \dot{2} . \supset . \mathrm{D}`R \in 1 .$

[*52·16] $\supset . \exists ! \mathrm{D}`R .$

[*33·24] $\supset . \dot{\exists} ! R : \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***56·104.** $\vdash : R \in 0_r . \equiv . R = \dot{\Lambda}$ [(*56·03)]

***56·11.** $\vdash : R \in 2_r . \equiv . (\exists x, y) . x \neq y . R = x \downarrow y$ [*20·3 . (*56·02)]

***56·111.** $\vdash : R \in 2_r . \equiv . \mathrm{D}`R, \mathrm{C}`R \in 1 . \mathrm{D}`R \cap \mathrm{C}`R = \Lambda$

Dem.

$\vdash . *51·231 . *55·16 . \supset$

$\vdash : x \neq y . R = x \downarrow y . \equiv . \iota`x \cap \iota`y = \Lambda . \mathrm{D}`R = \iota`x . \mathrm{C}`R = \iota`y .$

[*13·193] $\equiv . \mathrm{D}`R \cap \mathrm{C}`R = \Lambda . \mathrm{D}`R = \iota`x . \mathrm{C}`R = \iota`y$ (1)

$\vdash . (1) . *56·11 . *11·11·341 . \supset$

$\vdash :. R \in 2_r . \equiv : (\exists x, y) . \mathrm{D}`R \cap \mathrm{C}`R = \Lambda . \mathrm{D}`R = \iota`x . \mathrm{C}`R = \iota`y :$

[*11·45] $\equiv : \mathrm{D}`R \cap \mathrm{C}`R = \Lambda : (\exists x, y) . \mathrm{D}`R = \iota`x . \mathrm{C}`R = \iota`y :$

[*11·54] $\equiv : \mathrm{D}`R \cap \mathrm{C}`R = \Lambda : (\exists x) . \mathrm{D}`R = \iota`x : (\exists y) . \mathrm{C}`R = \iota`y :$

[*52·1] $\equiv : \mathrm{D}`R \cap \mathrm{C}`R = \Lambda . \mathrm{D}`R, \mathrm{C}`R \in 1 :. \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***56·112.** $\vdash : R \in 2_r . \equiv . \mathrm{D}`R, \mathrm{C}`R \in 1 . C`R \in 2$

Dem.

$\vdash . *56·111 . *54·43 . \supset$

$\vdash : R \in 2_r . \equiv . \mathrm{D}`R, \mathrm{C}`R \in 1 . \mathrm{D}`R \cup \mathrm{C}`R \in 2 .$

[*33·16] $\equiv . \mathrm{D}`R, \mathrm{C}`R \in 1 . C`R \in 2 : \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***56·113.** $\vdash . 2_r = \dot{2} \cap \breve{C}``2$

Dem.

$\vdash . *56·112·101 . \supset \vdash : R \in 2_r . \equiv . R \in \dot{2} . C`R \in 2 .$

[*37·106.*33·122] $\equiv . R \in \dot{2} . R \in \breve{C}``2 .$

[*22·33] $\equiv . R \in \dot{2} \cap \breve{C}``2 : \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***56·114.** $\vdash . 2_r = \breve{\mathrm{D}}``1 \cap \breve{\mathrm{C}}``1 \cap \breve{C}``2$ [*56·113·102]

***56·12.** $\vdash : R \in 2_r . \equiv . R \in \dot{2} . R \subseteq J$

Dem.

$\vdash .*55{\cdot}3 .*50{\cdot}11 . \supset \vdash : x \neq y . \equiv . x \downarrow y \subset J :$

[Fact] $\supset \vdash : R = x \downarrow y . x \neq y . \equiv . R = x \downarrow y . x \downarrow y \subset J .$

[*13·193] $\equiv . R = x \downarrow y . R \subset J$ (1)

$\vdash .(1) .*11{\cdot}11{\cdot}341 . \supset$

$\vdash :. (\exists x, y) . R = x \downarrow y . x \neq y . \equiv : (\exists x, y) . R = x \downarrow y . R \subset J :$

[*11·45] $\equiv : (\exists x, y) . R = x \downarrow y : R \subset J :$

[*56·1] $\equiv : R \in \dot{2} . R \subset J$ (2)

$\vdash .(2) .*56{\cdot}11 . \supset \vdash .$ Prop

***56·121.** $\vdash . 2_r \subset \dot{2}$ [*56·113]

***56·122.** $\vdash : R \in 2_r . \supset . \dot{\exists} ! R$ [*56·121·103]

***56·13.** $\vdash . \dot{2} - 2_r = \hat{R} \{(\exists a) . R = a \downarrow a\}$

Dem.

$\vdash .*56{\cdot}11 .*11{\cdot}52 .$ Transp. $\supset$

$\vdash : R \sim \in 2_r . \equiv : R = x \downarrow y . \supset_{x,y} . x = y$ (1)

$\vdash .(1) .*56{\cdot}1 . \supset$

$\vdash :. R \in \dot{2} - 2_r . \equiv : (\exists a, b) . R = a \downarrow b : R = x \downarrow y . \supset_{x,y} . x = y :$

[*11·45] $\equiv : (\exists a, b) : R = a \downarrow b : R = x \downarrow y . \supset_{x,y} . x = y :$

[*13·193] $\equiv : (\exists a, b) : R = a \downarrow b : a \downarrow b = x \downarrow y . \supset_{x,y} . x = y :$

[*55·202] $\equiv : (\exists a, b) : R = a \downarrow b : a = x . b = y . \supset_{x,y} . x = y :$

[*13·21] $\equiv : (\exists a, b) . R = a \downarrow b . a = b :$

[*13·195] $\equiv : (\exists a) . R = a \downarrow a :. \supset \vdash .$ Prop

$\dot{2} - 2_r$ pudo definirse como el ordinal número 1, puesto que es a los que llamaremos número de relación (cf. *153). Sin embargo queremos que nuestros números ordinales sean clases de relaciones *seriales*, y que talès relaciones tengan la propiedad de estar contenidas en la diversidad. Por tanto, si hubiésemos definido $\dot{2} - 2_r$ como el ordinal número 1, habríamos introducido una excepción importante que acarrearía no pocas complicaciones en la aritmética ordinal. Por consiguiente, no hemos adoptado esta vía.

***56·14.** $\vdash . \mathrm{D}`(x \downarrow) = \dot{2} \cap \overleftarrow{\mathrm{D}}`\iota`x$

Dem.

$\vdash .*33{\cdot}6 . \supset \vdash : \mathrm{D}`R = \iota`x . \equiv . R \in \overleftarrow{\mathrm{D}}`\iota`x$ (1)

$\vdash .(1) .*56{\cdot}1 . \supset$

$\vdash :. R \in \dot{2} \cap \overleftarrow{\mathrm{D}}`\iota`x . \equiv : (\exists z, y) . R = z \downarrow y : \mathrm{D}`R = \iota`x :$

[*55·16] $\equiv : (\exists z, y) . \mathrm{D}`R = \iota`z . \mathrm{C}`R = \iota`y : \mathrm{D}`R = \iota`x :$

[*11·45] $\equiv : (\exists z, y) . \mathrm{D}`R = \iota`z . \mathrm{C}`R = \iota`y . \mathrm{D}`R = \iota`x :$

[*13·193] $\equiv : (\exists z, y) . \mathrm{D}`R = \iota`z . \mathrm{C}`R = \iota`y . \iota`z = \iota`x :$

[*51·23] $\equiv : (\exists z, y) . \mathrm{D}`R = \iota`z . \mathrm{C}`R = \iota`y . z = x :$

[*13·195] $\equiv : (\exists y) . \mathrm{D}`R = \iota`x . \mathrm{C}`R = \iota`y :$

[*55·16] $\equiv : (\exists y) . R = x \downarrow y :$

$$[*55{\cdot}22] \qquad \equiv : R \in \mathrm{D}`(x \downarrow) :. \supset \vdash . \mathrm{Prop}$$

***56·141.** $\vdash . \mathrm{D}`\downarrow x = \dot{2} \cap \overleftarrow{\mathrm{C}}`\iota`\iota`x$ [Prueba como en la *56·14]

***56·15.** $\vdash . \mathrm{D}`(x \downarrow) - \iota`(x \downarrow x) = 2_r \cap \overleftarrow{\mathrm{D}}`\iota`\iota`x$

Dem.

$\vdash . *55{\cdot}22{\cdot}16 . \supset \vdash :. R \in \{\mathrm{D}`(x \downarrow)\} - \iota`(x \downarrow x) .$

$\equiv : (\exists y) . \mathrm{D}`R = \iota`x . \mathrm{C}`R = \iota`y : \sim(\mathrm{D}`R = \iota`x . \mathrm{C}`R = \iota`x) :$

$[*10{\cdot}35.*4{\cdot}51.*5{\cdot}61] \equiv : (\exists y) . \mathrm{D}`R = \iota`x . \mathrm{C}`R = \iota`y . \sim(\mathrm{C}`R = \iota`x) :$

$[*13{\cdot}193] \qquad \equiv : (\exists y) . \mathrm{D}`R = \iota`x . \mathrm{C}`R = \iota`y . \sim(\iota`y = \iota`x) :$

$[*51{\cdot}23] \qquad \equiv : (\exists y) . \mathrm{D}`R = \iota`x . \mathrm{C}`R = \iota`y . x \neq y :$

$[*13{\cdot}195.*51{\cdot}23] \qquad \equiv : (\exists z, y) . z \neq y . \mathrm{D}`R = \iota`z . \mathrm{C}`R = \iota`y . \iota`z = \iota`x :$

$[*13{\cdot}193] \qquad \equiv : (\exists z, y) . z \neq y . \mathrm{D}`R = \iota`z . \mathrm{C}`R = \iota`y . \mathrm{D}`R = \iota`x :$

$[*11{\cdot}45] \qquad \equiv : (\exists z, y) . z \neq y . \mathrm{D}`R = \iota`z . \mathrm{C}`R = \iota`y : \mathrm{D}`R = \iota`x :$

$[*55{\cdot}16.*33{\cdot}6] \qquad \equiv : (\exists z, y) . z \neq y . R = z \downarrow y : R \in \overleftarrow{\mathrm{D}}`\iota`x :$

$[*56{\cdot}11.*22{\cdot}33] \qquad \equiv : R \in 2_r \cap \overleftarrow{\mathrm{D}}`\iota`\iota`x :. \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***56·151.** $\vdash . \mathrm{D}`(\downarrow x) - \iota`(x \downarrow x) = 2_r \cap \overleftarrow{\mathrm{C}}`\iota`\iota`x$ [Prueba como en la *56·15]

***56·16.** $\vdash . x \downarrow y \in \dot{2}$

Dem.

$\vdash . *21{\cdot}2 . \supset \vdash . x \downarrow y = x \downarrow y .$

$[*11{\cdot}36] \quad \supset \vdash . (\exists z, w) . x \downarrow y = z \downarrow w .$

$[*56{\cdot}1] \quad \supset \vdash . x \downarrow y \in \dot{2} . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***56·17.** $\vdash : x \downarrow y \in 2_r . \equiv . y \downarrow x \in 2_r . \equiv . x \neq y$

Dem.

$\vdash . *56{\cdot}11 . \supset$

$\vdash :. x \downarrow y \in 2_r . \equiv : (\exists z, w) . z \neq w . x \downarrow y = z \downarrow w :$

$[*55{\cdot}202] \qquad \equiv : (\exists z, w) . z \neq w . x = z . y = w :$

$[*13{\cdot}22] \qquad \equiv : x \neq y \qquad (1)$

Similarmente

$\vdash : y \downarrow x \in 2_r . \equiv . x \neq y \qquad (2)$

$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***56·18.** $\vdash : x \sim\in \alpha . \equiv . x \downarrow ``\alpha \subset 2_r . \equiv . \downarrow x ``\alpha \subset 2_r$

Dem.

$\vdash . *13{\cdot}196 . \supset \vdash :. x \sim\in \alpha . \equiv : y \in \alpha . \supset_y . y \neq x :$

$[*56{\cdot}17] \qquad \equiv : y \in \alpha . \supset_y . x \downarrow y \in 2_r :$

$[*37{\cdot}61.*38{\cdot}12{\cdot}11] \qquad \equiv : x \downarrow ``\alpha \subset 2_r \qquad (1)$

Similarmente $\vdash : x \sim\in \alpha . \equiv . \downarrow x ``\alpha \subset 2_r \qquad (2)$

$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

***56·19.** $\vdash : R \in 2_r . x \in \mathrm{D}`R . \equiv . (\exists y) . x \neq y . R = x \downarrow y . \equiv . R \in x \downarrow ``- \iota`x$

Dem.

$\vdash . *56{\cdot}11 . *11{\cdot}45 . \supset \vdash :. R \in 2_r . x \in \mathrm{D}`R . \equiv : (\exists y, z) . y \neq z . R = y \downarrow z . x \in \mathrm{D}`R :$

$[*55{\cdot}15] \qquad \equiv : (\exists y, z) . y \neq z . R = y \downarrow z . x \in \iota`y :$

$[*51{\cdot}23] \qquad \equiv : (\exists y, z) . y \neq z . R = y \downarrow z . x = y :$

[*13·195] $\equiv : (\exists z) . x \neq z . R = x \downarrow z :$ (1)

[*51·15] $\equiv : (\exists z) . z \in -\iota' x . R = x \downarrow z :$

[*38·13] $\equiv : R \in x \downarrow `` -\iota' x$ (2)

$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash .$ Prop

***56·191.** $\vdash : R \in 2_r . x \in \mathrm{C}' R . \equiv . (\exists y) . x \neq y . R = y \downarrow x . \equiv . R \in \downarrow x `` -\iota' x$

[La prueba como en la *56·19]

***56·2.** $\vdash :. R \in \dot{2} . \equiv : (\exists x, y) : z R w . \equiv_{z,w} . z = x . w = y$ [*55·13 . *56·1]

***56·21.** $\vdash :. R \in \dot{2} . \equiv : \dot{\exists} ! R : x R y . z R w . \supset_{x,y,z,w} . x = z . y = w$ [*56·2 . *14·124]

***56·22.** $\vdash . \dot{\Lambda} \sim \in \dot{2}$ [*56·103 . *25·53]

***56·24.** $\vdash . \dot{\exists} ! \dot{2} . \dot{\exists} ! - \dot{2}$ [*56·22·16 . *10·24]

***56·25.** $\vdash . \dot{2} \neq \Lambda \cap \mathrm{Rel} . \dot{2} \neq \mathrm{V} \cap \mathrm{Rel}$ [*56·24 . *24·54·17]

***56·26.** $\vdash :. R \in \dot{2} \cup \iota' \dot{\Lambda} . \equiv : x R y . z R w . \supset_{x,y,z,w} . x = z . y = w$

Esta proposición es la análoga de la *52·4.

Dem.

$\vdash . *51·236 . \supset \vdash :: R \in \dot{2} \cup \iota' \dot{\Lambda} .$

$\equiv :. R \in \dot{2} . \vee . R = \dot{\Lambda} :.$

[*25·51] $\equiv :. R \in \dot{2} . \vee . \sim \dot{\exists} ! R :.$

[*56·21] $\equiv :. \dot{\exists} ! R : x R y . z R w . \supset_{x,y,z,w} . x = z . y = w :. \vee :. \sim \dot{\exists} ! R :.$

[*5·62] $\equiv :. x R y . z R w . \supset_{x,y,z,w} . x = z . y = w . \vee . \sim \dot{\exists} ! R$ (1)

$\vdash . *11·36 . \mathrm{Transp} . \supset \vdash :. \sim \dot{\exists} ! R . \supset : \sim (x R y) . \sim (z R w) :$

[*2·21] $\supset : x R y . \supset . x = z : z R w . \supset . y = w :$

[*3·47] $\supset : x R y . z R w . \supset . x = z . y = w$ (2)

$\vdash . (2) . *11·11·3 . \quad \supset \vdash :. \sim \dot{\exists} ! R . \supset : x R y . z R w . \supset_{x,y,z,w} . x = z . y = w$ (3)

$\vdash . (1) . (3) . *4·72 . \quad \supset \vdash .$ Prop

***56·261.** $\vdash :: R \in \dot{2} . \supset :. S \subseteq R . \equiv : S = \dot{\Lambda} . \vee . S = R$

Dem.

$\vdash . *55·341 . \supset \vdash :: R = x \downarrow y \supset :. S \subseteq R . \equiv : S = \dot{\Lambda} . \vee . S = R$ (1)

$\vdash . (1) . *11·11·35 . *56·1 . \supset \vdash .$ Prop

***56·262.** $\vdash :. R \in \dot{2} . \supset : S \subseteq R . \dot{\exists} ! S . \equiv . S = R$

Dem.

$\vdash . *56·22 . \supset \vdash :. R \in \dot{2} . \supset : S = R . \supset . S \neq \dot{\Lambda}$ (1)

$\vdash . (1) . *5·75 . *56·261 . \supset$

$\vdash :. R \in \dot{2} . \supset : S \subseteq R . S \neq \dot{\Lambda} . \equiv . S = R$ (2)

$\vdash . (2) . *25·54 . \supset \vdash .$ Prop

***56·27.** $\vdash :. R \in \dot{2} . \supset : \dot{\exists} ! R \mathbin{\dot{\cap}} S . \equiv . R \mathbin{\dot{\cap}} S \in \dot{2}$

Dem.

$\vdash . *55·34 . *23·43 . \supset$

$\vdash :. R = x \downarrow y . \supset : \dot{\exists} ! R \mathbin{\dot{\cap}} S . \equiv . R \mathbin{\dot{\cap}} S = R .$

[*56·16] $\supset . R \mathbin{\dot{\cap}} S \in \dot{2}$ (1)

$\vdash . *56·103 . \quad \supset \vdash : R \mathbin{\dot{\cap}} S \in \dot{2} . \supset . \dot{\exists} ! R \mathbin{\dot{\cap}} S$ (2)

$\vdash .(1).(2). \supset \vdash :. R = x \downarrow y . \supset : \dot{\exists} ! R \cap S . \equiv . R \cap S \in \dot{2}$ (3)

$\vdash .(3).*11{\cdot}11{\cdot}35 .*56{\cdot}1 . \supset \vdash .$ Prop

***56·28.** $\vdash :. R \in \dot{2} . \supset : \dot{\exists} ! R \cap S . \equiv . R \subset S . \equiv . R \cap S = R$

Dem.

$\vdash .*55{\cdot}3 . \supset \vdash :. R = x \downarrow y . \supset : \dot{\exists} ! R \cap S . \equiv . R \subset S .$ (1)

[*23·621] $\equiv . R \cap S = R$ (2)

$\vdash .(1).(2).*11{\cdot}11{\cdot}35 .*56{\cdot}1 . \supset \vdash .$ Prop

***56·281.** $\vdash :. R \in 2_r . \supset : \dot{\exists} ! R \cap S . \equiv . R \subset S . \equiv . R \cap S = R . \equiv . R \cap S \in 2_r$

Dem.

$\vdash .*56{\cdot}121 . \supset \vdash :.$ Hp $. \supset : R \in \dot{2} :$

[*56·28] $\supset : \dot{\exists} ! R \cap S . \equiv . R \subset S . \equiv . R \cap S = R$ (1)

$\vdash .*13{\cdot}13 . \supset \vdash :.$ Hp $. \supset : R \cap S = R . \supset . R \cap S \in 2_r :$

[(1)] $\supset : \dot{\exists} ! R \cap S . \supset . R \cap S \in 2_r$ (2)

$\vdash .*56{\cdot}122 . \supset \vdash : R \cap S \in 2_r . \supset . \dot{\exists} ! R \cap S$ (3)

$\vdash .(2).(3). \supset \vdash :.$ Hp $. \supset : \dot{\exists} ! R \cap S . \equiv . R \cap S \in 2_r$ (4)

$\vdash .(1).(4). \supset \vdash .$ Prop

***56·29.** $\vdash :: P, Q \in \dot{2} . \supset :. P \subset Q \cup R . \equiv : P = Q . \vee . P \subset R$

Dem.

$\vdash .*55{\cdot}51 . \supset$

$\vdash :. x \downarrow y \subset z \downarrow w \cup R . \supset : x (z \downarrow w) y . \vee . x \downarrow y \subset R :$

[*55·31] $\supset : x \downarrow y = z \downarrow w . \vee . x \downarrow y \subset R$ (1)

$\vdash .(1).*13{\cdot}12 . \supset$

$\vdash :: P = x \downarrow y . \supset :: Q = z \downarrow w . \supset :. P \subset Q \cup R . \supset : P = Q . \vee . P \subset R$ (2)

$\vdash .(2).*11{\cdot}11{\cdot}35 .*56{\cdot}1 . \supset$

$\vdash :: P \in \dot{2} . \supset :: Q = z \downarrow w . \supset :. P \subset Q \cup R . \supset : P = Q . \vee . P \subset R$ (3)

$\vdash .(3).*11{\cdot}11{\cdot}3{\cdot}35 .*56{\cdot}1 . \supset$

$\vdash :: P \in \dot{2} . \supset :: Q \in \dot{2} . \supset :. P \subset Q \cup R . \supset : P = Q . \vee . P \subset R$ (4)

$\vdash .*23{\cdot}58{\cdot}61 . \supset \vdash :. P = Q . \vee . P \subset R : \supset . P \subset Q \cup R$ (5)

$\vdash .(4).$ Imp $.(5). \supset \vdash .$ Prop

***56·3.** $\vdash :. P, Q \in \dot{2} . \supset : P \subset Q . \equiv . P = Q . \equiv . \dot{\exists} ! P \cap Q$

Dem.

$\vdash .*55{\cdot}3{\cdot}31 . \supset$

$\vdash : x \downarrow y \subset z \downarrow w . \equiv . x \downarrow y = z \downarrow w . \equiv . \dot{\exists} ! (x \downarrow y) \cap (z \downarrow w)$ (1)

$\vdash .(1).*13{\cdot}12 . \supset$

$\vdash :. P = x \downarrow y . Q = z \downarrow w . \supset : P \subset Q . \equiv . P = Q . \equiv . \dot{\exists} ! P \cap Q$ (2)

$\vdash .(2).*11{\cdot}11{\cdot}35 .*56{\cdot}1 . \supset \vdash .$ Prop

Los pasos que van desde el (2) hasta la conclusión son análogos a los que van desde el (2) del *52·29 hasta la conclusión del *56·29. Pasos análogos que tengan lugar en pruebas sucesivas serán necesariamente indicadas como en la anterior.

***56·31.** $\vdash :. P, Q \in \dot{2} . \supset : P \neq Q . \equiv . P \cap Q = \Lambda$ [*56·3 . Transp]

***56·32.** $\vdash : P \in \dot{2} . \supset . P \cap Q \in \dot{2} \cup \iota`\dot{\Lambda}$

Dem.

$\vdash . *56·27 . \supset \vdash :.$ Hp $. \supset : \dot{\exists} ! P \cap Q . \supset . P \cap Q \in \dot{2} :$
$[*2·54.*25·54] \quad \supset : P \cap Q = \dot{\Lambda} . \vee . P \cap Q \in \dot{2} :$
$[*51·236] \quad \supset : P \cap Q \in \dot{2} \cup \iota`\dot{\Lambda} :. \supset \vdash . \text{Prop}$

***56·33.** $\vdash :: P, Q \in \dot{2} . \supset :. R \subseteq P \cup Q . \equiv : R = \dot{\Lambda} . \vee . R = P . \vee . R = Q . \vee . R = P \cup Q$

Dem.

$\vdash . *55·5 . *13·12 . \supset \vdash :: P = x \downarrow y . Q = z \downarrow w . \supset :.$
$R \subseteq P \cup Q . \equiv : R = \dot{\Lambda} . \vee . R = P . \vee . R = Q . \vee . R = P \cup Q \qquad (1)$
$\vdash . (1) . *11·11·35 . *56·1 . \supset \vdash . \text{Prop}$

***56·34.** $\vdash :: P, Q \in \dot{2} . P \neq Q . \supset :. R \subseteq P \cup Q . \dot{\exists} ! R . R \neq P \cup Q . \equiv : R = P . \vee . R = Q$

Dem.

$\vdash . *56·33·103 . *5·75 . *25·54 . \supset$
$\vdash :: P, Q \in \dot{2} . \supset :. R \subseteq P \cup Q . \dot{\exists} ! R . \equiv : R = P . \vee . R = Q . \vee . R = P \cup Q \qquad (1)$
$\vdash . *23·62 . \quad \supset \vdash : P = P \cup Q . \equiv . Q \subseteq P :$
$[*56·3] \quad \supset \vdash :. P, Q \in \dot{2} . \supset : P = P \cup Q . \equiv . P = Q :$
$[\text{Transp}] \quad \supset : P \neq Q . \supset . P \neq P \cup Q :.$
$[*13·181] \quad \supset \vdash :. P, Q \in \dot{2} . P \neq Q . \supset : R = P . \supset . R \neq P \cup Q \qquad (2)$

$\vdash . (2)\frac{Q, P}{P, Q} . \supset \vdash :. P, Q \in 2 . P \neq Q . \supset : R = Q . \supset . R \neq P \cup Q \qquad (3)$

$\vdash . (2) . (3) . \quad \supset \vdash :: P, Q \in \dot{2} . P \neq Q . \supset :. R = P . \vee . R = Q : \supset . R \neq P \cup Q \qquad (4)$
$\vdash . (1) . (4) . *5·75 . \supset \vdash . \text{Prop}$

***56·35.** $\vdash : C`R \in 2 . R \cap \breve{R} = \dot{\Lambda} . \supset . R \in 2_r$

Dem.

$\vdash . *55·54 . \supset$
$\vdash :. x \neq y . C`R = \iota`x \cup \iota`y . R \cap \breve{R} = \dot{\Lambda} . \supset : R = x \downarrow y . \vee . R = y \downarrow x :$
$[*56·17] \quad \supset : R \in 2_r \qquad (1)$
$\vdash . (1) . *11·11·35 . *54·101 . \supset \vdash . \text{Prop}$

***56·36.** $\vdash : R \in 2_r . \supset . C`R \in 2 . R \cap \breve{R} = \dot{\Lambda}$

Dem.

$\vdash . *55·54 . \supset$
$\vdash : x \neq y . R = x \downarrow y . \supset . x \neq y . C`R = \iota`x \cup \iota`y . R \cap \breve{R} = \dot{\Lambda} \qquad (1)$
$\vdash . (1) . *11·11·34 . *56·11 . \supset$
$\vdash :. R \in 2_r . \supset : (\exists x, y) . x \neq y . C`R = \iota`x \cup \iota`y . R \cap \breve{R} = \dot{\Lambda} :$
$[*54·101.*11·45] \supset : C`R \in 2 . R \cap \breve{R} = \dot{\Lambda} :. \supset \vdash . \text{Prop}$

La proposición siguiente, además de emplearse en la *56·38, se usa en la teoría elemental de series (*204·463).

***56·37.** $\vdash : R \in 2_r . \equiv . C`R \in 2 . R \mathbin{\dot\cap} \breve{R} = \dot\Lambda$ [*56·35·36]

***56·38.** $\vdash . 2_r = \breve{C}``2 \cap \hat{R}(R \mathbin{\dot\cap} \breve{R} = \dot\Lambda)$

Dem.

$\vdash . *37·106 . *33·122 . \supset \vdash : C`R \in 2 . \quad \equiv . R \in \breve{C}``2$ (1)

$\vdash . *20·3 . \quad \supset \vdash : R \mathbin{\dot\cap} \breve{R} = \quad \equiv . R \in \hat{R}(R \mathbin{\dot\cap} \breve{R} = \dot\Lambda)$ (2)

$\vdash . (1) . (2) . *56·37 . \quad \supset \vdash : R \in 2_r . \quad \equiv . R \in \breve{C}``2 . R \in \hat{R}(R \mathbin{\dot\cap} \breve{R} = \dot\Lambda) .$

[*22·33] $\equiv . R \in \breve{C}``2 \cap \hat{R}(R \mathbin{\dot\cap} \breve{R} = \dot\Lambda) : \supset \vdash .$ Prop

Esta proposición es importante en cuanto que establece la conexión entre el cardinal y el ordinal 2. Esto muestra que el ordinal 2 se compone de las relaciones asimétricas cuyos campos tienen términos 2 (cardinales). Se usa en la teoría de las series bien ordenadas (*250·44).

La proposición siguiente, además de usarse en la *56·39 se emplea en la aritmética de relaciones (*165·38) y en la teoría de series (*205·4).

***56·381.** $\vdash : C`R = \iota`x . \equiv . R = x \downarrow x$

Dem.

$\vdash . *33·24·161 . *51·161 . \supset \vdash : C`R = \iota`x . \supset . \exists ! D`R . D`R \subset \iota`x .$

[*51·4] $\supset . D`R = \iota`x$ (1)

Similarmente $\vdash : C`R = \iota`x . \supset . \breve{D}`R = \iota`x$ (2)

$\vdash . (1) . (2) . *55·16 . \quad \supset \vdash : C`R = \iota`x . \supset . R = x \downarrow x$ (3)

$\vdash . *55·15 . \quad \supset \vdash : R = x \downarrow x . \supset . C`R = \iota`x$ (4)

$\vdash . (3) . (4) . \supset \vdash .$ Prop

***56·39.** $\vdash . \dot{2} - 2_r = \breve{C}``1$

Dem.

$\vdash . *56·381 . \supset \vdash : C`R \in 1 . \equiv . (\exists x) . R = x \downarrow x .$

[*56·13] $\equiv . R \in \dot{2} - 2_r$ (1)

$\vdash . (1) . *37·106 . \supset \vdash .$ Prop

Esta proposición establece la conexión entre $\dot{2} - 2_r$ y 1, enseñando que $\dot{2} - 2_r$ es la clase de las relaciones cuyos campos están constituidos por un término único. Se usa en la discusión del 0_r, del 2_r y de $\dot{2} - 2_r$ como números de relación (*153·301).

***56·4.** $\vdash :. \mu \subset \dot{2} . \supset : x \downarrow y \in \mu . \equiv . x (\dot{s}`\mu) y$

Dem.

$\vdash . *41·11 . \supset \vdash :. \text{Hp} . \supset : x (\dot{s}`\mu) y . \equiv . (\exists R) . R \in \dot{2} . R \in \mu . xRy .$

[*56·1] $\equiv . (\exists z, w) . z \downarrow w \in \mu . x (z \downarrow w) y .$

[*55·13] $\equiv . (\exists z, w) . z \downarrow w \in \mu . z = x . w = y .$

[*13·22] $\equiv . x \downarrow y \in \mu :. \supset \vdash .$ Prop

Esta proposición es la análoga de la *53·23. Se usa en el número sobre la exponenciación en la aritmética de relaciones (*176·19).

APENDICE A

*8. LA TEORIA DE LA DEDUCCION PARA PROPOSICIONES QUE CONTIENEN VARIABLES APARENTES (72)

Todas las proposiciones, de cualquier orden, se derivan de una matriz compuesta de proposiciones elementales combinadas por medio del trazo. Dada una matriz de este tipo, cualquier constituyente puede permanecer constante o transformarse en una variable aparente; esto último puede hacerse de dos maneras, o bien considerando "todos los valores" o "algunos valores". Así, pues, si p y q son proposiciones elementales que dan lugar a $p \mid q$, podemos sustituir p por ϕx o q por ψy o ambas cosas, en donde ϕx y ψy son funciones proposicionales cuyos valores son proposiciones elementales. De este modo, llegamos, para empezar, a cuatro nuevas proposiciones:

$$(x) \cdot (\phi x \mid q), \quad (\exists x) \cdot (\phi x \mid q), \quad (y) \cdot (p \mid \psi y), \quad (\exists y) \cdot (p \mid \psi y).$$

Por medio de definiciones, podemos separar en estas expresiones la parte constante de la variable; ponemos

***8·01.** $\{(x) \cdot \phi x\} \mid q \cdot = \cdot (\exists x) \cdot (\phi x \mid q)$ Df

***8·011.** $\{(\exists x) \cdot \phi x\} \mid q \cdot = \cdot (x) \cdot (\phi x \mid q)$ Df

***8·012.** $p \mid \{(y) \cdot \psi y\} \cdot = \cdot (\exists y) \cdot (p \mid \psi y)$ Df

***8·013.** $p \mid \{(\exists y) \cdot \psi y\} \cdot = \cdot (y) \cdot (p \mid \psi y)$ Df

Estas definiciones determinan el significado del trazo cuando tienen lugar entre dos proposiciones de las cuales una es elemental mientras que la otra es de primer orden.

Cuando el trazo aparece entre dos proposiciones que son de primer orden, adoptaremos la regla de que las definiciones anteriores deben aplicarse primero en la parte izquierda, considerando la de la derecha como si fuese elemental y, a continuación, aplicarla a la de la derecha. De este modo

$$\{(x) \cdot \phi x\} \mid \{(y) \cdot \psi y\} \cdot = : (\exists x) : \phi x \mid \{(y) \cdot \psi y\} : = : (\exists x) : (\exists y) \cdot (\phi x \mid \psi y).$$

La misma regla puede aplicarse a n proposiciones; éstas deben irse eliminando de izquierda a derecha. Si una proposición aparece más de una vez, pueden irse eliminando sucesivamente como si fuese proposiciones diferentes. Estas reglas se necesitan sólo en atención a la definición, puesto que los diferentes órdenes de eliminación dan resultados equivalentes. Esto sólo es verdad porque estamos tratando de varias funciones cada una de las cuales contiene una variable, y no se

---

(72) Este capítulo está para sustituir al *9 del texto.

presentan variables a ambos lados del trazo; no sería verdadero si tratásemos de funciones de varias variables. Por ejemplo, tenemos:

$$(\exists x) : (y) . (\phi x | \psi y) : \equiv : (y) : (\exists x) . (\phi x | \psi y).$$

Pero en general no tenemos

$$(\exists x) : (y) . \chi(x, y) : \equiv : (y) : (\exists x) . \chi(x, y);$$

aquí al lado derecho tiene más probabilidades de ser verdadero que el lado izquierdo. De momento, sin embargo, no nos ocupamos de funciones variables de dos variables.

Debe observarse que esta posibilidad de cambiar el orden de las variables es una virtud del trazo. Tenemos

$$(\exists x) : (y) . \phi x | \psi y : \equiv : (y) : (\exists x) . \phi x | \psi y : \equiv : (\exists x) . \sim \phi x . \vee . (y) . \sim \psi y.$$

Es decir, estas proposiciones equivalentes son verdaderas cuando, y sólo cuando, o ϕ es algunas veces falsa, o ψ es siempre falsa. Pero si, por ejemplo, tomamos

$$\phi x \vee \psi y . \sim \phi x \vee \sim \psi y$$

no conseguiremos el mismo resultado. Pues

$$(\exists x) : (y) . \phi x \vee \psi y . \sim \phi x \vee \sim \psi y : \supset : (y) . \psi y . \vee . (y) . \sim \psi y,$$

mientras que $(y) : (\exists x) . \phi x \vee \psi y . \sim \phi x \vee \sim \psi y$ no implica esto.

Escrita con notación de trazos, después de alguna reducción, la matriz anterior es

$$\{\phi x | (\psi y | \psi y)\} | \{\psi y | (\phi x | \phi x)\}.$$

Aquí, tanto la x como la y se presentan a ambos lados de la matriz principal. Por consiguiente, para cambiar el orden de "$(\exists x)$" y de "(y)" es suficiente (aunque no *siempre* necesario) que la matriz deba contener alguna parte de la forma $\phi x \mid \psi y$, y que la x y la y no se presenten en ninguna otra parte de la matriz. (Esta parte puede ser, desde luego, la matriz total). Suponemos la legitimidad de este intercambio por una proposición primitiva, y en la práctica colocamos todos los prefijos $\exists$ para tenerlo tan alejados de la parte derecha como sea posible, porque esto facilita las pruebas.

Nuestras proposiciones primitivas son las siguientes:

***8·1.** $\vdash . (\exists x, y) . \phi a | (\phi x | \phi y)$ Pp

Aplicando las definiciones,

$$\vdash : \phi a . \supset . (\exists x) . \phi x.$$

***8·11.** $\vdash . (\exists x) . \phi x | (\phi a | \phi b)$ Pp

Aplicando las definiciones, esto viene a ser

$$\vdash : (x) . \phi x . \supset . \phi a . \phi b.$$

Tenemos $\phi a | (\phi a | \phi b) . \vee . \phi b | (\phi a | \phi b)$

y por la *8·1 $\vdash : \phi a | (\phi a | \phi b) . \supset . (\exists x) . \phi x | (\phi a | \phi b) :$
$\phi b | (\phi a | \phi b) . \supset . (\exists x) . \phi x | (\phi a | \phi b),$

pero no podemos deducir $(\exists x) . \phi x \mid (\phi a \mid \phi b)$ sin la *8·11 o una equivalente.

*8·12. De "$(x) . \phi x$" y de "$(x) . \phi x \supset \psi x$" podemos inferir "$(x) . \psi x$" siempre que ϕy ψ no sean elementales. Pp.

*8·13. Si todas las veces que se presenta x lo hace de forma separada de todas las presentaciones de y por medio de un cierto trazo, podemos cambiar el orden de x e y en el prefijo, es decir, podemos sustituir "$(y) : (\exists x) . \phi x \mid \psi y$" por "$(\exists x) : (y) . \phi x \mid \psi y$" y *viceversa*. Pp.

A las últimas proposiciones primitivas pueden aplicarse no sólo una o dos variables sino muchas. Así, por ejemplo, la *8·1 nos permite aseverar

$$\vdash : \phi(a_1, a_2, \ldots a_n) . \supset . (\exists x_1, x_2, \ldots x_n) . \phi(x_1, x_2, \ldots x_n).$$

*8·2. $\vdash : (x) . \phi x . \supset . \phi a \quad \left[*8{\cdot}11 \frac{a}{b}\right]$

En lo que sigue, el método de prueba es invariablemente el mismo. Primero aplicamos las definiciones hasta que la proposición aseverada completa sea puesta en forma de matriz con un prefijo. Si fuese necesario, aplicamos la *8·13 para cambiar el orden de las variables en el prefijo. Cuando la proposición que se quiere probar ha sido llevada a esta forma, lo deducimos mediante las *8·1·11, usando la *8·12 en la deducción, si fuese preciso. Se observará que la *8·1 es $\vdash : \phi a . \supset . (\exists x) . \phi x$. Por eso, mediante la *8·12, siempre que conozcamos ϕa, podemos aseverar $(\exists x) . \phi x$. La *8·1 se emplea frecuentemente en este procedimiento.

*8·21. $\vdash :. (x) . \phi x \supset \psi x . \supset : (\exists x) . \phi x . \supset . (\exists x) . \psi x$

Dem.

Aplicando las definiciones, y usando la *8·13, la proposición que se quiere probar viene a ser

$$(y, y') : (\exists x, z, w, z', w') . \{\phi x \mid (\psi x \mid \psi x)\} \mid [\{\phi y \mid (\psi z \mid \psi w)\} \mid \{\phi y' \mid (\psi z' \mid \psi w')\}].$$

Poniendo $z = w = z' = w' x$, la anterior se convierte en

$$(y, y') : (\exists x) . \{\phi x \mid (\psi x \mid \psi x)\} \mid [\{\phi y \mid (\psi x \mid \psi x)\} \mid \{\phi y' \mid (\psi x \mid \psi x)\}].$$

Por medio de la *8·1, la proposición que se ha de probar es verdadera si ésta es verdadera. Pero ésta es verdadera, por la *8·11, poniendo y e y' en lugar de a y b, y $\phi y \mid (\psi x \mid \psi x)$ en lugar de ϕa. Por tanto, la proposición es verdadera.

*8·22. $\vdash : \phi a \vee \phi b . \supset . (\exists x) . \phi x$

Dem.

$\vdash . *8{\cdot}11 . \supset \vdash . (\exists z) . (\sim \phi z) \mid (\sim \phi a \mid \sim \phi b)$ (1)

Transp. $\supset \vdash : (\sim \phi z) \mid (\sim \phi a \mid \sim \phi b) . \supset . (\phi a \vee \phi b) \mid (\phi z \mid \phi z)$ (2)

$\vdash . (1) . (2) . *8{\cdot}21 . \supset \vdash . (\exists z) . (\phi a \vee \phi b) \mid (\phi z \mid \phi z)$ (3)

$\vdash . (3) . *8{\cdot}1{\cdot}21 . \quad \supset \vdash . (\exists z, w) . (\phi a \vee \phi b) \mid (\phi z \mid \phi w) .$

$[(*8{\cdot}012{\cdot}013)] \quad \supset \vdash : \phi a \vee \phi b . \supset . (\exists x) . \phi x : \supset \vdash .$ Prop

Estas proposiciones, al igual que las del *8, son aplicables a cualquier número de variables, ya que también lo son las proposiciones primitivas.

***8·23.** $\vdash : (\exists x) . \phi x \vee \phi c . \supset . (\exists x) . \phi x$

Dem.

Aplicando las definiciones, esta proposición es

$$(x) : (\exists y, z) . (\phi x \vee \phi c) \mid (\phi y \mid \phi z),$$

es decir

$$(x) : \phi x \vee \phi c . \supset . (\exists x) . \phi x,$$

la cual resulta de la *8·22.

Las siguientes proposiciones tienen relación con las formas del silogismo.

***8·24.** $\vdash :: p \supset q . \supset :. q . \supset . (\exists x) . \phi x : \supset : p . \supset . (\exists x) . \phi x$

Dem.

Aplicando las definiciones obtenemos una matriz

$$(p \supset q) \mid [\{(q \mid (\phi x \mid \phi y)) \mid (p \mid (\phi z \mid \phi w) \mid p \mid (\phi u \mid \phi v))\} \mid \{\text{la misma con letras acentuadas}\}]$$

con un prefijo

$$(x, y, x', y') : (\exists z, w, u, v, z', w', u', v').$$

Por la *8·1, esto será verdadero si es verdadero para valores escogidos de z, w, u, v, z', w', u', v'. Pongamos $z = u = x \,.\, w = v = y \,.\, z' = u' = x' \,.\, w' = v' = y'$. Entonces, lo que debe probarse se convierte en

$$p \supset q . \supset :. q . \supset . \phi x . \phi y : \supset : p . \supset . \phi x . \phi y :. q . \supset . \phi x' . \phi y' : \supset : p . \supset . \phi x' . \phi y',$$

lo cual es verdadero por Syll. Por tanto, da como resultado la proposición

***8·241.** $\vdash :: (x) . \phi x . \supset . p : \supset :. p \supset q . \supset : (x) . \phi x . \supset . q$

Poniendo $f(y, z) . = . \{p \mid (q \mid q)\} \mid [\{\phi y \mid (q \mid q)\} \mid \{\phi z \mid (q \mid q)\}]$,

la matriz de la proposición a probar es

$$\{\phi x \mid (p \mid p)\} \mid \{f(y, z) \mid f(y', z')\}$$

y el prefijo es $(x) : (\exists y, z, y', z')$. Haciendo $y = z = y' = z' = x$, la matriz se reduce a $\phi x \supset p \,.\, \supset : p \supset q \,.\, \supset . \phi x \supset q$, que es verdadera por Syll. Por lo tanto, la proposición es verdadera por la *8·1

***8·25.** $\vdash :: p . \supset . (\exists x) . \phi x : \supset :. (\exists x) . \phi x . \supset . (\exists x) . \psi x : \supset : p . \supset . (\exists x) . \psi x$

Dem.

Pongamos $(x, y, z, u, v, m, n) . = . \{\phi x \mid (\psi y \mid \psi z)\} \mid [\{p \mid (\psi u \mid \psi v)\} \mid \{p \mid (\psi m \mid \psi n)\}]$.

Entonces la proposición a probar, al aplicar las definiciones, se basa en tener una matriz

$$\{p \mid (\phi a \mid \phi b)\} \mid \{f(x, y, z, u, v, m, n) \mid f(x', y', z', u', v', m', n')\}$$

con el prefijo

$$(a, b, y, z, y', z') : (\exists x, u, v, m, n, x', u', v', m', n').$$

Pongamos $x = a \,.\, x' = b \,.\, u = v = y \,.\, m = n = z \,.\, u' = v' = y' \,.\, m' = n' = z'$.

Entonces la matriz se reduce a

$$p \,.\supset.\, \phi a \,.\, \phi b : \supset :. \phi a \,.\supset.\, \psi y \,.\, \psi z : \supset : p \,.\supset.\, \psi y \,.\, \psi z :.$$
$$\phi b \,.\supset.\, \psi y' \,.\, \psi z' : \supset : p \,.\supset.\, \psi y' \,.\, \psi z',$$

que es verdadera por Syll. Por tanto, nuestras proposiciones resultan por aplicaciones repetidas de la *8·1·13.

Pruebas análogas se aplican a otras formas del silogismo

***8·26.** $\vdash : \phi a \vee \phi b \vee \phi c \,.\supset.\, (\exists x) \,.\, \phi x \vee \phi c$

Dem.

$\vdash : \phi a \vee \phi b \vee \phi c \,.\supset.\, (\phi a \vee \phi c) \vee (\phi b \vee \phi c)$ (1)

$\vdash .*8{\cdot}22 .\supset \vdash : (\phi a \vee \phi c) \vee (\phi b \vee \phi c) \,.\supset.\, (\exists x) \,.\, \phi x \vee \phi c$ (2)

$\vdash .(1).(2).*8{\cdot}24 .\supset \vdash .$ Prop

***8·261.** $\vdash : \phi a \vee \phi b \vee \phi c \,.\supset.\, (\exists x) \,.\, \phi x$

[*8·25·26·23]

Es obvio que, de la misma manera, podemos probar

$$\phi a \vee \phi b \vee \phi c \vee \phi d \,.\supset.\, (\exists x) \,.\, \phi x$$

y así sucesivamente

***8·27.** $\vdash :: q \,.\supset.\, (\exists x) \,.\, \phi x : \supset :. p \supset q \,.\supset : p \,.\supset.\, (\exists x) \,.\, \phi x$

Dem.

pongamos $f(x, y, u, v) \,.=.\, \{p \mid (\phi x \mid \phi y)\} \mid \{p \mid (\phi u \mid \phi v)\}.$

Entonces la matriz es

$$\{q \mid (\phi a \mid \phi b)\} \mid [\{(p \supset q) \mid f(x, y, u, v)\} \mid \{(p \supset q) \mid f(x', y', u', v')\}]$$

y el prefijo es $(a, b) : (\exists x, y, u, v, x', y', u', v').$

Haciendo $x = u = x' = u' = a \,.\, y = v = y' = v' = b,$ la matriz viene a ser

$$q \,.\supset.\, \phi a \,.\, \phi b : \supset :. p \supset q \,.\supset : p \,.\supset.\, \phi a \,.\, \phi b,$$

la cual es verdadera. Por tanto, tenemos la proposición

***8·271.** $\vdash :: q \,.\supset.\, (\exists x, y) \,.\, \phi (x, y) : \supset :. p \supset q \,.\supset : p \,.\supset.\, (\exists x, y) \,.\, \phi (x, y)$

[La prueba como en la *8·27]

Está claro que podemos probar, de manera semejante, la proposición análoga con $\phi (x_1, x_2, \ldots x_n)$ en lugar de $\phi (x, y)$.

***8·272.** $\vdash :: . p \,.\supset : q \,.\supset.\, (\exists x) \,.\, \phi x :. \supset :: r \supset p \,.\supset :. r \,.\supset : q \,.\supset.\, (\exists x) \,.\, \phi x$

Dem.

$q \,.\supset (\exists x) \,.\, \phi x$ es $(\exists x, y) \,.\, q \mid (\phi x \mid \phi y)$. Por tanto, la proposición resulta de la *8·271, por la sustitución de p por q, r por p, y $q \mid (\phi x \mid \phi y)$ por $\phi (x, y)$.

***8·28.** $\vdash :: p \,.\supset.\, (\exists x) \,.\, \phi x : \supset :. q \,.\supset.\, (\exists x) \,.\, \phi x : \supset : p \vee q \,.\supset.\, (\exists x) \,.\, \phi x$

Dem.

Pongamos $f(x, y, z, w) \,.=.\, \{(p \vee q) \mid (\phi x \mid \phi y)\} \mid \{(p \vee q) \mid (\phi z \mid \phi w)\}.$

Entonces la matriz es

$$\{p \mid (\phi a \mid \phi b)\} \mid [\{(q \mid (\phi c \mid \phi d)) \mid f(x, y, z, w)\} \mid \{(q \mid (\phi c' \mid \phi d')) \mid f(x', y', z', w')\}]$$

y el prefijo es

$$(a, b, c, d, c', d') : (\exists x, y, z, w, x', y', z', w').$$

La matriz es

$$p \,.\supset.\, \phi a \,.\, \phi b :\supset:. q \,.\supset.\, \phi c \,.\, \phi d :\supset.\, f(x, y, z, w) :.$$
$$q \,.\supset.\, \phi c' \,.\, \phi d' \,.\supset.\, f(x', y', z', w'),$$

mientras $f(x, y, z, w) \,.\equiv: p \vee q \,.\supset.\, \phi x \,.\, \phi y \,.\, \phi z \,.\, \phi w.$

Citemos la matriz $F(x, y, z, w, x', y', z', w').$

Entonces, $\vdash : p \,.\supset.\, F(a, b, a, b, a, b, a, b),$

$\vdash : \sim p \,.\supset.\, F(c, d, c, d, c', d', c', d').$

Por tanto, $\vdash : F(a, b, a, b, a, b, a, b) \,.\vee.\, F(c, d, c, d, c', d', c', d').$

Por tanto, por la extensión de *8·261 a ocho variables,

$$\vdash . (\exists x, y, z, w, x', y', z', w') \,.\, F(x, y, z, w, x', y', z', w'),$$

que era lo que se quería probar.

***8·29.** $\vdash :. (x) \,.\, \phi x \supset \psi x \,.\supset : (x) \,.\, \phi x \,.\supset.\, (x) \,.\, \psi x$

Dem.

Aplicando las definiciones, se encuentra que nuestra proposición tiene una matriz

$$(\phi x \supset \psi x) \mid [\{\phi y \mid (\psi u \mid \psi v)\} \mid \{\phi y' \mid (\psi u' \mid \psi v')\}]$$

con un prefijo (después de emplear la *8·13)

$$(u, v, u', v') : (\exists x, y, y').$$

La matriz es equivalente a

$$\phi x \supset \psi x \,.\supset : \phi y \,.\supset.\, \psi u \,.\, \psi v : \phi y' \,.\supset.\, \psi u' \,.\, \psi v'.$$

Llamando a ésta $M(x, y, y')$, hemos de probar

$$(\exists x, y, y') \,.\, M(x, y, y').$$

Si $\psi u \,.\, \psi v \,.\, \psi u' \,.\, \psi v'$, $M(x, y, y')$ es siempre verdadero (1)

Si $\sim \psi u$, introducimos $x = y = y' = u$. Entonces, si ϕu es verdadero, $\phi u \supset \psi u$ es falso y $M(u, u, u)$ es verdadero. Pero si ϕu es falso, $\phi u \,.\supset.\, \psi u \,.\, \psi v$ y $\phi u \,.\supset.\, \psi u' \,.\, \psi v'$ son verdaderos, de forma que $M(u, u, u)$ es verdadero. Por tanto,

$$\sim \psi u \,.\supset.\, M(u, u, u) \,.\supset.\, (\exists x, y, y') \,.\, M(x, y, y'). \quad (2)$$

Similarmente, si $\sim \psi v \vee \sim \psi u' \vee \sim \psi v'.$ (3)

(1), (2) y (3) agotan los casos posibles. Por tanto, tenemos el resultado por la *8·28.

Ahora estamos en condiciones para probar que todas las proposiciones de *1—*5 permanecen verdaderas cuando una o más de las proposiciones $p, q, r, \ldots$ son proposiciones de primer orden en vez de ser proposiciones elementales. A este

propósito, tomamos no la única proposición primitiva que Nicod ha mostrado ser suficiente, sino las dos que ha mostrado ser equivalentes a ella, a saber:

$$p \supset p \text{ y } p \supset q \,.\, \supset \,.\, s \mid q \supset p \mid s$$

Mostramos que éstas son verdaderas cuando una, o dos, o tres, de las proposiciones p, q, s, son proposiciones de primer orden. A partir de aquí, se sigue el resto. La primera de estas proposiciones primitivas, $p \supset q$, da origen a dos clases, según que sustituyamos $(x) \,.\, \phi x$ o $(\exists x) \,.\, \phi x$ por p; la segunda proposición primitiva origina 26 casos. Estos han de considerarse una a una

*8·3. $\vdash : (x) \,.\, \phi x \,.\, \supset \,.\, (x) \,.\, \phi x$

Aplicando las definiciones, esto es $(\exists x) : (y, z) \,.\, \phi x \mid (\phi y \mid \phi z)$, que se sigue de la *8·11 mediante la *8·13.

*8·31. $\vdash : (\exists x) \,.\, \phi x \,.\, \supset \,.\, (\exists x) \,.\, \phi x$

Aplicando las definiciones $(x) : (\exists y, z) \,.\, \phi x \mid (\phi y \mid \phi z)$. Esto es la *8·1. Esto completa la prueba de $p \supset p$.

*8·32. $\vdash :. (x) \,.\, \phi x \,.\, \supset \,.\, q : \supset : s \mid q \,.\, \supset \,.\, \{(x) \,.\, \phi x\} \mid s$

Poniendo $p \,.=\,. (x) \,.\, \phi x$. La proposición a probar es

$$(p \mid \sim q) \mid \sim \{(s \mid q) \mid \sim (p \mid s)\}.$$

Por las definiciones

$$p \mid \sim q \,.=\,. (\exists a) \,.\, \phi a \mid (q \mid q), \tag{1}$$

$$p \mid s \,.=\,. (\exists x) \,.\, \phi x \mid s,$$

$$\sim (p \mid s) \,.=\,. (x, y) \,.\, (\phi x \mid s) \mid (\phi y \mid s),$$

$$(s \mid q) \mid \sim (p \mid s) \,.=\,. (\exists x, y) \,.\, (s \mid q) \mid \{(\phi x \mid s) \mid (\phi y \mid s)\}.$$

Ponemos $$f(x, y) \,.=\,. (s \mid q) \mid \{(\phi x \mid s) \mid (\phi y \mid s)\}.$$

Entonces $$\sim \{(s \mid q) \mid \sim (p \mid s)\} \,.=\,. (x, y, x', y') \,.\, f(x, y) \mid f(x', y'). \tag{2}$$

Por (1) y (2), la proposición a probar es

$$(a) : (\exists x, y, x', y') \,.\, \{\phi a \mid (q \mid q)\} \mid \{f(x, y) \mid f(x', y')\}.$$

Haciendo $x = y = x' = y' = a$, la matriz de esta proposición se reduce a

$$\phi a \supset q \,.\, \supset \,.\, s \mid q \supset \phi a \mid s,$$

que es nuestra proposición primitiva con ϕa sustituida por p, y es, por lo tanto, verdadera. Por lo tanto, resulta la proposición en virtud de la *8·1.

En lo sucesivo, la reducción de la proposición que se quiere probar a una matriz y prefijo, por medio de las definiciones, la realizaremos siempre por el mismo método y ordinariamente se omitirán los pasos.

*8·321. $\vdash :. (\exists x) \,.\, \phi x \,.\, \supset \,.\, q : \supset : s \mid q \,.\, \supset \,.\, \{(\exists x) \,.\, \phi x\} \mid s$

Obtenemos la misma matriz como en la *8·32, pero con el prefijo opuesto; es decir, el prefijo es

$$(x, y, x', y') : (\exists a).$$

La matriz es equivalente a

$$\phi a \supset q \,.\supset \vdash q \supset \sim s \,.\supset. \phi x \supset \sim s \,.\, \phi y \supset \sim s \,.\, \phi x' \supset \sim s \,.\, \phi y' \supset \sim s.$$

Llamando a esto fa, hemos de probar $(\exists a) \,.\, fa$, para cualquier x, y, x', y'. Tenemos

$$\phi a \,.\sim q \,.\supset .\, fa.$$

También $\phi a \,.\, q \,.\supset :. fa \,.\equiv :\sim s \,.\supset. \phi x \supset \sim s \,.\, \phi y \supset \sim s \,.\, \phi x' \supset \sim s \,.\, \phi y' \supset \sim s :.$
$\supset :. fa.$

Por eso $\phi a \,.\supset .\, fa.$

Por tanto, mediante las *8·1·24 $\phi x \,.\supset .\, (\exists a) \,.\, fa,$

y de manera semejante, para ϕy, $\phi x'$, $\phi y'$. Por consiguiente, por la *8·261,

$$\phi x \vee \phi y \vee \phi x' \vee \phi y' \,.\supset .\, (\exists a) \,.\, fa.$$

También $\sim \phi x \,.\sim \phi y \,.\sim \phi x' \,.\sim \phi y' \,.\supset .\, fa \,.$

[*8·1·24] $\supset .\, (\exists a) \,.\, fa.$

Por tanto, por la *8·28,

$$\phi x \vee \phi y \vee \phi x' \vee \phi y' \vee \sim \phi x \,.\sim \phi y \,.\sim \phi x' \,.\sim \phi y' : \supset .\, (\exists a) \,.\, fa.$$

Por tanto, por la *8·12, $(\exists a) \,.\, fa$, que era lo que había que probar.

***8·322.** $\vdash :. p \,.\supset .\, (x) \,.\, \psi x : \supset : s \mid \{(x) \,.\, \psi x\} \,.\supset .\, p \mid s$

Dem.

Pongamos $fy \,.=. \,(s \mid \psi y) \mid \{(p \mid s) \mid (p \mid s)\}.$

Entonces, la proposición que se quiere probar es

$$(y, y') : (\exists b, c) \,.\, \{p \mid (\psi b \mid \psi c)\} \mid (fy \mid fy').$$

Aquí, la matriz es equivalente a

$$p \,.\supset .\, \psi b \,.\, \psi c : \supset : s \mid \psi y \,.\supset .\, p \mid s : s \mid \psi y' \,.\supset .\, p \mid s.$$

Haciendo $b = y$, $c = y'$, esto se sigue simultáneamente de la proposición primitiva, que da

$$p \supset \psi y \,.\supset : s \mid \psi y \,.\supset .\, p \mid s,$$
$$p \supset \psi y' \,.\supset : s \mid \psi y' \,.\supset .\, p \mid s.$$

Por tanto, la proposición.

***8·323.** $\vdash :. p \,.\supset .\, (\exists x) \,.\, \psi x : \supset : s \mid \{(\exists x) \,.\, \psi x\} \,.\supset .\, p \mid s$

Tenemos la misma matriz que en la *8·322, pero con el prefijo opuesto, es decir

$$(b, c) : (\exists y, y').$$

Haciendo $y = b$. $y' = c$, se satisface la matriz, como en la *8·322.

***8·324.** $\vdash :. p \supset q \,.\supset : \{(x) \,.\, \chi x\} \mid q \,.\supset .\, p \mid \{(x) \,.\, \chi x\}$

Dem.

Poniendo $f(x, y, z) \,.=. \,(\chi x \mid q) \mid \{(p \mid \chi y) \mid (p \mid \chi z)\}.$ Entonces la matriz es

$$\{p \mid (q \mid q)\} \mid \{f(x, y, z) \mid f(x', y', z')\}$$

y el prefijo es (x, x') : $(\exists y, z, y', z')$. Poniendo

$$y = z = x \,.\, y' = z' = x',$$

la matriz es equivalente a

$$p \supset q \,.\, \supset : \chi x \mid q \,.\, \supset \,.\, p \mid \chi x : \chi x' \mid q \,.\, \supset \,.\, p \mid \chi x',$$

que resulta de nuestra proposición primitiva por Comp.

***8·325.** $\vdash :. p \supset q \,.\, \supset : \{(\exists x) \,.\, \chi x\} \mid q \,.\, \supset \,.\, p \mid \{(\exists x) \,.\, \chi x\}$

Dem.

La matriz es la misma que en la *8·324, pero el prefijo es el opuesto, esto es

$$(y, z, y', z') : (\exists x, x').$$

Llamando a la matriz $M(x, x')$, tenemos, si $\theta\omega \,.\, \equiv_\omega \,.\, \sim \chi\omega$,

$$M(x, x') \,.\, \equiv :: p \supset q \,.\, \supset :. q \supset \theta x \,.\, \supset : p \,.\, \supset \,.\, \theta y \,.\, \theta z :. q \supset \theta x' \,.\, \supset : p \,.\, \supset \,.\, \theta y' \,.\, \theta z'.$$

Por tanto, $\theta y \,.\, \theta z \,.\, \theta y' \,.\, \theta z' \,.\, \supset \,.\, M(x, x') \,.\, \supset \,.\, (\exists x, x') \,.\, M(x, x')$ (1)

Pero $\sim\theta x \,.\, \sim\theta x' \,.\, \supset \,.\, M(x, x')$. Por tanto,

$$\sim\theta x \,.\, \supset \,.\, M(x, x) \,.\, \supset \,.\, (\exists x, x') \,.\, M(x, x') \qquad (2)$$

De manera similar, con θy, $\theta x'$, $\theta y'$. Por tanto el resultado se sigue como en la *8·321.

Esto agota los casos en los que sólo uno de p, q, r, en

$$p \supset q \,.\, \supset : s \mid q \,.\, \supset \,.\, p \mid s$$

es de primer orden en vez de ser elemental. Hemos de tratar ahora de los casos en que dos, pero no tres, son de primer orden.

***8·33.** $\vdash :. (x) \,.\, \phi x \,.\, \supset \,.\, (x) \,.\, \psi x : \supset : s \mid \{(x) \,.\, \psi x\} \,.\, \supset \,.\, \{(x) \,.\, \phi x\} \mid s$

Poniendo $f(x, y, z) \,.=\, . (s \mid \psi x) \mid \{(\phi y \mid s) \mid (\phi z \mid s)\}$, la matriz es

$$\{\phi a \mid (\psi b \mid \psi c)\} \mid \{f(x, y, z) \mid f(x', y', z')\}$$

y el prefijo es (a, x, x') : $(\exists b, c, y, z, y', z')$. La matriz se satisface por

$$b = x \,.\, c = x' \,.\, y = z = y' = z' = a,$$

en cuyo caso es equivalente a

$$\phi a \,.\, \supset \,.\, \psi x \,.\, \psi x' : \supset :. \psi x \supset \sim s \,.\, \supset \,.\, \phi a \supset \sim s : \psi x' \supset \sim s \,.\, \supset \,.\, \phi a \supset \sim s.$$

Por lo tanto, Prop.

En las tres siguientes proposiciones tenemos la misma matriz, sólo que con prefijos diferentes.

***8·331.** $\vdash :. (x) \,.\, \phi x \,.\, \supset \,.\, (\exists x) \,.\, \psi x : \supset : s \mid \{(\exists x) \,.\, \psi x\} \,.\, \supset \,.\, \{(x) \,.\, \phi x\} \mid s$

Aquí el prefijo de la matriz es $(a, b\ c)$: $(\exists x, y, z, x', y', z')$. La matriz se satisface por $x = b \,.\, x' = c \,.\, y = z = y' = z' = a$. Por lo tanto, tenemos

Prop.

***8·332.** $\vdash :. (\exists x) \,.\, \phi x \,.\, \supset \,.\, (x) \,.\, \psi x : \supset : s \mid \{(x) \,.\, \psi x\} \,.\, \supset \,.\, \{(\exists x) \,.\, \phi x\} \mid s$

El prefijo aquí es $(x, y, z, x', y', z') : (\exists a, b, c)$. Escribiendo r por $\sim s$, la matriz se convierte en

$$\phi a \,.\supset.\, \psi b \,.\, \psi c : \supset :. \psi x \supset r \,.\supset.\, \phi y \vee \phi z \supset r : \psi x' \supset r \,.\supset.\, \phi y' \vee \phi z' \supset r.$$

(Aquí sólo a, b, y c pueden elegirse arbitrariamente). Esto es verdadero si ϕy, ϕz, $\phi y'$, $\phi z'$ son falsas todas. Supongamos que ϕy es verdadera. Supongamos $a = y$. Entonces, si ψb o ψc son falsas, $\phi a \,.\supset.\, \psi b \,.\, \psi c$ es falsa y la matriz es verdadera. Por lo tanto, si ψx es falsa, pongamos $b = c = x$; si ψx y $\psi x'$ son verdaderas, poniendo $a = y \,.\, b = c = x$, la matriz viene a ser equivalente a

$$r \,.\supset.\, \phi y \vee \phi z \supset r : r \,.\supset.\, \phi y' \vee \phi z' \supset r,$$

que es verdadera. Por tanto, si ϕy es verdadera, la matriz puede hacerse verdadera. De manera similar, para z, y', z'. Esto agota los casos posibles. Por lo tanto, concluimos Prop, por la *8·28.

***8·333.** $\vdash :. (\exists x) \,.\, \phi x \,.\supset.\, (\exists x) \,.\, \psi x : \supset : s \mid \{(\exists x) \,.\, \psi x\} \,.\supset.\, \{(\exists x) \,.\, \phi x\} \mid s$

Dem.

La matriz es como antes, y el prefijo (después de usar la *8·13) es

$$(b, c, y, z, y', z') : (\exists a, x, x').$$

Llamemos a la matriz $M(a, x, x')$. Entonces

$$\vdash : \psi b \,.\supset.\, M(a, b, b) \,.\supset.\, (\exists a, x, x') \,.\, M(a, x, x') \qquad (1)$$
$$\vdash : \psi c \,.\supset.\, M(a, c, c) \,.\supset.\, (\exists a, x, x') \,.\, M(a, x, x') \qquad (2)$$
$$\vdash : \sim \psi b \,.\sim \psi c \,.\, \phi y \,.\supset.\, M(y, b, c) \,.\supset.\, (\exists a, x, x') \,.\, M(a, x, x') \qquad (3)$$
$$(1) \,.\, (2) \,.\, (3) \,.\supset \vdash : \phi y \,.\supset.\, (\exists a, x, x') \,.\, M(a, x, x') \text{ [usando la *8·28]} \qquad (4)$$

Similarmente para $\phi y'$, ϕz, $\phi z'$. Por tanto, en virtud de *8·28,

$$\vdash : \phi y \vee \phi y' \vee \phi z \vee \phi z' \,.\supset.\, (\exists a, x, x') \,.\, M(a, x, x') \qquad (5)$$

Pero
$$\vdash :. \sim \phi y \,.\sim \phi y' \,.\sim \phi z \,.\sim \phi z' \,.\supset : \phi y \vee \phi z \supset r \,.\, \phi y' \vee \phi z' \supset r :$$
$$\supset : M(a, x, x')$$

[*8·1]
$$\supset : (\exists a, x, x') \,.\, M(a, x, x') \qquad (6)$$

$$\vdash \,.\, (5) \,.\, (6) \,.\, *8{\cdot}28 \,.\supset \vdash \,.\, (\exists a, x, x') \,.\, M(a, x, x') \,.\supset \vdash \,.\, \text{Prop}$$

Esto concluye los casos en los que p y q, pero no s, contienen variables aparentes. Seguidamente consideramos los cuatro casos en los que p y s, pero no q, contiene variables aparentes.

***8·34.** $\vdash :. (x) \,.\, \phi x \,.\supset.\, q : \supset : \{(x) \,.\, \chi x\} \mid q \,.\supset.\, \{(x) \,.\, \phi x\} \mid \{(x) \,.\, \chi x\}$

Poniendo $f(x, y, z, u, v) \,.=.\, (\chi x \mid q) \mid \{(\phi y \mid \chi z) \mid (\phi u \mid \chi v)\}$, la matriz es

$$(\phi a \mid \sim q) \mid \{f(x, y, z, u, v) \mid f(x', y', z', u', v')\}.$$

(Esta es también la matriz de las proposiciones siguientes).

El prefijo es $(a, x, x') : (\exists y, z, u, v, y', z', u', v')$.

La matriz es equivalente a

$$\phi a \supset q \,.\supset.\, f(x, y, z, u, v) \,.\, f(x', y', z', u', v')$$

y
$$f(x, y, z, u, v) \,.\equiv : \chi x \mid q \,.\supset.\, \phi y \mid \chi z \,.\, \phi u \mid \chi v :$$
$$\equiv : q \supset \sim \chi x \,.\supset.\, \phi y \supset \sim \chi z \,.\, \phi u \supset \sim \chi v.$$

Poniendo $y = u = y' = u' = a\ .\ z = v = x\ .\ z' = v' = x'$, se satisface la matriz. Por lo tanto, Prop.

***8·341.** $\vdash :. (x) . \phi x . \supset . q : \supset : \{(\exists x) . \chi x\} \mid q . \supset . \{(x) . \phi x\} \mid \{(\exists x) . \chi x\}$

La matriz es como en la *8·34. El prefijo $(a, z, v, z', v') : (\exists x, y, u, x', y', u')$.

La matriz es equivalente a

$$\phi a \supset q . \supset :. q \supset \sim \chi x . \supset . \phi y \supset \sim \chi z . \phi u \supset \sim \chi v : q \supset \sim \chi x' . \supset . \phi y' \supset \sim \chi z' . \phi u' \supset \sim \chi v'.$$

Si ϕa es falsa, esto viene a ser verdadero poniendo $y = u = y' = u' = a$. Si ϕa es verdadera, la matriz es verdadera si q es falsa. Supongamos q verdadera. Entonces la matriz es equivalente a

$$\sim \chi x . \supset . \phi y \supset \sim \chi z . \phi u \supset \sim \chi v : \sim \chi x' . \supset . \phi y' \supset \sim \chi z' . \phi u' \supset \sim \chi v'.$$

Esto es verdadero si χz, χv, $\chi z'$, $\chi v'$ son falsas. Si alguna de ellas, supongamos χz, es verdadera, hacemos $x = x' = z$, y la matriz es verdadera. Esto agota los casos posibles. Por lo tanto, queda demostrado Prop, mediante la *8·28

***8·342.** $\vdash :. (\exists x) . \phi x . \supset . q : \supset : \{(x) . \chi x\} \mid q . \supset . \{(\exists x) . \phi x\} \mid \{(x) . \chi x\}$

La matriz es como antes. El prefijo (después de usar la *8·13) es

$$(x, y, u, x', y', u') : (\exists a, z, v, z', v').$$

Tomemos la matriz $M(a, z, v, z', v')$. Entonces,

$$\vdash : \sim \chi x . \quad \supset . M(a, x, x, x, x) \tag{1}$$
$$\vdash : \sim \chi x' . \quad \supset . M(a, x', x', x', x') \tag{2}$$
$$\vdash : q . \chi x . \chi x' . \supset . \sim (q \supset \sim \chi x) . \sim (q \supset \sim \chi x') . \supset . M(a, z, v, z', v') \tag{3}$$
$$\vdash : \sim q . \phi y . \quad \supset . \sim (\phi y \supset q) . \supset . M(y, z, v, z', v') \tag{4}$$

Similarmente, si $\sim q . \phi u$ ó $\sim q . \phi y'$ or $\sim q . \phi u'$. Por lo tanto, por las *8·1·28,

$$\vdash : \sim q . \phi y \vee \phi u \vee \phi y' \vee \phi u' . \supset . (\exists a, z, v, z', v') . M(a, z, v, z', v') \tag{5}$$
$$\vdash : \sim \phi y . \sim \phi u . \sim \phi y' . \sim \phi u' . \supset . \phi y \supset \sim \chi z . \phi u \supset \sim \chi v . \phi y' \supset \sim \chi z' . \phi u' \supset \sim \chi v' . \supset . M(a, z, v, z', v') \tag{6}$$
$$(5) . (6) . \supset \vdash : \sim q . \quad \supset . (\exists a, z, v, z', v') . M(a, z, v, z', v') \tag{7}$$
$$\vdash . (1) . (2) . (3) . (7) . \supset \vdash . \text{Prop}$$

***8·343.** $\vdash :. (\exists x) . \phi x . \supset . q : \supset : \{(\exists x) . \chi x\} \mid q . \supset . \{(\exists x) . \phi x\} \mid \{(\exists x) . \chi x\}$

El prefijo para la matriz es $(y, z, u, v, y', z', u', v') : (\exists a, x, x')$.

Llamamos a la matriz $f(a, x, x')$.

Es verdadera si $\sim \chi z . \sim \chi v . \sim \chi z' . \sim \chi v'$ (1)

También $\chi z . q . \supset . f(a, z, z) . \supset . (\exists a, x, x') . f(a, x, x')$ (2)

Similarmente, si tenemos $\chi v . q$ o $\chi z' . q$ o $\chi v' . q$ (3)

A partir de las (1) . (2) . (3), mediante la *8·28, $q . \supset . (\exists a, x, x') . f(a, x, x')$ (4)

Ahora $\phi a . \sim q . \supset . f(a, x, x')$. Por tanto,

$$\phi y . \sim q . \supset . f(y, x, x') . \supset . (\exists a, x, x') . f(a, x, x')$$

De manera semejante para $\phi z . \sim q$, $\phi y' . \sim q$, $\phi z' . \sim q$. Por tanto,

$$\phi y \vee \phi z \vee \phi y' \vee \phi z' . \sim q . \supset . (\exists a, x, x') . f(a, x, x') \quad (5)$$

Pero $\sim \phi y . \sim \phi z . \sim \phi y' . \sim \phi z' . \supset . f(a, x, x')$ (6)

Por (5) y (6) $\sim q . \supset . (\exists a, x, x') . f(a, x, x')$ (7)

$\vdash . (4) . (7) . *8{\cdot}28 . \supset \vdash .$ Prop

En las cuatro siguientes proposiciones, q y r se sustituyen por proposiciones que contienen variables aparentes, mientras que que p permanece elemental.

***8·35.** $\vdash :. p . \supset . (x) . \psi x : \supset : \{(x) . \chi x\} \mid \{(x) . \psi x\} . \supset . p \mid \{(x) . \chi x\}$

Haciendo $q . = . (x) . \psi x$, $s . = . (x) . \psi x$, la proposición es

$$(p \mid \sim q) \mid \sim \{(s \mid q) \mid \sim (p \mid s)\}.$$

Tenemos por las definiciones

$$\begin{aligned}
\sim q . &= . (\exists b, c) . \psi b \mid \psi c, \\
p \mid \sim q . &= . (b, c) . p \mid (\psi b \mid \psi c), \\
s \mid q . &= . (\exists x, y) . \chi y \mid \psi x, \\
p \mid s . &= . (\exists z) . p \mid \chi z, \\
\sim (p \mid s) . &= . (z, w) . (p \mid \chi z) \mid (p \mid \chi w), \\
(s \mid q) \mid \sim (p \mid s) . &= : (x, y) : (\exists z, w) . (\chi y \mid \psi x) \mid \{(p \mid \chi z) \mid (p \mid \chi w)\}. \\
\text{Ponemos} \quad f(x, y, z, w) . &= . (\chi y \mid \psi x) \mid \{(p \mid \chi z) \mid (p \mid \chi w)\}. \\
\text{Entonces,} \quad \sim \{(s \mid q) \mid \sim (p \mid s)\} . &= : (\exists x, y, x', y') : (z, w, z', w') . f(x, y, z, w) \mid f(x', y', z', w'), \\
(p \mid \sim q) \mid \sim \{(s \mid q) \mid \sim (p \mid s)\} . &= : (x, y, x', y') : (\exists b, c, z, w, z', w') . \\
&\quad \{p \mid (\psi b \mid \psi c)\} \mid \{f(x, y, z, w) \mid f(x', y', z', w')\}.
\end{aligned}$$

Escribiendo $\theta \hat{x}$ por $\sim \chi \hat{x}$, la matriz es equivalente a

$$p . \supset . \psi b . \psi c : \supset :. \psi x \supset \theta y . \supset : p . \supset . \theta z . \theta w :. \psi x' \supset \theta y' . \supset : p . \supset . \theta z' . \theta w'.$$

Esto se satisface haciendo $b = x . c = x' . z = w = y . z' = w' = y'$. Por tanto, Prop. La misma matriz aparece en las tres proposiciones siguientes: sólo cambia el prefijo.

***8·351.** $\vdash :. p . \supset . (x) . \psi x : \supset : \{(\exists x) . \chi x\} \mid \{(x) . \psi x\} . \supset . p \mid \{(\exists x) . \chi x\}$

Es la misma matriz que en la *8·35, pero el prefijo es $(x, z, w, x', z', w') : (\exists b, c, y, y')$.

La matriz es verdadera si $\theta z . \theta w . \theta z' . \theta w'$.

Supongamos $\sim \theta z$, y hagamos $y = y' = z . b = x . c = x'$.

Ahora tenemos $\psi x \supset \theta y . \equiv . \sim \psi x$ y $p . \supset . \theta z . \theta w : \equiv . \sim p$. Por lo tanto, la matriz es equivalente a

$$p . \supset . \psi x . \psi x' : \supset :. \sim \psi x . \supset . \sim p :. \sim \psi x' . \supset : p . \supset . \theta z' . \theta w',$$

lo cual es verdadero. De manera similar si $\sim \theta w \vee \sim \theta z' \vee \sim \theta w'$. Por lo tanto, se sigue Prop, por las *8·1·28.

***8·352.** $\vdash :. p . \supset . (\exists x) . \psi x : \supset : \{(x) . \chi x\} \mid \{(\exists x) . \psi x\} . \supset . p \mid \{(x) . \chi x\}$

La misma matriz, pero el prefijo es $(b, c, y, y') : (\exists x, z, w, x', z', w')$.

Satisfecha por $x = b \,.\, x' = c \,.\, z = w = y \,.\, z' = w' = y'$. Por lo tanto, Prop.

*8·353. $\vdash :. p \,.\supset.\, (\exists x) \,.\, \psi x : \supset : \{(\exists x) \,.\, \chi x\} \mid \{(\exists x) \,.\, \psi x\} \,.\supset.\, p \mid \{(\exists x) \,.\, \chi x\}$

La misma matriz, con el prefijo $(b, c, z, w, z', w') : (\exists x, y, x', y')$.

Si ψb es verdadera y θz falsa, la matriz se satisface por $x = x' = b \,.\, y = y' = z$, porque estos valores hacen $\psi x \supset \theta y$ y a $\psi x' \supset \theta y'$ falsa. De manera semejante, si ψb es verdadera y θw o $\theta z'$ o $\theta w'$ es falsa, y si ψc es verdadera, y θz, θw, $\theta z'$ o $\theta w'$ es falsa.

Ello permanece para considerar $\sim\psi b \,.\sim\psi c : \mathrm{v} : \theta z \,.\, \theta w \,.\, \theta z' \,.\, \theta w'$.

La segunda alternativa hace la matriz verdadera, porque da

$$p \,.\supset.\, \theta z \,.\, \theta w : p \,.\supset.\, \theta z' \,.\, \theta w'.$$

La primera alternativa da

$$p \,.\supset.\, \psi b \,.\, \psi c : \supset : \sim p : \supset : p \,.\supset.\, \theta z \,.\, \theta w : p \,.\supset.\, \theta z' \,.\, \theta w',$$

de modo que, de nuevo, la matriz es verdadera. Por lo tanto, Prop.

Esto agota, de nuevo, los casos en los que uno o dos de los constituyentes de $p \supset q \,.\supset.\, s \mid q \supset p \mid s$ permanece elemental. Esto se mantiene para considerar los ocho casos en los que ninguno permanece elemental.

Todas éstas tienen la misma matriz

*8·36. $\vdash :. (x) \,.\, \phi x \,.\supset.\, (x) \,.\, \psi x : \supset : \{(x) \,.\, \chi x\} \mid \{(x) \,.\, \psi x\} \,.\supset.\, \{(x) \,.\, \phi x\} \mid \{(x) \,.\, \chi x\}$

Poniendo $p \,.=.\, (x) \,.\, \phi x$, $q \,.=.\, (x) \,.\, \psi x$, $s \,.=.\, (x) \,.\, \chi x$, tenemos

$$\sim q \,.=.\, (\exists b, c) \,.\, \psi b \mid \psi c,$$
$$p \mid \sim q \,.=:\, (\exists a) : (b, c) \,.\, \phi a \mid (\psi b \mid \psi c),$$
$$s \mid q \,.=.\, (\exists x, y) \,.\, \chi y \mid \psi x,$$
$$p \mid s \,.=.\, (\exists z, w) \,.\, \phi z \mid \chi w,$$
$$\sim (p \mid s) \,.=.\, (z, w, u, v) \,.\, (\phi z \mid \chi w) \mid (\phi u \mid \chi v),$$
$$(s \mid q) \mid \sim (p \mid s) \,.=:\, (x, y) : (\exists z, w, u, v) \,.\, (\chi y \mid \psi x) \mid \{(\phi z \mid \chi w) \mid (\phi u \mid \chi v)\}.$$

Haciendo $f(x, y, z, w, u, v) \,.=.\, (\chi y \mid \psi x) \mid \{(\phi z \mid \chi w) \mid (\phi u \mid \chi v)\}$. Entonces

$$\sim \{(s \mid q) \mid \sim (p \mid s)\} \,.=:\, (\exists x, y, x', y') : (z, w, u, v, z', w', u', v') \,.\, f(x, y, z, w, u, v) \mid f(x', y', z', w', u', v'),$$
$$(p \mid \sim q) \mid \sim \{(s \mid q) \mid \sim (p \mid s)\} \,.=:\, (a, x, y, x', y') : (\exists b, c, z, w, u, v, z', w', u', v') \,.\, \{\phi a \mid (\psi b \mid \psi c)\} \mid \{f(x, y, z, w, u, v) \mid f(x', y', z', w', u', v')\}.$$

Escribiendo $\theta \hat{x}$ por $\sim \chi \hat{x}$, la matriz es equivalente a

$$\phi a \,.\supset.\, \psi b \,.\, \psi c : \supset :. \psi x \supset \theta y \,.\supset.\, \phi z \supset \theta w \,.\, \phi u \supset \theta v : \psi x' \supset \theta y' \,.\supset.\, \phi z' \supset \theta w' \,.\, \phi u' \supset \theta v'.$$

Esto se satisface por $b = x \,.\, c = x' \,.\, z = u = z' = u' = a \,.\, w = v = y \,.\, w' = v' = y'$.

Por lo tanto, Prop.

$*8{\cdot}361.\ \vdash :. (x) . \phi x . \supset . (x) . \psi x : \supset : \{(\exists x) . \chi x\} \mid \{(x) . \psi x\} . \supset . \{(x) . \phi x\} \mid \{(\exists x) . \chi x\}$

Es la misma matriz, pero "todos" y "alguno" se intercambian en argumentos para χ, es decir, en $y,\ w,\ v,\ y',\ w',\ v'$. Las variables $\exists$ son, por lo tanto, $b,\ c,\ y,\ y',\ z,\ z',\ u,\ u'$.

Si $\sim \phi a$, ponemos $z = u = z' = u' = a$, y la matriz se satisface.

Si ϕa es verdadera, la matriz es verdadera si $\sim \psi b \vee \sim \psi c$, es decir, si $\sim \psi x \vee \sim \psi x'$, ya que b y c son arbitrarios. Supongamos $\psi x,\ \psi x'$. Entonces la matriz se reduce a

$$\theta y . \supset . \phi z \supset \theta w . \phi u \supset \theta v : \theta y' . \supset . \phi z' \supset \theta w' . \phi u' \supset \theta v'.$$

Si $\theta w,\ \theta v,\ \theta w',\ \theta v'$ son todas verdaderas, esto es verdadero.

Si $\sim \theta w$, hacemos $y = y' = w$, y la matriz se satisface.

Similarmente, si $\sim \theta v,\ \sim \theta w'$ o $\sim \theta v'$. Por lo tanto, Prop.

$*8{\cdot}362.\ \vdash :. (x) . \phi x . \supset . (\exists x) . \psi x : \supset : \{(x) . \chi x\} \mid \{(\exists x) . \psi x\} . \supset . \{(x) . \phi x\} \mid \{(x) . \chi x\}$

La matriz es como en la $*8{\cdot}36$. El prefijo resulta de la $*8{\cdot}36$ intercambiando "todos" y "algunos" entre los argumentos ψ, esto es $b,\ c,\ x,\ x'$. Por lo tanto, la Prop resulta de las mismas sustituciones como en la $*8{\cdot}36$.

$*8{\cdot}363.\ \vdash :. (x) . \phi x . \supset . (\exists x) . \psi x : \supset : \{(\exists x) . \chi x\} \mid \{(\exists x) . \psi x\} . \supset . \{(x) . \phi x\} \mid \{(\exists x) . \chi x\}$

Resulta del intercambio entre "todos" y "algunos", en la $*8{\cdot}361$, en los argumentos ψ, a saber, $b,\ c,\ x,\ x'$. Las variables $\exists$ son, por tanto, $x,\ x',\ y,\ y',\ z,\ z',\ w,\ w'$, y la prueba se desarrolla exactamente como en la $*8{\cdot}361$, intercambiando $x,\ x'$ y $b,\ c$.

$*8{\cdot}364.\ \vdash :. (\exists x) . \phi x . \supset . (x) . \psi x : \supset : \{(x) . \chi x\} \mid \{(x) . \psi x\} . \supset . \{(\exists x) . \phi x\} \mid \{(x) . \chi x\}$

La proposición es la que resulta de la $*8{\cdot}36$ intercambiando "todos" y "algunos" en los argumentos ϕ, a saber, $a,\ z,\ u,\ z',\ u'$. Por lo tanto, los argumentos $\exists$ son $a,\ b,\ c,\ w,\ v,\ w',\ v'$. Si θy es verdadero, hacemos $w = v = w' = v' = y$, y la matriz se satisface. Si $\theta y'$ es verdadera, hacemos $w = v = w' = v' = y'$, y la matriz se satisface. Supongamos $\sim \theta y . \sim \theta y$. La matriz es verdadera si $\psi x \supset \theta y$ y $\psi x' \supset \theta y'$ son falsas, esto es, puesto que $\theta y,\ \theta y'$ son falsas, si ψx y $\psi x'$ son verdaderas. Si ψx es falsa, ponemos $b = c = x$ y $a = y$; entonces $\phi a . \supset . \psi b . \psi c$, es falsa, y la matriz es verdadera. Si $\psi x'$ es falsa, ocurre de manera similar. Por lo tanto, tenemos Prop.

$*8{\cdot}365.\ \vdash :. (\exists x) . \phi x . \supset . (x) . \psi x : \supset : \{(\exists x) . \chi x\} \mid \{(x) . \psi x\} . \supset . \{(\exists x) . \phi x\} \mid \{(\exists x) . \chi x\}$

Prop es lo que resulta a partir de la $*8{\cdot}364$ intercambiando "todos" y "algunos" en los argumentos χ, a saber, $y,\ w,\ v,\ y',\ w',\ v'$. Por lo tanto, los argumentos $\exists$ son $a,\ b,\ c,\ y,\ y'$. La matriz es verdadera si $\theta w,\ \theta v,\ \theta w',\ \theta v'$. Supongamos $\sim \theta w$, y hacemos $y = y' = w$. La matriz es verdadera si $\psi x \supset \theta y$ y $\psi x' \supset \theta y'$ son falsas, es decir, en el

presente caso, si ψx y $\psi x'$ son verdaderos. Supongamos que uno de ellos es falso, y pongamos $b = x \,.\, c = x'$. Entonces $\psi b \,.\, \psi c$ es falso. Por lo tanto $\phi a \,.\supset.\, \psi b \,.\, \psi c$ es falso si ϕa es verdadera; por lo tanto, la matriz es verdadera si ϕa es verdadera. Por tanto, si ϕz es verdadera, la matriz es verdadera para $a = z$. Similarmente, si ϕu, $\phi z'$ o $\phi u'$ es verdadero. Pero si todas son falsas, la matriz es también verdadera. Por tanto, es verdadero cuando tenemos $\sim \theta w$ y $\sim \psi x \vee \sim \psi x'$. Similarmente para $\sim \theta v$, $\sim \theta w$ o $\sim \theta v'$, con $\sim \psi x \vee \sim \psi x'$. Vemos que la matriz puede satisfacerse por $\sim \theta w$, $\sim \theta v$, $\sim \theta w'$ o $\theta v'$ con $\psi x \,.\, \psi x'$. Por lo tanto, puede satisfacerse por $\sim \theta w \vee \sim \theta v \vee \sim \theta w' \vee \sim \theta v'$. Y vimos que es verdadero para $\theta w \,.\, \theta v \,.\, \theta w' \,.\, \theta v'$. Esto completa los casos. Por lo tanto, Prop.

***8·366.** $\vdash :. (\exists x) \,.\, \phi x \,.\supset.\, (\exists x) \,.\, \psi x : \supset : \{(x) \,.\, \chi x\} \,|\, \{(\exists x) \,.\, \psi x\} \,.$
$\supset \,.\, \{(\exists x) \,.\, \phi x\} \,|\, \{(x) \,.\, \chi x\}$

Prop es lo que resulta de la *8·364 intercambiando "todos" y "algún" entre los argumentos ψ, a saber, b, c, x, x'. Por lo tanto los argumentos $\exists$ son a, x, x', w, v, w', v'. La prueba se realiza como en la *8·364, intercambiando b, c y x, x'.

***8·367.** $\vdash :. (\exists x) \,.\, \phi x \,.\supset.\, (\exists x) \,.\, \psi x : \supset : \{(x) \,.\, \chi x\} \,|\, \{(\exists x) \,.\, \psi x\} \,.$
$\supset \,.\, \{(\exists x) \,.\, \phi x\} \,|\, \{(\exists x) \,.\, \chi x\}$

Prop es lo que resulta de la *8·365 intercambiando "todos" y "algún" entre los argumentos ψ, a saber, b, c, x, x'. Por lo tanto, los argumentos $\exists$ son a, x, x', y, y'. La prueba se realiza como en la *8·365, intercambiando b, c y x, x'.

Esto completa los 26 casos de $p \supset q \,.\supset.\, s|q \supset p|s$. Por lo tanto, en todas las proposiciones de los *1—*5 podemos sustituir proposiciones que contengan una variable. Las pruebas de las proposiciones que contienen 2, 3, 4, ... variables son paso-a-paso las mismas. Por tanto, las proposiciones de las *1—*5 tienen lugar todas como proposiciones de primer orden.

La extensión a proposiciones de segundo orden, después a proposiciones de tercer orden, y así sucesivamente, se efectúa por pasos exactamente análogos. Luego, todas las funciones-trazo que pueden demostrarse para proposiciones elementales pueden demostrarse para proposiciones de cualquier orden.

Quedan por probar $\sim\{(x) \,.\, \phi x\} \,.\equiv.\, (\exists x) \,.\sim \phi x$ y proposiciones similares.

***8·4.** $\vdash : \sim\{(x) \,.\, \phi x\} \,.\equiv.\, (\exists x) \,.\sim \phi x$

Dem.

$\vdash \,.\, *8{\cdot}1 \,.$	$\supset \vdash : \phi x \,|\, \phi x \,.\supset.\, (\exists y) \,.\, \phi x \,|\, \phi y$	(1)
$\vdash \,.\, (1) \,.\, *8{\cdot}21 \,.$	$\supset \vdash : (\exists x) \,.\, \phi x \,|\, \phi x \,.\supset.\, (\exists x, y) \,.\, \phi x \,|\, \phi y :$	
[(*8·01·012)]	$\supset \vdash : (\exists x) \,.\sim \phi x \,.\supset.\sim\{(x) \,.\, \phi x\}$	(2)
We have	$\vdash : p \,|\, q \,.\equiv.\, p \,|\, p \vee q \,|\, q$	(3)
$\vdash \,.\, (3) \,.$	$\supset \vdash : \phi x \,|\, \phi y \,.\equiv.\, \phi x \,|\, \phi x \vee \phi y \,|\, \phi y$	(4)
$\vdash \,.\, (4) \,.\, *8{\cdot}22{\cdot}24 \,.$	$\supset \vdash : \phi x \,|\, \phi y \,.\supset.\, (\exists x) \,.\, \phi x \,|\, \phi x$	(5)
[(*8·011)]	$\vdash :. (\exists x, y) \,.\, f(x,y) \,.\supset.\, p : \equiv : (x,y) \,.\, f(x,y) \supset p$	(6)
$\vdash \,.\, (5) \,.\, (6) \,.$	$\supset \vdash : (\exists x, y) : \phi x \,|\, \phi y \,.\supset.\, (\exists x) \,.\, \phi x \,|\, \phi x :$	
[(*8·01·012)]	$\supset \vdash : \sim\{(x) \,.\, \phi x\} \,.\supset.\, (\exists x) \,.\sim \phi x$	(7)

$\vdash . (2) . (7) . \quad \supset \vdash . \text{Prop}$

***8·41.** $\vdash : \sim\{(\exists x) . \phi x\} . \equiv . (x) . \sim\phi x$

Prueba similar

***8·42.** $\vdash :. p . \supset . (\exists x) . \phi x : \equiv : (\exists x) . p \supset \phi x$

Dem.

$\vdash :. p . \supset . (\exists x) . \phi x : \equiv : p \mid \{\sim(\exists x) . \phi x\} :$
[*8·41] $\equiv : p \mid \{(x) . \sim\phi x\} :$
[(*8·011)] $\equiv : (\exists x) . p \mid \sim\phi x :$
[*8·21] $\equiv : (\exists x) . p \supset \phi x :. \supset \vdash . \text{Prop}$

***8·43.** $\vdash :. p . \supset . (x) . \phi x : \equiv : (x) . p \supset \phi x$

[Prueba similar]

Otras proposiciones de este tipo pueden considerarse como probadas.

***8·44.** $\vdash :. (x) . \phi x . \supset : (x) . \psi x . \supset . (x) . \phi x . \psi x$

Dem.

$\vdash :. \phi z . \supset : \psi z . \supset . \phi z . \psi z$ (1)
$\vdash . (1) . *8{\cdot}1 . \supset \vdash :: . (\exists x) :: (\exists y) :: (z) :. \phi x . \supset : \psi y . \supset . \phi z . \psi z$ (2)
$\vdash . (2) . *8{\cdot}42{\cdot}43 . \supset \vdash . \text{Prop}$

***8·5.** Si $F(p, q, r, \ldots)$ en una función-trazo de proposiciones elementales, y p, q, r, ... se sustituyen por proposiciones de primer orden p_1, q_1, r_1, ..., tendremos

$$p \equiv p_1 . q \equiv q_1 . r \equiv r_1, \ldots \supset : F(p, q, r, \ldots) . \equiv . F(p_1, q_1, r_1, \ldots).$$

Esto resulta de

$$p_1 . = . (x) . \phi x : \quad \supset : p \equiv p_1 . \supset . p_1 \mid q \equiv p \mid q . q \mid p_1 \equiv q \mid p,$$
$$p_1 . = . (\exists x) . \phi x : \supset : p \equiv p_1 . \supset . p_1 \mid q \equiv p \mid q . q \mid p_1 \equiv q \mid p,$$

las cuales son muy fáciles de probar.

APENDICE C

FUNCIONES DE VERDAD Y OTRAS

En la introducción a la presente edición hemos supuesto que una función puede entrar en una proposición únicamente a través de sus valores. En efecto, hemos supuesto que una matriz $f!(\phi!\hat{z})$ surge siempre por alguna función-trazo

$$F(p, q, r, \ldots)$$

sustituyendo $\phi!a$, $\phi!b$, $\phi!c$, ... en lugar de alguna o todas las p, q, r, ..., y que todas las demás funciones de funciones son derivables de tales matrices por generalización —esto es, sustituyendo alguna o todas de las a, b, c, ... por las variables, y tomando "todos los valores" o "algún valor".

Los usos que hemos hecho de este supuesto pueden validarse por definición, aunque el supuesto no sea universalmente verdadero. Es decir, podemos decidir que la matemática por sí misma se limite a funciones de funciones que obedecen el supuesto indicado anteriormente. Esto nos lleva a decir que la matemática es esencialmente extensional, en lugar de intensional. En este terreno, podríamos abstenernos de preguntar si nuestro supuesto es universalmente verdadero o no. Sin embargo, la pregunta es importante en sí misma, y en lo que sigue sugerimos ciertas consideraciones sin llegar a una conclusión dogmática.

Hay una pregunta previa, que es más sencilla, y es si todas las funciones de las proposiciones son funciones de verdad. O, más exactamente, ¿pueden todas las proposiciones que no contienen variables aparentes construirse a partir de las proposiciones atómicas por medio del trazo? Si fuese éste el caso, y si $\hat{fp}$ es cualquier función de las proposiciones, tendríamos

$$p \equiv q \,.\supset.\, fp \equiv fq.$$

Por consiguiente, de acuerdo con la definición *13·01,

$$p \equiv q \,.\supset.\, p = q.$$

Habrá, por lo tanto, sólo dos proposiciones, una verdadera y una falsa. Este era el punto de vista de Frege, pero que no puede aceptarse fácilmente. Frege mantenía que cada proposición es un nombre propio, ya sea para la verdadera o la falsa. En terrenos no relacionados con la cuestión que nos ocupa, no podemos considerar las proposiciones como nombres; pero eso no decide la cuestión de si las proposiciones equivalentes son idénticas. Esta última cuestión es la que nos interesa. Es decir, tenemos que considerar si, o en qué sentido, hay funciones fp que son verdaderas para algunos valores verdaderos de p y falsos para otros valores verdaderos de p.

Dos ejemplos *primâ facie* evidentes son "A cree p" y "p se refiere a A". Podemos

tomar estos ejemplos como decisivos. Si A cree p y p es verdadero, no se sigue que A crea en cualquier otra proposición verdadera q; y si A cree p, y p es falsa, tampoco se desprende que A crea en ninguna otra proposición falsa q. Otra vez, la proposición "A es mortal" se refiere a A; pero la proposición "B es mortal", que es igualmente verdadera, no se refiere a A. Así, la función "p se refiere a A" no es una función de verdad de p. Este ejemplo es importante, porque la notación "ϕx" se emplea para simbolizar a una proposición con respecto a x, y de este modo la concepción afectada *parece* presuponerse en el procedimiento total de las funciones proposicionales.

Para empezar, debemos distinguir entre una proposición como un hecho y una proposición como un vehículo de verdad o falsedad. La siguiente serie es de indicaciones defectuosas: "Sócrates es mortal", es un hecho de geografía. El sonido que haría si yo tuviese que decir "Sócrates es mortal" sería un hecho de acústica. El acontecimiento mental cuando tomo en consideración la creencia "Sócrates es mortal" es un hecho de psicología. Ninguna de ellas introduce la noción de verdad o falsedad, que es, para la lógica, la característica esencial de las proposiciones. Volvamos por un momento a la consideración de las proposiciones en cuanto hechos.

Cuando decimos que la verdad o falsedad es, para la lógica, la característica esencial de las proposiciones, no se nos debe entender mal. No importa, para la lógica matemática, qué es lo que constituye verdad o falsedad; todo lo que importa es que dividen las proposiciones en dos clases, de acuerdo con ciertas reglas. Tomemos un grupo de símbolos:

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_{2n-1},\ x_{2n}.$$

Pongamos, como aserciones inexplicables,

$$T(x_{2m+1}) \quad (m < n),$$
$$F(x_{2m}) \quad (m \leqslant n).$$

Introduzcamos además el símbolo $x_r|x_s$, y supongamos

$$T(x_r \mid x_s) \text{ si } F(x_r) \supset F(x_s);$$
$$F(x_r \mid x_s) \text{ si } T(x_r) \text{ y } T(x_s).$$

Supongamos además que, si p, q, s son algunas de las x's o cualquier combinación de ellas por medio del trazo, las reglas indicadas más arriba se aplican a $p|q$, etc., y además tendremos:

$$T\{p \mid (p \mid p)\},$$
$$T\{p \supset q \,.\, \supset \,.\, s \mid q \supset p \mid s\},$$

en donde "$p \supset q$" significa "$p|(q|q)$". Además: dado $T\{p|(q|r)\}$ y $T(p)$, tenemos que tener $T(r)$.

Tomando las anteriores como simples reglas convencionales, resulta toda la lógica de las proposiciones moleculares, sustituyendo "$\vdash . p$" por "$T(p)$".

Así, desde el punto de vista formal, es irrelevante lo que constituya verdad o

falsedad: todo lo que importa es que, de acuerdo con ciertas reglas, las proposiciones se dividen en dos clases. No importa lo que las proposiciones sean, mientras que nos contentemos con considerar nuestras proposiciones primitivas como hipótesis de definición y no como verdades. (Desde un punto de vista filosófico, este procedimiento formal puede mostrarse para presuponer la interpretación no formal de nuestras proposiciones primitivas; pero eso no importa para nuestro propósito actual).

Por medio de la lógica de las proposiciones moleculares, no queremos conocer nada acerca de las proposiciones, excepto si son verdaderas o falsas. Además, estamos interesados únicamente en las combinaciones de proposiciones que sean verdaderas en virtud de las reglas, si sus proposiciones componentes son verdaderas o falsas. Esto es, —por tomar el ejemplo más simple— afirmamos $p|(p|p)$, pero nunca afirmamos ninguna proposición p que no tenga alguna estructura molecular adecuada, aunque creemos que la mitad de tales proposiciones son verdaderas. Nuestras aseveraciones dependen siempre de la estructura y nunca del mero hecho de que alguna proposición sea verdadera.

No obstante, surge una nueva situación cuando sustituimos p por $\phi\,!\,x$. Por ejemplo, tenemos

$$\vdash .\, p|(p|p)$$

e inferimos

$$\vdash .\, \phi\,!\,x|(\phi\,!\,x|\phi\,!\,x).$$

No podemos *explicar* la notación $\phi\,!\,x$ sin introducir características de las proposiciones que no sean su verdad o falsedad. Tomemos por ejemplo, la proposición primitiva (*8·11)

$$\vdash .\,(\exists x).\,\phi\,!\,x|(\phi\,!\,a|\phi\,!\,b).$$

La verdad de esta proposición depende de la *forma* de las proposiciones componentes $\phi\,!\,x$, $\phi\,!\,a$, $\phi\,!\,b$, y no simplemente de su verdad o falsedad. No puede sustituirse por

$$\text{“}\vdash .\,(\exists p).\,p|(q|r),\text{”}$$

que es verdadera, pero no tiene las consecuencias deseadas. Estamos, por consiguiente, obligados a considerar lo que se significa al decir que una proposición es de la forma $\phi\,!\,a$ (en donde a es alguna constante). Esto nos vuelve a “A ocurre en p”, que dimos anteriormente como ejemplo de una función que no es función verdadera. Y esto, encontraremos, nos lleva otra vez a la proposición como un hecho, en oposición a la proposición en cuanto verdadera o falsa.

Volvamos a nuestros dos ejemplos: “A cree p” y “p se refiere a A”. Evitaremos ciertas dificultades psicológicas si, para empezar, tomamos “A afirma p” en lugar de “A cree p”. Supongamos que “p” es “Sócrates es griego”. Una palabra es una clase de sonidos similares. Así, la persona que afirma “Sócrates es griego” produce, en sucesión rápida, tres sonidos de los que el primero es un miembro de la clase “Sócrates”, el segundo un miembro de la clase “es”, y el tercero es un miembro de la clase “griego”. Esta serie de acontecimientos es parte de la serie de acontecimien-

tos que constituyen a la persona. Si A es la serie de acontecimientos que constituyen a la persona, α es la clase de sonidos "Sócrates", β es la clase "es" y γ la clase "griego"; luego, "A afirma que Sócrates es griego" es (omitiendo la rapidez de la sucesión)

$$(\exists x, y, z) . x \in \alpha . y \in \beta . z \in \gamma . x \downarrow y \cup x \downarrow z \cup y \downarrow z \subseteq A.$$

Es obvio que esto no es una función de p ya que p ocurre en una función-de-verdad.

Si ahora tomamos "A cree p", encontramos el asunto aún más complicado, debido a la duda de que constituye creencia. Algunas personas mantienen que una proposición debe expresarse con palabras antes de que podamos creer en ella; si esto fuese así, no habría, desde nuestro punto de vista, ninguna diferencia vital entre creer y afirmar. Pero si adoptamos un punto de vista menos heterodoxo, diremos que cuando alguien cree que "Sócrates es griego" tiene simultáneamente dos pensamientos, uno de ellos "significa" Sócrates, mientras que el otro "significa" griego, y estos dos pensamientos están relacionados en la forma que denominamos "predicación". Para la finalidad que perseguimos no es necesario definir "significado", más que observar que dos pensamientos diferentes pueden "tener el mismo significado". La relación "tener el mismo significado" es simétrica y transitiva; además, si dos pensamientos "tienen el mismo significado", cualquiera de ellos puede sustituir al otro en cualquier creencia sin alterar su valor de verdad. Así tenemos una clase de pensamientos, denominada "Sócrates", los cuales "tienen el mismo significado"; llamemos a esta clase α. Tenemos otra clase de pensamientos, llamado "griego", que todos "tienen el mismo significado"; llamemos β a esta clase. Denominemos P a la relación de predicación entre los dos pensamientos. (Esta es la relación que se mantiene entre nuestro pensamiento del sujeto y nuestro pensamiento del predicado cuando creemos que el sujeto tiene el predicado. Es totalmente diferente de la relación que se mantiene entre el sujeto y el predicado cuando nuestra creencia es verdadera). Entonces, "A cree que Sócrates es griego" es

$$(\exists x, y) . x \in \alpha . y \in \beta . xPy . x, y \in C`A.$$

Aquí, otra vez, la proposición tal y como ocurre en las funciones de verdad ha desaparecido.

No es necesario poner ningún énfasis sobre el análisis de creencia indicado más arriba, que puede estar completamente equivocado. Todo lo que se pretende es mostrar que "A cree en p" puede muy bien no ser una función de p, en el sentido en que p ocurre en funciones-de-verdad.

Ahora tenemos que considerar "p se refiere a A", ejemplo " 'Sócrates es griego' se refiere a Sócrates". Aquí tenemos que distinguir: 1) el hecho, 2) la creencia, 3) la proposición verbal. El hecho y la creencia, sin embargo, no levantan problemas diferentes, ya que está bastante claro que Sócrates es un elemento del hecho en el mismo sentido en el que el pensamiento de Sócrates es un elemento de la creencia. Y la proposición verbal no crea dificultad, ya que cada caso de la proposición verbal es una serie que contiene una parte que es un caso de "Sócra-

tes". Es decir, "Sócrates" (la palabra) es una clase de la serie de sonidos, digamos λ; y "Sócrates es griego" es otra clase de serie, digamos μ; y el hecho de que "Sócrates" intervenga en "Sócrates es griego" es

$$P \in \mu \,.\, \supset \,.\, (\exists Q) \,.\, Q \in \lambda \,.\, Q \subset P.$$

Así se nos deja con la pregunta: ¿Qué queremos decir al afirmar que Sócrates es un constituyente del hecho de que Sócrates es griego? Esto ocasiona el problema de análisis total. Pero no necesitamos una respuesta final; solamente necesitamos una contestación suficiente para dar luz a la cuestión acerca de si hay funciones de proposiciones que no son funciones-de-verdad.

Hay quien niega la legitimidad del análisis. Sin admitir que están en lo correcto, podemos estructurar una teoría que ellos no necesitan rechazar. Supongamos que los hechos son capaces de diversas clases de semejanzas y diferencias. Dos hechos pueden tener semejanza particular; entonces diremos que son relativos al mismo particular. Otra vez, pueden tener semejanza de predicado, o semejanza de relación diádica, etc. Diremos que un hecho que se refiere solamente a un particular concreto si cualesquiera dos hechos que tienen semejanza particular con respecto al hecho dado tienen semejanza particular entre sí. Dado tal hecho, podemos definir su particular concreto como la clase de todos los hechos que tengan semejanza particular con el hecho dado. En ese caso, decir que Sócrates es un constituyente del hecho de que Sócrates es griego (suponiendo convencionalmente que Sócrates es un particular) es decir que el hecho es un miembro de la clase de hechos en los que se encuentra Sócrates. En el caso de una creencia acerca de Sócrates, que es por sí mismo un hecho compuesto de pensamientos, diremos que una creencia es acerca de Sócrates si es de la clase de hechos que constituyen una cierta idea que "significa" Sócrates en cualquier sentido que podamos dar a "significado". Aquí se toma una "idea" como clase de hechos físicos, digamos todas las creencias que se "refieren a" Sócrates.

Podemos definir los predicados mediante un procedimiento similar. Tomemos un hecho que es únicamente capaz de dos clases de semejanza de la que estamos considerando, a saber, semejanza particular y semejanza de predicado; tal hecho será un hecho de sujeto-predicado. El predicado implicado en ello es la clase de los hechos para los cuales tiene semejanza de predicado.

Supondremos también diferencias de diversas clases: diferencia particular, diferencia de predicado, etc. Estas no son necesariamente incompatibles con la clase de semejanza correspondiente; ejemplo, $R\,(x, x)$ y $R\,(x, y)$ tienen semejanza particular respecto x y diferencia particular respecto de y. Esto hace posible que definamos lo que significa al decir que un particular ocurre dos veces en un hecho, como x se encuentra dos veces en $R\,(x, x)$. Primero: $R\,(x, x)$ es un hecho de relación diádica porque es capaz de semejanza de relación diádica con respecto a los otros hechos; segundo: cualesquiera dos hechos que tengan semejanza particular con $R\,(x, x)$ tienen semejanza particular entre sí. Esto es lo que queremos decir al afirmar que $R\,(x, x)$ es un hecho de relación diádica en el que x aparece dos veces, y no un

hecho de sujeto-predicado. Tomemos ahora un hecho de relación triádica $R\,(x, x, z)$. Este es, por definición, un hecho de relación triádica porque es capaz de semejanza de relación triádica. Los hechos que tengan semejanza particular con $R\,(x, x, z)$ pueden dividirse en dos grupos (no tres) de forma que dos miembros cualesquiera de un grupo tienen semejanza particular entre sí. Esto indica que hay repetición, pero no si es x o z la que se repite. Los hechos del grupo uno son $R\,(x, x, c)$ para una c variable; los hechos del otro son $R\,(a, b, z)$ para a y b variables. Cada hecho del grupo $R\,(x, x, c)$ pertenece solamente a dos grupos constituidos por semejanza particular, mientras que los hechos del grupo $R\,(a, b\ z)$, excepto cuando sucede que $a = b$, pertenecen a tres grupos constituidos por semejanza particular. Esto define lo que queremos decir al afirmar que x se encuentra dos veces y z una vez en el hecho $R\,(x, x, z)$. Es obvio que podamos tratar con relaciones tetrádicas, etc., del mismo modo.

De acuerdo con lo expuesto anteriormente, cuando decimos que Sócrates es un elemento del hecho de que Sócrates es griego, queremos decir que este hecho es un miembro de la clase de los hechos que es Sócrates.

Cuando empleamos la notación "$\phi\,!\,x$" para indicar una proposición en la que interviene "x", es un hecho que "x" interviene en "$\phi\,!\,x$", pero no necesitamos afirmar el hecho; el hecho hace su trabajo sin tenerlo que afirmar. Es también un hecho que, si "x" se encuentra en una proposición p, y p afirma un hecho, entonces x es un constituyente de ese hecho. Esto no es un ley de la lógica, sino una ley del lenguaje. Podría ser falso en algunas lenguas. Por ejemplo, antiguamente, cuando se cometía un crimen en la India, el sumario expresaba que se había cometido "en el feudo de Greenwich Oriental". Estas palabras no denotaban ningún constituyente del hecho. Pero un lenguaje lógico evita las ficciones de esta clase.

La notación de las funciones es una ilustración del principio de Wittgenstein, de que un símbolo lógico, en ciertos aspectos formales, debe asemejarse a lo que simboliza. Todos los hechos de los que x es un elemento, de acuerdo con lo dicho anteriormente, constituye una cierta clase definida por la semejanza particular. Los diversos símbolos ϕx, ψx, χx ... se asemejan también entre sí en cierto aspecto, especialmente que sus mitades del lado derecho son muy parecidas (sin ser *exactamente* parecidas, porque no hay dos x's exactamente iguales). Los símbolos $R\,(x, x)$, $R\,(x, x, z)$, etc. son adecuados a sus significados por razones similares. Los símbolos se *usan* antes de que pueda darse razón de su conveniencia. Para explicar *por qué* "ϕx" es un símbolo apropiado para una proposición relativa a x es, como hemos visto, un asunto complicado. Pero el empleo del símbolo no es un asunto complicado. Nuestro simbolismo, como un grupo de hechos, se asemeja, en ciertos aspectos lógicos, a los hechos que simbolizan. Esto hace que sea un buen simbolismo. Pero su empleo no presupone que tengamos que explicar por qué es bueno, ya que pertenece a una etapa posterior. Y así, la notación "ϕx" puede emplearse sin explicar previamente lo que entendemos por "una proposición acerca de x".

Estamos ya en condiciones de tratar la diferencia entre proposiciones considera-

das como hecho y las proposiciones como vehículo de verdad o falsedad. Cuando decimos " 'Sócrates' se encuentra en la proposición 'Sócrates es griego' ", tomamos la proposición factualmente. Tomado de este modo, es una clase de serie, y 'Sócrates' es otra clase de serie. Nuestra expresión sólo es verdadera cuando tomamos la proposición y el nombre como clases. El 'Sócrates' que aparece al principio de nuestra frase no es el que figura en la proposición 'Sócrates es griego'; lo que es verdad es que en la proposición interviene otro particular que se le asemeja mucho. Es, por lo tanto, absolutamente imprescindible para todas estas aseveraciones tomar las palabras y proposiciones como clases de sucesos similares, no como acontecimientos aislados. Pero cuando afirmamos una proposición, el suceso aislado es todo lo que es importante. Cuando afirmo "Sócrates es griego", los sucesos particulares de las palabras tienen significado, y la aseveración se hace por el suceso particular de esa frase. Y el dicho de esa frase " 'Sócrates' se encuentra en ella" es simplemente falso, si me refiero al 'Sócrates' que acabo de escribir, ya que era un 'Sócrates' diferente al que existía en ella. Así pues, concluimos:

Una proposición como vehículo de verdad o falsedad es un acontecimiento particular, mientras que una proposición considerada factualmente es una clase de acontecimiento similar. Es la proposición considerada factualmente la que se encuentra en expresiones como "*A* cree en *p*" y "*p* se refiere a *A*".

Por supuesto, es posible hacer declaraciones acerca del hecho particular "Sócrates es griego". Podemos decir los centímetros que tiene de longitud; podemos decir que es negro; y así sucesivamente. Pero estas no son las declaraciones de las que se siente tentado a hacer un filósofo o un lógico.

Cuando se presenta una aserción, se hace por medio de un hecho particular, que es un caso de la proposición aseverada. Pero este hecho particular es, por así decirlo, "transparente"; no se dice nada acerca de él, sino que por medio de él se dice algo acerca de algo más. Es esta cualidad "transparente" la que pertenece a proposiciones como las que intervienen en las funciones-de-verdad. Este pertenece a *p* cuando se asevera *p*, pero no cuando decimos "*p* es verdadera". Así, pues, supongamos que decimos: "Todo lo que Jenofonte dijo acerca de Sócrates es verdad". Pongamos

$$X(p) . = .\ \text{Jenofonte afirmó } p,$$

$$S(p) . = .\ p \text{ se refiere a Sócrates}$$

Entonces, nuestro enunciado es

$$X(p) . S(p) . \supset . p \text{ es verdadera}$$

Aquí la participación de *p* no es "transparente". Pero si decimos

$$x \in \alpha . \supset_x . \phi ! x$$

estamos aseverando $\phi ! x$ para una clase total de valores de x, e incluso "$\phi ! x$" continúa teniendo una intervención "transparente". La diferencia esencial es que en el primer caso hablamos *acerca del* símbolo o creencia, mientras que en el último lo utilizamos meramente para hablar acerca de algo más. Este es el punto que distingue

las intervenciones de las proposiciones en la lógica matemática de sus intervenciones en las funciones que no sean funciones-de-verdad.

Intentemos dar una mayor exactitud a este punto. Tomemos la expresión "Sócrates tuvo todos los predicados que Jenofonte dijo que tenía". Llamemos X a la serie de acontecimientos que dijo Jenofonte. Entonces, si Jenofonte atribuyó el predicado a Sócrates, podría parecer que tenemos (escribiendo $x \downarrow y \downarrow z \downarrow w$ para la serie, x, y, z, w)

$$\text{Sócrates} \downarrow \text{tenía} \downarrow \text{predicado} \downarrow \alpha \subset X.$$

Así, pues, nuestra aserción debe ser

$$\text{Sócrates} \downarrow \text{tenía} \downarrow \text{predicado} \downarrow \alpha \subset X \,.\, \supset_{\alpha} \text{Sócrates tenía el predicado } \alpha.$$

Sin embargo, aquí hay una ambigüedad. A la izquierda, "Sócrates", "tenía", "predicado", y "α" ocurren como sonidos; a la derecha se presentan como símbolos. Esta ambigüedad llega hasta la falacia. Con todo eso, lo que de hecho escribo en el papel no es el sonido que produjo Jenofonte, sino el símbolo de ese sonido. Así, pues, estoy empleando un símbolo "Sócrates" en dos sentidos: (a) para significar el sonido que Jenofonte produjo en cierta ocasión, (b) para significar un determinado hombre. Debemos decir:

Si Jenofonte produjo una serie de sonidos que significan lo que se indica mediante "Sócrates tuvo el predicado α", entonces, lo que esto significa es verdadero.

Por ejemplo: Si Jenofonte dijo "Sócrates era sabio", entonces, lo que significa "Sócrates era sabio" es verdadero.

Pero esto no afirma que Sócrates fuese sabio. Cuando yo afirmo realmente que Sócrates era sabio, digo algo que no puede decirse hablando acerca de las palabras que yo utilizo al decirlo; y cuando yo afirmo que Sócrates era sabio, aunque se produzca un caso de la proposición, sigo sin decir nada acerca de la proposición —en particular yo no digo que sea verdad—. Esto es una inferencia no lógica, sino lingüística.

En las consideraciones precedentes, en modo alguno aproximadas a la verdad, vemos que hay un enorme abismo entre la aserción de una proposición y una aserción acerca de la proposición. La p que tiene lugar cuando aseveramos p y la p que está presente en "A afirma p" en modo alguno son idénticas. La presencia de proposiciones tal y como se aseveran es más simple que su presencia como algo sobre lo que se está hablando. En la aserción de una proposición y en la aserción de cualquier función molecular de una proposición, la proposición no interviene, si entendemos por proposición la p que aparece en proposiciones como "A afirma p" o "p se refiere a A". Al analizar estos últimos, se encuentra que no están en contradicción con el punto de vista de que las proposiciones, (entendidas tal como se presentan cuando se aseveran), únicamente tienen lugar en las funciones verdaderas.

Cuando se asevera p, no se produce p realmente, sino que se producen los elementos de p o bien un caso de p. Lo mismo pasa cuando se asevera una proposición molecular que contenga p. Así, pues, no podemos inferir $p = q$, porque aquí p y q tienen lugar en un sentido en que no se presentan cuando se aseveran las proposiciones moleculares que los contienen.

A las funciones proposicionales se aplican consideraciones similares. Supongamos que hay dos predicados α y β que se encuentran siempre juntos; podemos incluso decir que son dos, debido a que $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ son hechos que no tienen semejanza de predicado. Pero la función proposicional $\alpha(\hat{x})$ está solamente para usarse a fin de construir matrices por medio del trazo. El predicado α es una clase de hechos, mientras que la función proposicional $\alpha(\hat{x})$ es meramente una conveniencia simbólica al hablar acerca de ciertas proposiciones. De este modo, podemos tener $\alpha(\hat{x}) = \beta(\hat{x})$ sin tener $\alpha = \beta$. En este sentido escapamos a la paradoja *primâ facie* de la teoría de que las proposiciones únicamente intervienen en las funciones-de-verdad, y las funciones proposicionales se producen únicamente por medio de sus valores. Las paradojas residen en la confusión que hay entre las proposiciones factuales y las asertivas.

LISTA DE DEFINICIONES

1·01. $p \supset q$

2·33. $p \vee q \vee r$

3·01. $p \cdot q$

3·02. $p \supset q \supset r$

4·01. $p \equiv q$

4·02. $p \equiv q \equiv r$

4·34. $p \cdot q \cdot r$

9·01. $\sim\{(x) \cdot \phi x\}$

9·011. $\sim(x) \cdot \phi x$

9·02. $\sim\{(\exists x) \cdot \phi x\}$

9·021. $\sim(\exists x) \cdot \phi x$

9·03. $(x) \cdot \phi x \cdot \vee \cdot p$

9·04. $p \cdot \vee \cdot (x) \cdot \phi x$

9·05. $(\exists x) \cdot \phi x \cdot \vee \cdot p$

9·06. $p \cdot \vee \cdot (\exists x) \cdot \phi x$

9·07. $(x) \cdot \phi x \cdot \vee \cdot (\exists y) \cdot \psi y$

9·08. $(\exists y) \cdot \psi y \cdot \vee \cdot (x) \cdot \phi x$

10·01. $(\exists x) \cdot \phi x$

10·02. $\phi x \supset_x \psi x$

10·03. $\phi x \equiv_x \psi x$

11·01. $(x, y) \cdot \phi(x, y)$

11·02. $(x, y, z) \cdot \phi(x, y, z)$

11·03. $(\exists x, y) \cdot \phi(x, y)$

11·04. $(\exists x, y, z) \cdot \phi(x, y, z)$

11·05. $\phi(x, y) \cdot \supset_{x,y} \cdot \psi(x, y)$

11·06. $\phi(x, y) \cdot \equiv_{x,y} \cdot \psi(x, y)$

13·01. $x = y$

13·02. $x \neq y$

13·03. $x = y = z$

14·01. $[(\imath x)(\phi x)] \cdot \psi(\imath x)(\phi x)$

14·02. $\mathrm{E}!(\imath x)(\phi x)$

14·03. $[(\imath x)(\phi x), (\imath x)(\psi x)] \cdot f\{(\imath x)(\phi x), (\imath x)(\psi x)\}$

14·04. $[(\imath x)(\psi x)] \cdot f\{(\imath x)(\phi x), (\imath x)(\psi x)\}$

20·01. $f\{\hat{z}(\psi z)\}$

20·02. $x \in (\phi ! \hat{z})$

20·03. Cls

20·04. $x, y \in \alpha$

20·05. $x, y, z \in \alpha$

20·06. $x \sim\in \alpha$

20·07. $(\alpha) \cdot f\alpha$

20·071. $(\exists\alpha) \cdot f\alpha$

20·072. $[(\imath\alpha)(\phi\alpha)] \cdot f(\imath\alpha)(\phi\alpha)$

20·08. $f\{\hat{\alpha}(\psi\alpha)\}$

20·081. $\alpha \in \psi ! \hat{\alpha}$

21·01. $f\{\hat{x}\hat{y}\psi(x, y)\}$

21·02. $a\{\phi ! (\hat{x}, \hat{y})\} b$

21·03. Rel

21·07. $(R) \cdot fR$

21·071. $(\exists R) \cdot fR$

21·072. $[(\imath R)(\phi R)] \cdot f(\imath R)(\phi R)$

21·08. $f\{\hat{R}\hat{S}\psi(R, S)\}$

21·081. $P\{\phi ! (\hat{R}, \hat{S})\} Q$

21·082. $f\{\hat{R}(\psi R)\}$

21·083. $R \in \phi ! \hat{R}$

22·01. $\alpha \subset \beta$

22·02. $\alpha \cap \beta$

22·03.	$\alpha \cup \beta$
22·04.	$-\alpha$
22·05.	$\alpha - \beta$
22·53.	$\alpha \cap \beta \cap \gamma$
22·71.	$\alpha \cup \beta \cup \gamma$
23·01.	$R \subset S$
23·02.	$R \dot{\cap} S$
23·03.	$R \dot{\cup} S$
23·04.	$\dot{-} R$
23·05.	$R \dot{-} S$
23·53.	$R \dot{\cap} S \dot{\cap} T$
23·71.	$R \dot{\cup} S \dot{\cup} T$
24·01.	V
24·02.	Λ
24·03.	$\exists ! \alpha$
25·01.	$\dot{\mathrm{V}}$
25·02.	$\dot{\Lambda}$
25·03.	$\dot{\exists} ! R$
30·01.	$R`y$
30·02.	$R`S`y$
31·01.	Cnv
31·02.	$\breve{P}$
32·01.	$\overrightarrow{R}$
32·02.	$\overleftarrow{R}$
32·03.	sg
32·04.	gs
33·01.	D
33·02.	Cl
33·03.	C
33·04.	F
34·01.	$R\ S$
34·02.	R^2
34·03.	R^3
35·01.	$\alpha \upharpoonleft R$
35·02.	$R \upharpoonright \beta$
35·03.	$\alpha \upharpoonleft R \upharpoonright \beta$
35·04.	$\alpha \uparrow \beta$
35·05.	$R`x \uparrow \beta$
35·24	$\alpha \upharpoonleft R \mid S$
35·25.	$S \mid R \upharpoonright \beta$
36·01.	$P \upharpoonright \alpha$
37·01.	$R``\beta$
37·02.	R_ϵ
37·03.	$\breve{R}_\epsilon$
37·04.	$R```\kappa$
37·05.	$\mathrm{E} !! R``\beta$
38·01.	$x \mathbin{♀}$
38·02.	$\mathbin{♀} y$
38·03.	$\alpha \mathbin{♀}_{,,} y$
40·01.	$p`\kappa$
40·02.	$s`\kappa$
41·01.	$\dot{p}`\lambda$
41·02.	$\dot{s}`\lambda$
43·01.	$R \parallel S$
50·01.	I
50·02.	J
51·01.	ι
52·01.	1
54·01.	0
54·02.	2
55·01.	$x \downarrow y$
55·02.	$R`x \downarrow y$
56·01.	$\dot{2}$
56·02.	$2_{,}$
56·03.	$0_{,}$

COLECCION "LOGICA Y TEORIA DE LA CIENCIA"

ALWOOD, ANDERSSON y DAHL.– LOGICA PARA LINGUISTAS.– Completa introducción a la lógica para su aplicación en la lingüística y, especialmente, en la semántica. Incluye un estudio de lógica modal, lógica intensional, gramática categorial y otros temas de interés para el lingüista, además de hacer constante referencia a la relación entre lenguajes naturales y artificiales. (204 págs.– 15,5 x 21,5 cm.– Rústica.)

BOCHENSKI.– COMPENDIO DE LOGICA MATEMATICA.– Especialmente dirigido a estudiantes de lógica de Facultades Universitarias de Letras y Ciencias. Manual escrito por uno de los mayores especialistas en Lógica Matemática e Historia de la Lógica, incluye abundante bibliografía en inglés y español. (120 págs.– 15,5 x 21,5 cm.– Rústica.)

BOOLE.– INVESTIGACION SOBRE LAS LEYES DEL PENSAMIENTO.– La principal obra del creador de la Lógica Matemática. De interés para lógicos y matemáticos. Boole introduce en las modernas técnicas del análisis formal y realiza una amplia discusión de temas filosóficos afines. Al final estudia la teoría de probabilidades. (1981.– Prensa.)

BOUDOT.– LOGICA INDUCTIVA Y PROBABILIDAD.– De gran interés para estudiantes de Lógica, Estadística y Matemáticas. Estudio detallado de las relaciones entre inducción y teoría de la probabilidad. Especial análisis de las teorías de Reichenbach y Keynes. (348 págs.– 15,5 x 21,5 cm.– Rústica.)

FEYS y FITCH.– LOS SIMBOLOS DE LA LOGICA MATEMATICA.– Unica obra en la que se presentan y comparan las distintas notaciones simbólicas de la Lógica Matemática. (192 págs.– 15,5 x 21,5 cm.– Rústica.)

GARDIES.– LOGICA DEL TIEMPO.– Completa exposición de todos los sistemas existentes de lógica temporal. Incluye una discusión de las lógicas temporales gramaticales. (128 págs.– 15,5 x 21,5 cm.– Rústica.)

HAACK.– LOGICA DIVERGENTE.– Minucioso estudio de las más recientes direcciones de la lógica y, especialmente, de las que se apartan de la Lógica ortodoxa. (192 págs.– 15,5 x 21,5 cm.– Rústica.)

HAMILTON.– LOGICA PARA MATEMATICOS.– Destinada a los interesados en la Lógica en general y, sobre todo, a profesores y estudiantes de Matemáticas. Presenta de forma concisa y didáctica las principales técnicas y resultados en lógica matemática. Destaca la importancia de la lógica para el estudio de las matemáticas. (244 págs.– 15,5 x 21,5 cm.– Rústica.)

HUNTER.– METALOGICA. INTRODUCCION A LA METATEORIA DE LA LOGICA CLASICA DE PRIMER ORDEN.– El primer manual completo en castellano sobre este tema. De interés para los estudiosos de la Lógica, las Matemáticas y la Teoría de la Computación. Nociones básicas para el examen de los sistemas lógicos, estudio detallado de las propiedades de los mismos y teoremas anejos. (320 págs.– 15,5 x 21,5 cm.– Rústica.)

MARTINEZ FREIRE.–FILOSOFIA DE LA CIENCIA EMPIRICA.– Investigación exhaustiva de los principales temas de la Ciencia Empírica y de la Lógica Inductiva, siguiendo las doctrinas de Whewell. (232 págs.– 15,5 x 21,5 cm.– Rústica.)

THIBAUD.– LA LOGICA DE CHARLES SANDERS PEIRCE.– Estudio sucinto y esencial de la obra de Peirce, lógico americano muy valorado en la actualidad y fundador de la lógica de relaciones. Aspectos algebraicos y gráficos típicos de Peirce e importantes temas de la lógica modal. De interés para estudiantes y profesores de lógica. (De próxima aparición.)

Magallanes, 25.—Madrid-15.